レオン・ワルラスの「資本形成および信用のモデル」について

――定常均衡および成長均衡の存在証明――

宮尾尊弘

一、序

一・一　一八七〇年代における限界革命の推進者の一人であるとともに、現代経済学の基礎である一般均衡分析の創設者でもあるレオン・ワルラスは、彼の主著「純粋経済学要論」(1)において四つの経済モデルを展開した。交換のモデル・生産のモデル・資本形成および信用のモデル・流通および貨幣のモデルがそれである。しかしワルラス以後、多くの理論家達によって取り上げられたのは専ら生産のモデルであり、それは特別な場合として交換のモデルをも含む形で、より厳密かつ現代的に再定式化され、さらに幾多の彫琢が加えられた。一九五〇年代には、モデルがいかなる条件のもとで経済的に意味のある均衡解を持つかという問題――所謂「存在問題」――に一応の解答が与えられ、それによって交換のモデルおよび生産のモデルの理論構造がより一層明らかになったのである。

これに対して、資本形成および信用のモデルと流通および貨幣のモデルについては、ワルラスによるそれらの定式化の複雑さと曖昧さのためか、若干の研究を除いてはほとんど取り上げられることもなく、何ら見るべき発展を示していない。しかしながら、ケインズ革命およびその後の経済成長理論の展開とともに、貯蓄と投資、したがって資本形成を考慮したモデルの重要性が確認されたこと、また近年、貨幣経済モデルの設定および貨幣問題に関する論争が復活しつつあること等に鑑みるならば、それらの分析により一般的な枠組を与えるという意味で、ワルラスの資本形成および貨幣を取り扱った一般均衡モデルを研究することは意義深いことであろう。

一・二　本稿の目的は、第一に、「存在問題」の意義を方法論的に再検討するとともに、これまで十分の発展を見たワルラスの交換のモデルおよび生産のモデルを、存在問題という視点から統一的に把握し、展望を行なうことであり、第二に、ワルラス自身の定式化による静学的な資本形成および信用のモデルを定常経済モデルおよび成長経済モデルへと拡張し、いくつかの条件のもとでそれらのモデルが経済的に有意味な解――定常均衡解および一様成長均衡解――を持つということを証明することである。またワルラスのモデルに欠如している概念である生産物の生産期間および資本財の耐久期間を明示的に考慮し、それらが定常経済および成長経済において持つ意味を考察することも本稿の意図した重要な目的の一つである。

以上の目的のうち第二のものは、それによってワルラス流の静学的一般均衡理論と動学的な経済成長理論とを体系的に総合するための一つの新しいアプローチを提供することと云い換えることができる。具体的には、ワルラスの資本形成と信用

のモデルは、体系内で幾種類かの資本財と消費財とが生産されるようなモデルであり、したがってここでの定常経済モデルおよび成長経済モデルは、近年発展しつつある二部門経済成長理論を多数財の二部門モデルへと一般化したものに類似なモデルであるとみなすことができよう。(2)

なお本稿においては、流通および貨幣のモデルについて触れることができなかった。(3) また、均衡の安定性に関する問題は一切取り上げなかった。それらについては次の機会に譲りたいと思う。(4)

(1) Walras, L., [50], Elements d'économie politique pure, Lausanne: 1st ed., 1874—77; 2nd ed., 1889; 3rd ed., 1896; 4th ed., 1900; definitive ed., 1926.

(2) ここでソロー [42] が宇沢 [45] の二部門成長モデルを "miniature Walrasian general equilibrium" と形容していたことが思い出されるであろう。

(3) ワルラスの流通および貨幣のモデルについては、最近、クエンネ [18] およびパティンキン [39] によって体系的な検討がなされており、また均衡解の存在証明は芳賀 [13] によって試みられている。

(4) この論文は、私の指導教授である千種義人先生の学部時代からの適切な御指導なしには、決して書かれなかったものである。この機会に心よりの御礼を申し上げたい。また、この論文を書くにあたって、様々の形で激励と示唆をいただいた川又邦雄氏をはじめとする大学院の諸先輩にも感謝の意を表する次第である。

二、存在問題の意義と展望

二・一　先ず、存在問題――経済モデルがいかなる条件のもとで経済的に有意味な均衡解を持つかということに関する問題――の意義について簡単に考察しておこう。一般に、経済的な諸関係を表現するいくつかの方程式から構成される理論モデルが、現実の経済諸量（価格、生産量等）の決定を説明すべきもの、ないしは指定された"望ましい"状態を達成するための諸資源の配分方法を決定すべきものであるならば、問題のモデルを構成する連立方程式体系が、実際要求されたとおり経済的に意味のある解（例えば、非負の均衡価格・生産量等）を持ちうるということが、そのために必要とせられることは明らかである。換言すれば、原理的に解を持ちえない、あるいは経済的に意味のある解を持ちえないような連立方程式体系は、それだけで現実との何らかの対応を持つべき理論モデルたる資格を失うに十分である。したがって、存在問題に答えることは、少なくとも指定されたある諸条件のもとでは、その理論モデルが無意味でないことを保証することになるであろう。

しかしながら、モデルが無意味でないことを示すだけならば、存在問題に対する完全な解答は必要でないかもしれない。例えば、一つの具体的な数値例によって、そのモデルが経済的に意味のある解を持ちうることを示せば十分であるかもしれない。したがって、存在問題の以上のような消極的意義に加えて、次のような積極的意義に注意せねばならない。

それは、モデルの諸前提、諸仮定ないしそれらに課せられた諸条件がどのようにモデルの経済的に有意味な均衡解のあり方とかかわっているかを明らかにし、それによってモデルの理論構造をより一層深く解明するということである。つまり、どの諸条件が通常の場合の均衡の存在を保証するのか、どの諸条件の付加がトリヴィアルな場合の存在をも保証するのか、どの諸条件の付加ないし削除が、均衡の一意性ないし多意性を、また均衡条件式の等号ないし不等号での成立を、また均衡諸量の正ないし非負性を保証するのか、均衡の存在を保証する諸条件が、異なるモデルの間でどのような共通性と差異を持つか等々を厳密に考察することによって、理論モデルの構造を均衡解のあり方との関連において明らかにすることである。

二・二　以上のような存在問題の消極的および積極的意義が最もよく発揮されたのは、先にも述べたように、ワルラスの生産（および交換）の一般均衡モデルにおいてであった。もっともワルラス自身 [50] 1874・1926 は、通常の場合に独立な方程式の数と未知数の数との一致が一義的な均衡解の決定を保証するであろうと論じるにとどまった。彼の後継者の多く（実にヒックス [15] 1939・1946 サムエルソン [40] 1948 に至るまで）もまたそうであった。このような必ずしも適切でない接近

法を克服し、存在問題に本格的に取り組んだのは、ワルト [49] 1934・1936 が最初であった(1)。彼は、固定的な生産係数を持ち、社会全体の需要函数から出発するカッセル型モデルについて厳密な存在証明を与え、さらにある付加的な条件のもとで均衡解の一意性をも証明した。その後、このカッセル型のモデルについては、若干の修正ないし拡張を加えながら、クーン [20] 1956、ドーフマン＝サムエルソン＝ソロー [6] 1958(2)、安井 [53] 1958、福岡＝小山 [8] 1959、カーリン [17] 1959 がより明快な証明を与えた。

ワルトの業績とほとんど同時期に、フォン・ノイマン [48] 1937 は(3)、独自の多数資本財モデルにおける一様な成長均衡の存在を、ブラウワーの不動点定理を拡張することによって証明したが、それと同様の定理である角谷の不動点定理は(4)、マッケンジー [21] 1954 によって、グラムの多数国貿易モデルの存在証明の際に使用された。同じころアロー＝ドブルー [1] 1954 は、ワルラス本来の個別的経済主体の行動を基礎とする生産の一般均衡モデルを初めて取り上げ、基本的に角谷の不動点定理と同様の定理を使用して厳密な存在証明を与えた。これによって、ワルラスの生産（および交換）モデルに対する存在問題は一応の解決を見たのである。このアロー＝ドブルーのモデルは、後に宇沢 [46] 1962 によって簡潔な別証が与えられた。アロー＝ドブルーと同じころ、ゲール [10] 1955、二階堂 [32] 1956 によって、角谷の不動点定理が経済学的に操作しやすい形に変えられ、その所謂「ゲール＝二階堂の定理」は、以後生産の一般均衡モデルの存在証明に直接利用されることとなる。――二階堂＝安井 [55] 1957―8、ドブルー [4] 1959、二階堂 [34] 1959、二階堂 [37] 1962.

ワルラスの原モデルに忠実に正の超過利潤の存在を許さないような長期均衡モデルは、マッケンジー [22] 1959、[23] 1961 によって取り扱われた。そこでは、企業数を一定とするアロー＝ドブルー型のモデルとは異なり、規模に関して収益不変な社会全体の総生産集合が出発点に置かれている。また存在証明の際には、ブラウワーの不動点定理が使用されたが(5)、この定理は後に宇沢 [47] 1962 によって詳しく考察された。同様の方法で宇沢 [44] 1960 は、安定分析のためのモデルにおいて均衡の存在を証明したが、二階堂 [35] 1959、[36] 1963、久我 [19] 1965 は、均衡の安定性を保証する付加的な条件のもとで、不動点定理を使用することなく均衡の存在を証明した。一方、厚生経済学との関連で存在問題を取り上げた根岸 [28] 1960 は、続いて、独占的競争を含むワルラス型生産モデルの定式化と均衡の存在証明とを行ない [29] 1961―2、また最近では、貨幣経済の交換モデルについて存在定理を確立した [31] 1966。このような存在問題の応用に対して、他方ドブルー [5] 1962 は、「準均衡」という概念の導入によって、アロー＝ドブルー型モデルに関する存在定理をより一般化するとともに、これまでの諸結果を整理・統合したのである。

ここにおいて、存在問題の二つの異なる方向への発展が示唆されるであろう。つまり、根岸によって代表されるように、既に確立された存在定理を利用しつつモデル自体を経済的に一層興味深いものへと変形・拡張する方向と、ドブルーによって代表されるように、より厳密かつ高度なテクニックを使って出来るだけ緩い条件を持つ（それ故により一般的な）存在定理を確立する方向とがそれである。前者の方向での最近の発展は、貨幣経済における生産および交換のモデルに関して存在証明を与えたドランダキス [7] 1966 によってなされており、後者の方向での最近の進展は、厳密な意味での「完全競争」に適合した交換モデルを設定することにより、非常に緩い条件のもとで均衡の存在を証明したオーマン [2] 1966 において見られる。なお最後に、存在問題を総括的に取り扱ったものとしては、カーリン [17] 1959、クエンネ [18] 1963 があることを付け加えておこう。

（1）　Wald. A., „Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre,“ *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 7(1934—35) あるいは „Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie“ *Zeitschrift für Nationalökonomie* Vol. 7, No. 5 1936.

（2）　ドーフマン＝サムエルソン＝ソローの存在証明における欠陥は、稲田 [16]、福岡＝小山 [8] によって批判・訂正されている。

（3）　von Neumann. J., „Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes“ *Erge-*

bnisse eines Mathematischen Kolloquiums 8 (1937).

(4) Kakutani. S. "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem" *Duke Mathematical Journal* 8, No. 3, (1941).

(5) Brouwer. L.E.J., „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten" *Mathematische Annalen* Vol. 71 (1911—12).

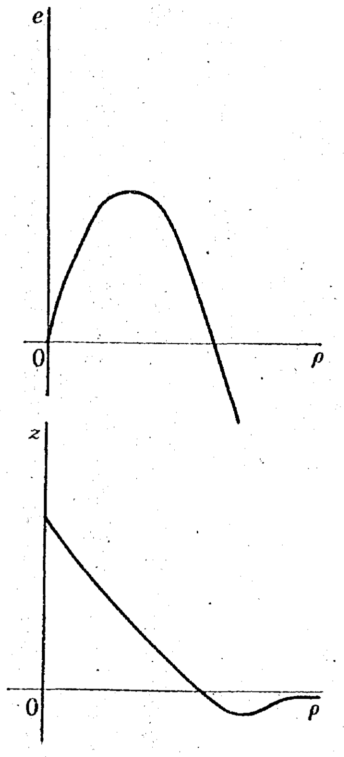
三、「資本形成および信用のモデル」について

三・一　前節でも見た如く、ワルラスの交換および生産のモデルについては、均衡解の存在問題を中心として数多くの研究がなされているのに対して、生産のモデルの貯蓄・投資を含む形への直接の拡張である資本形成および信用のモデルについては、安井 [52] 1955、シュムペーター [41] 1954、クエンネ [18] 1963 の重要な例外を除いては、ほとんど体系的な研究がなされていない。また若干の簡単化と修正を加えたモデルについて、均衡解の存在証明が森嶋 [24] 1960、芳賀 [12] 1964 によって与えられているが、モデルの構造を解明するという意味では、考察を厳密に定常的な経済に限った安井 [54] 1962 の取り扱いの方が成功していると云える。安井 [52] [54] の方向へのモデルの拡張と均衡の存在証明は次節で行なうとして、その前にワルラス自身の定式化に忠実にモデルを考察しておこう。

ワルラスの生産のモデルにおいては、資本財の使用から生じるその用役の価格が決定されるだけであって、資本財それ自体の価格は問題とされていない。さらにまだ貯蓄・投資の概念も利子率の概念も導入されておらず、その意味でそれはまさしく純粋に static なモデルであった。ワルラスの資本形成および信用のモデルにおいては、そのような諸問題と諸概念が正面から取り上げられ、生産のモデルの中に組み込まれている。つまり、そこでは消費財に加えてさらに新しい資本財が生産され、それは（企業家とは区別された意味での）資本家によって需要される。このことは、あるいは土地所有者・労働者・資本家を含む消費者が全体として、その所得を消費財購入および新資本財購入のために支出すると考えることができる。

ただし、ワルラスは現実との対応をより緊密にするために、資本家は新資本財を購入すべく貯蓄した資金を生産者である企業家に貸付け、それによって企業家が直接生産に必要な資本財を購入すると想定している。「現実には……資本家は貯蓄を貨幣で蓄積し、企業家にこの貨幣を貸付け、そして貸付けが満期になると企業家は貨幣を返済する。この操作は信用として知られている。」かくて新資本財に対する需要は生産物を生産する企業家から生じるのであって、貯蓄を生み出す資本家から生じるのではない。[1]」そしていまだ貨幣の導入されていない資本形成および信用のモデルにおいて貨幣資本の役割をはたすのは、具体的な（消費）財であるニュメレール資本であると考えられている。[2]

ワルラスはさらに、新しく生産される資本財の価格は、消費財の価格と同様に長期均衡状態ではその生産費に等しく、純収入（粗収入たる資本財用役の価格から、使用による減耗に対する償却費および事故による損耗に対する保険費を差し引いたもの）の資本財価格に対する比率、つまりワルラスの所謂「純収入率」は、均衡においてすべての資本財について同一となり、しかもその値がニュメレール資本の貸借に関連して定まる利子率に等しいとするのである。つまり、利子率をθ、第h資本財の価格およびその用役価格をそれぞれ P_h および v_h、さらに償却費および保険費が資本財価格の一定割合 μ_h および ν_h とすれば、均衡状態ではすべての h について、



レオン・ワルラスの「資本形成および信用のモデル」について

$$(1)\quad \theta=\frac{v_h-(\mu_h+\nu_h)P_h}{P_h} \quad \text{or} \quad P_h=\frac{v_h}{\theta+\mu_h+\nu_h}$$

が成立つ。

次に、貯蓄の概念について考察しておこう。ワルラスによれば「収入の消費を超過する額」が云わば粗貯蓄の概念に対応し、それは消費財の需要価額を越えて提供される用役の超過価額に等しい。

そして、そのような粗貯蓄額から資本財の償却費および保険費総額を差し引いたものが、云わば純貯蓄に対応している。さらにワルラスは、粗貯蓄額はすべて毎期毎期ニュメレール一単位を提供し続けるような「永久純収入」[3]という想像上の財の購入にあてられると考える。つまり、社会全体の粗貯蓄を e、社会全体の「永久純収入」の需要量を z、さらに利子率 θ の逆数を ρ とすれば、

$$(2)\quad e=\rho\cdot z\left(\equiv\frac{1}{\theta}\cdot z\right)$$

が常に成立する。そして e（したがって z）は ρ について前頁の図のような函数関係にあると想定される。

最後に、資本形成および信用のモデルが描写するところの経済循環を簡単に記述しておこう。ただし、事態の本質を明らかにするために信用の側面を無視する。企業家は与えられた期間内に種々の生産用役を土地所有者・労働者・資本家から購入し、その同じ期間内に消費財および資本財を生産する。他方、生産用役の供給価額は土地所有者・労働者・資本家のその期の収入（所得）を構成し、それがその期に生産された消費財および新資本財に支出されつくす。消費財はその期のうちに消滅してしまうが、新資本財は、期末に減耗して資本家の手もとに戻る旧資本財に加えられ、次の期から企業家に提供される。均衡は、各生産物および各生産用役の需給均等、各生産物の価格・費用均等、新資本財の供給（需要）価額と粗貯蓄額との均等、資本財の純収入率と利子率との均等によって達成される。

三・二　本節で使用される記号を明示しておこう。

m 種類（$i=1, 2, \dots, m$）の消費財　それが生産された期間における消費によって消滅してしまう財。

n 種類（$j=1, 2, \dots, n$）の本源的要素　体系内において再生産不可能な生産要素で、その用役のみが問題とされる（労働、土地等）。

l 種類（$h=1, 2, \dots, l$）の資本財　再生産可能な生産要素で、その用役ばかりでなく新たに生産された部分（新資本財――それは生産された次の期から用役の提供を開始する）およびその期に用役を提供する既存の総資本ストックが問題とされる。

a_{ji}　第 i 消費財1単位を生産するに必要な第 j 本源的要素量

b_{jh}　第 h 資本財1単位を生産するに必要な第 j 本源的要素量

l_{hi}　第 i 消費財1単位を生産するに必要な第 h 資本財の用役量

m_{gh}　第 h 資本財1単位を生産するに必要な第 g 資本財の用役量

$A=[a_{ji}]$　$n\times m$ 次行列

$B=[b_{jh}]$　$n\times l$ 次行列

$L=[l_{hi}]$　$l\times m$ 次行列

$M=[m_{gh}]$　$l\times l$ 次行列

r_j　第 j 本源的要素の供給量

s_h　第 h 資本財用役の供給量

c_i　第 i 消費財の需要量

d_h　第 h 新資本財の需要量

R_j　第 j 本源的要素の供給函数

S_h　第 h 資本財用役の供給函数

C_i　第 i 消費財の需要函数

w_j　第j本源的要素の価格

v_h　第h資本財の用役価格

p_i　第i消費財の価格

P_h　第h新資本財の価格

θ　利子率（$1/\theta \equiv \rho$）

e　粗貯蓄（収入の消費超過額）

z　「永久純収入」の需要量（$z \equiv e/\rho$）

E　粗貯蓄函数

Z　「永久純収入」の需要函数（$Z \equiv E/\rho$）

μ_h　第h資本財の償却率

ν_h　第h資本財の保険率

U_k　その第h対角要素が $1/(\theta+\mu_h+\nu_h)$ の対角行列（$l \times l$ 次行列）

n 次ベクトル（｛　｝は列ベクトル、［　］は行ベクトルを表わす）$r=\{r_{ij}\}$, $R=\{R_{ij}\}$, $w=[w_j]$

m 次ベクトル　$c=\{c_i\}$, $C=\{C_i\}$, $p=[p_i]$

l 次ベクトル　$s=\{s_h\}$, $S=\{S_h\}$, $v=[v_h]$　$d=\{d_h\}$, $P=[P_h]$

三・三　ワルラス自身の定式化による資本形成および信用のモデルは、かくして以下のように表現される。

（3）　$r=R(w\ v\ p\ \rho)$

（4）　$s=S(w\ v\ p\ \rho)$

（5）　$c=C(w\ v\ p\ \rho)$

（6）　$z=Z(w\ v\ p\ \rho)$

（7）　$wr+vs \equiv pc+\rho z$

（8）　$Ac+Bd=r$

（9）　$Lc+Md=s$

（10）　$wA+vL=p$

（11）　$wB+vM=P$

（12）　$Pd=e\ (\equiv \rho z)$

（13）　$P=vU_k$

（3）―（6）はそれぞれ、本源的要素の供給、資本財用役の供給、消費財の需要および「永久純収入」の需要をあらわし、（7）は周知のワルラス法則を、（8）（9）および（10）（11）はそれぞれ、生産用役の需給均等および生産物の価格費用均等の条件をあらわしている。（12）は新資本財の需要（および供給）価額と粗貯蓄との均等、つまり粗投資イコール粗貯蓄の条件をあらわし、（13）は（1）で見たように、すべての資本財の純収入率が一致して利子率に等しいという条件を示している。

三・四　ワルラスは周知の如く、第一番目の消費財をニュメレールとしてその価格を恒等的に1に等しいと置き、またワルラス法則を使用することによってニュメレール財の需要方程式を消去する。さらに（8）から（11）までのうちの一本の方程

式は他の式から導かれるために、結局独立な方程式の数と未知数の数とが相等しくなり、この体系は一義的に解かれると結論するのである。(4)

そのようなワルラスの方法が、必ずしも存在問題を正しく解くことにはならないという批判をここでくり返すことは避け、最後に、資本形成および信用のモデルに対して初めて適切な存在証明を与えた森嶋 [24] [27] による若干の修正について述べておこう。彼は(8)から(12)までに現われる新資本財の需要量(d)を、すべてその供給量ないし生産量に置き換え、さらに体系を不等式化することによって、均衡のもとで何らかの財の超過供給が生じる可能性を考慮するとともに、そのような自由財については常に価格がゼロとなり、また均衡において生産費が生産物価格を超過しうるとともに、そのような財は少しも生産されないとする。ただその場合、新資本財の需要の側がまったく体系から消えてしまい、新資本財の生産量が恒等的にその需要量に等しいと考えねばならなくなるということに注意すべきである。そのようなモデルについて森嶋は、需給函数の連続性と同次性、労働が不可欠の要素であること、ワルラスが明示的になした粗貯蓄函数の性質等々の仮定のもとで、厳密な均衡解の存在証明を与えるのである。

(1) Walras [50] p. 270. ただし、ワルラスは続けて「明らかに理論的観点よりすれば、資本家にとってまた企業家にとって、一方が貸し付け他方が借り入れるものが、新あるいは旧資本財それ自体であろうと、貨幣形態におけるこの資本財の価格であろうとどうでもよいことである。」と述べており、定式化されたモデル自体も、資本家が直接に新資本財を需要すると解釈することが可能である。

(2) ワルラスは周知の如く、収支均等式を使ってニュメレール財の需要方程式をはじめから消去しており、したがってニュメレールの貸借がなされず、ニュメレール財の需要方程式が他の消費財と同様の形で表現できるとすることも可能である。本節以下で再定式化されるワルラスモデルはそのような解釈に基づいている。

(3) 「永久純収入」という概念およびその批判については、Drandakis [7] 1966 および Floss, L. [9] 1957 を参照。ここでは単にその需要量が、$z \equiv e/p$ と定義されるものと考えておこう。

(4) ワルラスは後に、生産諸係数を可変的なものとして取り扱っているが、本稿におけるモデルでは簡単化のためにそれらを与えられた定数として取り扱う。この種のモデルにおける生産係数の可変性については森嶋 [26] 1964 を参照。

四、モデルの再定式化と定常均衡の存在

四・一 ワルラス以後、資本形成および信用のモデルの内容に対していくつかの批判点ないし問題点が提出されたが、結局それらは次の三つにまとめることができると思われる。第一に、生産物の生産期間および資本財の耐久期間という資本の理論にとって本質的とも思われる時間的要素の概念が欠如しているとの批判、(1) 第二に、新資本財の生産および粗貯蓄の概念に関連してワルラスモデルがどのような（発展的、定常的あるいは衰退的）経済の状態を描写していると考えるのが最も適当かという問題、(2) 第三に、新資本財の需要量ないし生産量を規定している要因についての考察が不十分であるとの批判がそれである。(3) これらの問題点については、その後にワルラスモデルの存在証明を行なった森嶋 [24] 芳賀 [12] においても何ら適切な解答が与えられていない。これに対して安井は、ワルラスモデルを厳密に定常的な経済均衡モデルと解釈し、一方では([52]) ボエーム・バヴェルク＝グスタフ・オッカーマン＝クヌート・ヴィクセルの定式化に従って生産期間および耐久期間の概念をワルラスモデルに導入するとともに、他方では([54]) 新資本財の生産量が経済を定常的な状態たらしめるに丁度十分な値に等しいと考えることによって、前述の三つの問題に一応の答を与えている。

本節においては、安井によって修正されたワルラスの定常経済モデルを中心に存在問題を取り扱う。以下で想定される厳密に定常的な（云わば単純再生産の）経済においては、毎期毎期まったく同一規模の生産が行なわれるから、均衡においてはあたかも単一の生産過程におけるすべての時間的に異なる生産諸段階が同時に実現しているかの如く、異なる生産諸過程が並存することになる。つまり、定常状態を前提とする限り、生産期間内の時間的に異なる生産諸段階が、時間的に同一で空間的にのみ異なる過程として実現すると見ることができる。さらに定常経済において、新資本財の生産量は、その経済にお

ける単位期間あたりの資本財の減耗ないし磨滅分に等しいと考えられるであろう。

四・二　先ず、生産期間については次のように考える。任意の第i消費財および第h資本財の生産に要する期間を――今期（第0期）をも含めて――それぞれT^0_iおよびT_h、これらの財を一単位生産するために各単位期間に投入される第j本源的要素および第g資本財用役量をそれぞれ一定の数a_{ji}、b_{jh}およびl_{gi}、m_{gh}であるとしよう。つまり生産期間を通じて毎期一様な要素投入が行なわれると仮定される。また前節三・二と同様に、単位期間あたりの利子率をθ、本源的要素および資本財用役の価格をそれぞれw_jおよびv_gとすれば、第i消費財および第h資本財の生産費はそれぞれ(4)

(14)　$$\sum_{t=0}^{\mathrm{T}^0_i-1}\left(\sum_{j=1}^{n}w_j a_{ji}+\sum_{g=1}^{l}v_g l_{gi}\right)(1+\theta)^t$$

および

(15)　$$\sum_{t=0}^{\mathrm{T}_h-1}\left(\sum_{j=1}^{n}w_j b_{jh}+\sum_{g=1}^{l}v_g m_{gh}\right)(1+\theta)^t$$

となる。ただし、生産用役の価格および利子率は定常的であると予想されており、また生産用役に対する支払いは期末になされると仮定されている。ここで$\theta>0$ならば、上式はそれぞれ、

(16)　$$\left(\sum_{j=1}^{n}w_j a_{ji}+\sum_{g=1}^{l}v_g l_{gi}\right)\frac{(1+\theta)^{\mathrm{T}^0_i}-1}{\theta}$$

および

(17)　$$\left(\sum_{j=1}^{n}w_j b_{jh}+\sum_{g=1}^{l}v_g m_{gh}\right)\frac{(1+\theta)^{\mathrm{T}_h}-1}{\theta}$$

と表わすことができる。

このとき、定常均衡の状態においては、消費財生産および資本財生産に際して企業家の獲得する資本利潤（利子）額はそれぞれ、

(18)　$$\sum_{i=1}^{m}p_i c_i-\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}w_j a_{ji}+\sum_{g=1}^{l}v_g l_{gi}\right)\mathrm{T}^0_i c_i$$

および

(19)　$$\sum_{h=1}^{l}\mathrm{P}_h x_h-\sum_{h=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{n}w_j b_{jh}+\sum_{g=1}^{l}v_g m_{gh}\right)\mathrm{T}_h x_h$$

となる。ただし、x_hは第h新資本財の生産量を表わし、c_i、p_iおよびP_hは前節と同様にそれぞれ、第i消費財の需要量、第i消費財の価格および第h資本財の価格を表わす。

ここで、第i消費財および第h資本財を一単位生産するのに生産期間全体を通じて必要な第j本源的要素・第g資本財用役の総量がそれぞれ、

(20)　$a_{ji}\mathrm{T}^0_i$・$l_{gi}\mathrm{T}^0_i$および$b_{jh}\mathrm{T}_h$・$m_{gh}\mathrm{T}_h$

で表わされることに注意しよう。

四・三　次に、資本財の耐久期間については次のように考える。ここでは資本財が有限かつ正の長さの耐久期間を持ち、その期間内では少しも減耗・損失等をこうむらないで一様にその性能を発揮し続けると想定される。そのとき新しく生産された資本財の現在の価格は、次期以降の耐久期間にわたってその資本財が提供する用役の価格の現在価値総額に等しくなるであろう。すなわち、すべてのhについて、(5)

(21)　$$\mathrm{P}_h=\sum_{t=1}^{\mathrm{N}_h}\frac{v_h}{(1+\theta)^t}$$

となる。ただし、N_hは第h資本財の次期から数えた——そして生産期間を測るのと同じ長さの単位期間で測られた——耐久期間である。ここで $\theta > 0$ ならば（21）は

(22)　$$P_h = v_h \frac{1-(1+\theta)^{-N_h}}{\theta}$$

と書くことができる。

このような定式化とワルラス自身のそれとの関係を見るために、（22）を変形して、

(23)　$$\frac{v_h}{P_h} = \frac{\theta}{1-(1+\theta)^{-N_h}} = \theta + \frac{\theta(1+\theta)^{-N_h}}{1-(1+\theta)^{-N_h}}$$

つまり

(24)　$$\theta = \frac{v_h - \lambda(\theta N_h)P_h}{P_h}$$　ただし　$$\lambda(\theta N_h) = \frac{\theta(1+\theta)^{-N_h}}{1-(1+\theta)^{-N_h}}$$

とすれば、これとワルラスの利子率＝純収入率均等式（1）との形式的類似性は明らかであろう。それらの内容的類似性も次のように示すことができる。ここでは資本財が未来永劫にわたって不滅不変の能力を維持するために必要な費用——それがワルラスの償却費プラス保険費 $(\mu_h+\nu_h)P_h$ にほかならない——とは資本財が丁度その寿命を全うするときに、それと同じ資本財を一単位生ぜしめるに足る費用であるから、資本財の用役価格より毎期毎期差し引かれて積み立てられた額が、その資本財の耐久期間の最終期において同じ資本財一単位の生産費（価格）に等しくなっていなければならない。かくて、毎期一定額αが積み立てられるとして、今期においてこの関係を見るならば、

(25)　$$\sum_{t=1}^{N_h} \frac{\alpha}{(1+\theta)^t} = P_h(1+\theta)^{-N_h}$$

つまり

(26)　$$\alpha = \frac{\theta(1+\theta)^{-N_h}}{1-(1+\theta)^{-N_h}} P_h = \lambda(\theta N_h)P_h$$

となる。したがってここでの $\lambda(\theta N_h)P_h$ がワルラスにおける償却費プラス保険費 $(\mu_h+\nu_h)P_h$ の内容に対応していることがわかる。つまりワルラスは（狭義の）資本財が土地と異なって「破壊され消滅する」財であることを認め、その用役価格とそれから償却費・保険費を差し引いた残りの純収入とを区別するのであるが、しかし彼は資本の持つ有限の耐久期間そのものを明示的に考慮しないが故に、償却費および保険費が資本財の価格ばかりでなく耐久期間と利子率にも依存していることを見ていない。実は、彼が一定として与えた償却率および保険率は、もしも耐久期間が与えられるならば均衡利子率とともに体系内で決定されるべきものになるのである。

最後に、新資本財の生産量について考察しておこう。定常経済均衡においては、既存の資本財ストックのうち今期末にその寿命が尽きてしまう部分を丁度補填するに足る量だけ新たな資本財を生産すればよいと考えられるであろう。ところが定常状態においては、既存の資本財ストックが、建設されてから一期目のものよりその耐久期間の最終期目のものまで一様に同量ずつ分布していると考えられるから、今期に生産さるべき新資本財の量はその財の既存の総ストック量をその財の耐久期間で除した値に等しいことになる。つまり、第h新資本財の生産量を x_h、その財の既存の総ストック量を y_h およびその財の耐久期間を N_h とすれば、(6)

(27)　$$x_h = y_h / N_h$$

となる。ただし耐久期間は正の整数で与えられるとする。

四・四　ここで、以上の諸点を新たに考慮しつつ、ワルラスの資本形成および信用のモデルを定常経済均衡モデルとして

再定式化するとともに、適当な仮定のもとで、そのモデルが経済的に意味のある定常均衡解を持つことをも証明するであろう。そのためにまず、前節三・二で定義された記号と異なるものおよび新たな記号を示しておくことにしよう。

x_h　第h新資本財の生産量

y_h　第h資本財の総ストック量

$x=\{x_h\}$　l次列ベクトル

$y=\{y_h\}$　l次列ベクトル

T^0_i　第i消費財の生産期間

T_h　第h資本財の生産期間

N_h　第h資本財の耐久期間

T^0　T^0_iをその対角要素とするm次対角行列

T　T_hをその対角要素とするl次対角行列

N　N_hをその対角要素とするl次対角行列

Λ°　$\dfrac{(1+\theta)^{T^0_i}-1}{\theta}$ をその対角要素とするm次対角行列

Λ　$\dfrac{(1+\theta)^{T_h}-1}{\theta}$ をその対角要素とするl次対角行列

U_N　$1-(1+\theta)^{-N_h}$ をその対角要素とするl次対角行列

a_{ji}、b_{jh}、l_{hi}、m_{gh} はすべて単位（生産）期間あたりに必要な生産用役量をあらわす生産係数

かくて資本形成および信用の定常経済モデルは次のように書かれる。

(28)　$r=R(w\ v\ p\ P\ \rho\ y)$

(29)　$s=S(w\ v\ p\ P\ \rho\ y)$

(30)　$c=C(w\ v\ p\ P\ \rho\ y)$

(31)　$z=Z(w\ v\ p\ P\ \rho\ y)$

(32)　$pc+\rho z\equiv wr+vs+(pc-wAT^\circ c-vLT^\circ c)+(Px-wBTx-vMTx)$

(33)　$AT^\circ c+BTx\leqq r$

(34)　$LT^\circ c+MTx\leqq s$

(35)　$(wA+vL)\Lambda^\circ\geqq p$

(36)　$(wB+vM)\Lambda\geqq P$

(37)　$Px=\rho z$

(38)　$P=\rho vU_N$

(39)　$x=N^{-1}y$

(40)　$w(AT^\circ c+BTx-r)=0$

(41)　$v(LT^\circ c+MTx-s)=0$

(42)　$(wA\Lambda^\circ+vL\Lambda^\circ-p)c=0$

(43)　$(wB\Lambda+vM\Lambda-P)x=0$

(44)　$pc>0$　$wr>0$　$vs>0$　$Px>0$

(45)　$pc-wAT^\circ c-vLT^\circ c\geqq 0$,　$Px-wBTx-vMTx\geqq 0$

(28)—(31) の需給函数がワルラス自身の定式化である (3)—(6) と異なる点は、それらが w、v、p、ρ ばかりでなく、Pおよび y にも依存するように一般化されていることである。[7] (32) のワルラス法則の収入側に企業家の資本利潤額が加わっているのは、利潤が何らかのし方で消費者にすべて分配されると仮定することが適切であると考えられるからである。[8] (33)—(36) は前節での (8)—(11) と異なり、不等式を含む広義の均衡条件式となっている。[9] (38) は (22) に、また (39) は (27) に対応している。(40) (41) の自由財の価格はゼロであるという条件および (42) (43) の不利な生産物の生産量がゼロであるという条件は、(33)—(36) の不等式化から当然必要となるものである。(44) (45) は、モデルが無意味なあるいはトリヴィアルな形にならないために必要とされる。

四・五　この定常経済モデルについて均衡解の存在を証明するために次の仮定を置く。

仮定1a　A、B、LおよびMは所与の非負行列である。また生産期間 T^0_i $(i=1, 2, \ldots, m)$、T_h $(h=1, 2, \ldots, l)$ および耐久期間 N_h $(h=1, 2, \ldots, l)$ はある正の整数として与えられている。

1b　第 τ 本源的要素（労働）は任意の財の生産に不可欠な要素である。つまり

$a_{\tau i}>0$ $(i=1,2,\ldots,m)$、$b_{\tau h}>0$ $(h=1, 2, \ldots, l)$

1c　第 δ 番目の（基本的）消費財を生産するのに少なくとも一種類の資本財用役が必要である。つまりある h に対して $l_{h\delta}>0$

仮定2a　需給函数R、SおよびCは $(w\ v\ p)\geqq0$ および $(\mathrm{P}\ \rho\ y)\geqq0$ となるような w、v、p、P、ρ および y について非負の一価連続函数である。

2b　$(w\ v)\geqq0$ となるような任意の非負の w、v、p、P、ρ および y に対して、少なくともcの第 δ 成分（基本的消費財）c_δ は正である。

2c　任意の生産用役はその価格がゼロならば供給されることはない。つまり $w_j=0$ ならば $r_j=0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ および $v_h=0$ ならば $s_h=0$ $(h=1, 2, \ldots, l)$

2d　資本財ストック量がゼロならば、その資本財用役の供給量はゼロである。[10] つまり $y_h=0$ ならば、$s_h=0$ $(h=1, 2, \ldots, l)$

2e　第 τ 本源的要素（労働）の供給量は有界である。

仮定3a　Zは $(w\ v\ p)\geqq0$ および $(\mathrm{P}\ \rho\ y)\geqq0$ となるような w、v、p、P、ρ および y について一価連続函数である。

3b　利子率がある小さな正数（その値を $\bar\theta$ としよう）よりも大きくないならば、「永久純収入」の需要量は非正である。つまり $\bar\rho=1/\bar\theta$ として $\rho\geqq\bar\rho$ ならば $z\leqq0$ となる。

3c　利子率が正の無限大（無限遠点）において「永久純収入」の需要量は正である。つまり $\rho=0$ ならば $z>0$ となる。

仮定4a　R、SおよびCは $(\rho\ y)\geqq0$ が任意に与えられるとき、w、v、p およびPについて正の零次同次函数である。

4b　Zは $(\rho\ y)\geqq0$ が任意に与えられるとき、w、v、p およびPについて正の一次同次函数である。

このとき、次の存在定理が成立する。

存在定理一　仮定1—4を満たす体系 (28)—(45) には、非負解 w^*、v^*、p^*、P^*、ρ^*、r^*、s^*、c^*、z^*、x^* および y^* が存在して、そこではさらに、

(46)　$AT^0c^*+BTx^*=r^*$

(47)　$LT^0c^* + MTx^* = s^*$

(48)　$(w^*A + v^*L)\Lambda^{0*} = p^*$

(49)　$(w^*B + v^*M)\Lambda^* \geqq P^*$　$(\lessdot P^*)$

(50)　$(w^*B + v^*M)\Lambda^* x^* = P^* x^* > 0$

となる。ただし Λ^{0*} および Λ^* はそれぞれ ρ^* に対応する Λ^0 および Λ を示している。

四・六　存在定理一を証明しよう。(1)　まず次のように定義する。

B_τ　Bの第 τ 行より成る l 次行ベクトル

$\bar{r}_\tau$　r_τ の上限（その存在は仮定2eにより保証される）より大きなある正数

$\Delta = \{y \mid y \geqq 0,\ B_\tau TN^{-1}y \leqq \bar{r}_\tau\}$　これは仮定1aおよび1bより明らかに凸コンパクト

$\Gamma = \{(w\ v\ \rho) \mid w \geqq 0\ v \geqq 0\ \Sigma_j w_j + \Sigma_h v_h = 1\ \bar{\rho} \geqq \rho \geqq 0\}$　ただし $\bar{\rho}$ は仮定3bで定義される。

$\Omega = \Gamma \times \Delta$　Γ および Δ が凸コンパクトであるから、それらの直積集合である Ω も凸コンパクト

t_n　そのすべての成分が1であるような n 次列ベクトル

t_l　そのすべての成分が1であるような l 次列ベクトル

次のような線型計画の双対問題を考えよう。

Maximize

(51)　$u_1 - u_2 - u_3\bar{\rho}$

subject to

(52)　$$\begin{pmatrix} BTN^{-1} & t_n & -t_n & 0 \\ MTN^{-1} - \rho U_N \Lambda^{-1} TN^{-1} & t_l & -t_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} r - AT^0c \\ s - LT^0c - \rho U_N \Lambda^{-1} TN^{-1} y \\ -z + vU_N N^{-1} y \end{pmatrix}$$

(53)　$y \geqq 0,\ u_1 \geqq 0,\ u_2 \geqq 0,\ u_3 \geqq 0$

Minimize

(54)　$wr - wAT^0c + vs - vLT^0c - \rho vU_N \Lambda^{-1} TN^{-1} y - \rho z + \rho vU_N N^{-1} y$

subject to

(55)　$$[w\ v\ \rho] \begin{pmatrix} BTN^{-1} & t_n & -t_n & 0 \\ MTN^{-1} - \rho U_N \Lambda^{-1} TN^{-1} & t_l & -t_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \geqq [0\ 1\ -1\ -\bar{\rho}]$$

(56)　$w \geqq 0,\ v \geqq 0,\ \rho \geqq 0$

いま任意の $(w\ v\ \rho) \in \Gamma$ に対応する $(wA + vL)\Lambda^0 = p$ および $P = \rho vU_N$ より定まる $(p\ P) = f(w\ v\ \rho)$ の写像は一価連続であるから、仮定2aおよび3aより、

(57)　$r = R(w\ v\ f(w\ v\ \rho)\ \rho\ y)$

(58)　$s = S(w\ v\ f(w\ v\ \rho)\ \rho\ y)$

(59)　$c = C(w\ v\ f(w\ v\ \rho)\ \rho\ y)$

(60)　$z = Z(w\ v\ f(w\ v\ \rho)\ \rho\ y)$

はそれぞれ w、v、ρ および y について一価連続になる。かくて任意の $(w\ v\ \rho\ y) \in \Omega$ に対応して、一価として双対問題の

制約式（52）および（55）が定まる。双対問題（51）―（56）において、明らかに双方に実現可能解が存在するから、おのおのの $(w\,v\,\rho\,y)\in\Omega$ について、通常の線型計画の定理[12]を使用して最大解および最小解の存在を示すことができる。

ここで $\mathrm{F}(w\,v\,\rho\,y)$ および $\Phi(w\,v\,\rho\,y)$ をそれぞれ、$(w\,v\,\rho\,y)\in\Omega$ に対応した（54）―（56）の実現可能解 $(w\,v\,\rho)$ および最小解 $(w\,v\,\rho)$ の集合であると定義しよう。すると芳賀＝大槻［14］Appendix: Theorem A1, A2 によって[13]、写像 $\mathrm{F}:(w\,v\,\rho\,y)\in\Omega\to\mathrm{F}(w\,v\,\rho\,y)\in\Gamma$ は Ω 上で連続であり、さらに写像 $\Phi:(w\,v\,\rho\,y)\in\Omega\to\Phi(w\,v\,\rho\,y)\in\Gamma$ は上半連続となることが証明される。また明らかに像 $\mathrm{F}(w\,v\,\rho\,y)$ および $\Phi(w\,v\,\rho\,y)$ は Γ の空でない凸コンパクトな部分集合である。

次に、$\hat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ を同様に $(w\,v\,\rho\,y)\in\Omega$ に対応した（51）―（53）の最大解 $(y\,u_1u_2u_3)$ の集合であるとし、$\hat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)=\{y|(y\,u_1u_2u_3)\in\hat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)\}$ と定義しよう。このとき像 $\hat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ が必ずしも Δ に属すとは限らない。したがってその像が必ず凸コンパクト集合 Δ に属すように、新しい写像 $\tilde{\Psi}$ を次のように定義する。写像 $\tilde{\Psi}$ は、$\tilde{\Delta}=\{y|y\geqq 0\ \mathrm{B}_i\mathrm{TN}^{-1}y\leqq\tilde{r}_i\}$ として、もしも $\hat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)\in\tilde{\Delta}$ ならば、そのような $(w\,v\,\rho\,y)$ について $\tilde{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ は $\hat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ に一致し、もしも $\hat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)\notin\tilde{\Delta}$ ならば、そのような $(w\,v\,\rho\,y)$ について $\tilde{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ は Δ 全体に一致するというようなものである。このように定義しなおされた写像 $\tilde{\Psi}:(w\,v\,\rho\,y)\in\Omega\to\tilde{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)\in\Delta$ は写像 Φ と同様に上半連続であり、その像は Δ の空でない凸コンパクトな部分集合である。

いま直積写像 $\Phi\times\tilde{\Psi}$ をつくると、この写像はコンパクトな凸集合 Ω からそれ自身への上半連続な写像であり、その像は Ω の空でない凸部分集合である。[14] ゆえに角谷の不動点定理[15]より、不動点 $(w^*v^*\rho^*y^*)\in\Omega$ が存在する。すなわち、$(w^*v^*\rho^*)\in\Phi(w^*v^*\rho^*y^*)$ および $y^*\in\tilde{\Psi}(w^*v^*\rho^*y^*)$ である。

ここで不動点 y^* が、事実、（52）における最大解の一つであることを証明しよう。いま $(w^*v^*\rho^*y^*)$ に対応して、（57）―（60）より決まる r、s、c および z をそれぞれ r^*、s^*、c^* および z^* とする。また ρ^* に対応する Λ および $\mathrm{U_N}$ をそれぞれ Λ^* および $\mathrm{U_N}^*$ とすれば、不動点 $(w^*v^*\rho^*y^*)$ に対応した（51）―（53）の任意の最大解 $(\hat{y}\,\hat{u}_1\hat{u}_2\hat{u}_3)$ は次の関係を満たすことが、双対性定理より知られる。[16]

（61）　$w^*r^*-w^*\mathrm{AT}^0c^*+v^*s^*-v^*\mathrm{LT}^0c^*-\rho^*v^*\mathrm{U_N}^*\Lambda^{*-1}\mathrm{TN}^{-1}y^*-\rho^*z^*+\rho^*v^*\mathrm{U_N}^*\mathrm{N}^{-1}y^*=\hat{u}_1-\hat{u}_2-\hat{u}_3\bar{\rho}$

線型計画の周知の定理より、（52）および（55）から $(w^*\mathrm{BT}+v^*\mathrm{MT}-\rho^*v^*\mathrm{U_N}^*\Lambda^{*-1}\mathrm{T})\mathrm{N}^{-1}y^*=0$ となるので、$\mathrm{P}^*-\rho^*v^*\mathrm{U_N}^*$ を考慮すれば、（61）の左辺は $w^*r^*+v^*s^*-p^*c^*-\rho^*z^*+(p^*c^*-w^*\mathrm{AT}^0c^*-v^*\mathrm{LT}^0c^*)+(\mathrm{P}^*\mathrm{N}^{-1}y^*-w^*\mathrm{BTN}^{-1}y^*-v^*\mathrm{MTN}^{-1}y^*)$ に等しくなるが、これは $x^*=\mathrm{N}^{-1}y^*$ を考慮すれば、ワルラス法則（32）によってゼロに等しい。かくて $0=\hat{u}_1-\hat{u}_2-\hat{u}_3\bar{\rho}$ を得る。ここで $\hat{u}_3=0$ を証明する。$\rho^*=\bar{\rho}>0$ の場合には、双対性定理より $-\hat{u}_3=-z^*+v^*\mathrm{U_N}^*\mathrm{N}^{-1}y^*$ が成立する。このとき、仮定3bより $z^*\leqq 0$ だから、（53）の $\hat{u}_3\geqq 0$ を考慮すれば、$\hat{u}_3=0$ を得る。また $0\leqq\rho<\bar{\rho}$ の場合には、双対性定理より直接に $\hat{u}_3=0$ となる。かくていずれの場合にも $\hat{u}_1-\hat{u}_2=0$ となるから、（52）より不動点に対応する任意の最大解 $\hat{y}$ は $\mathrm{B}_i\mathrm{TN}^{-1}\hat{y}\leqq\tilde{r}_i$ となって $\tilde{\Delta}$ に属する。それゆえ不動点においては、$\tilde{\Psi}(w^*v^*\rho^*y^*)=\hat{\Psi}(w^*v^*\rho^*y^*)$ となり、y^* は最大解の一つであることがわかる。

ここで仮定1bおよび2bより、$a_{ri}>0$, $c_i>0$ だから $\Sigma_i a_{ri}\mathrm{T}_i^0c_i^*+\Sigma_h b_{rh}\mathrm{T}_h\mathrm{N}_h^{-1}y_h^*>0$ が成立する。いま $w_r^*=0$ と想定すれば、仮定2cにより、$r_r^*=0$ となるが、上の不等式を考慮すれば、これは（52）の不等号の向きに矛盾する。かくて $w_r^*>0$ がわかった。次に $\rho^*>0$ を示そう。$\rho^*=0$ と想定すれば $\Lambda^*=\mathrm{I}$（単位行列）となり、$w_r^*>0$, $b_{rh}>0$ であるから、$(w^*\mathrm{B}+v^*\mathrm{M})\Lambda^*>\rho^*v^*\mathrm{U_N}^*=\mathrm{P}^*=0$ となる。かくして $\mathrm{N}^{-1}y^*=0$ であり、（52）および（55）より $0\leqq -z^*$ となるが、仮定3cにより $z^*>0$ だから矛盾である。よって $\rho^*>0$ が示された。かくして $v^*\mathrm{U_N}^*\mathrm{N}^{-1}y^*=z^*$ より、$\mathrm{P}^*\mathrm{N}^{-1}y^*=\mathrm{P}^*x^*=\rho^*z^*$ を得る。これで（28）―（43）および（48）が満たされたことになる。

定理の（46）（47）を証明しよう。もしも $\mathrm{AT}^0c^*+\mathrm{BTN}^{-1}y^*\leqq r^*$, $\mathrm{LT}^0c^*+\mathrm{MTN}^{-1}y^*\leqq s^*$ のある行が厳密に不等式で成立するならば、それに対応して $w_r^*=0$, $v_r^*=0$ となる。このとき仮定2cにより、$r_r^*=0$, $s_r^*=0$ だから、その行について厳

密な等号が成立せざるをえなくなり矛盾である。かくて(33)(34)のすべての行は厳密に等号で成立し、定理の(46)(47)が満たされる。

(44)の不等式は次のようにして証明される。まず $w_r^*r_r^*>0$ は $w_r^*>0$ および $r_r^*>0$ (これは $\Sigma a_{rt}T^0_{ct}c_t^*>0$ からえられる)より出てくる。$v^*s^*>0$ については、仮定2bより $c_s^*>0$ だから、仮定1cにより $l_{hs}>0$ となるようなあるhにたいして $s_h^*>0$ である。これは仮定2cにより、そのhに対して $v_h^*>0$ を意味し、かくて $v^*s^*>0$ が得られる。$p^*c^*>0$ は、$(w^*A+v^*L)\Lambda^{0*}=p^*>0$ ($w_r^*>0$, $a_{rt}>0$ だから) および $c_s^*>0$ からただちに出てくる。$P^*x^*>0$ は次のように証明される。ある($l_{hs}>0$ となるような) hに対して $s_h^*>0$ だから、仮定2dよりそのhに対して $y_h^*>0$、したがってそのhに対する(36)の行は厳密に等号で成立し、しかも $w_r^*>0$, $b_{rh}>0$ であるから、そのhについて $P_h^*>0$ となる。かくて $P^*x^*=P^*N^{-1}y^*>0$ である。以上で(44)および定理の(49)が満たされることが明らかになった。また $\rho^*z^*>0$, $z^*>0$ および $0<\rho^*<\rho$ となることもわかった。

最後に(45)は、$t\geqq 1$, $\theta>0$ に対して $(1+\theta)^t\geqq 1+t\theta$ つまり $\frac{(1+\theta)^t-1}{\theta}\geqq t$ したがって、$\Lambda^0\geqq T^0$, $\Lambda\geqq T$ となるから、これと(42)(43) $p^*c^*-w^*A\Lambda^{0*}c^*-v^*L\Lambda^{0*}c^*=0$, $P^*x^*-w^*B\Lambda^*x^*-v^*M\Lambda^*x^*=0$ とから出てくる。ただし T_i^0, $T_h\geqq 2$ ならば、$\Lambda^0>T^0$, $\Lambda>T$ となるから、$p^*c^*=w^*A\Lambda^{0*}c^*+v^*L\Lambda^{0*}c^*>0$, $P^*x^*=wB\Lambda^*x^*+v^*M\Lambda^*x^*>0$ を考慮すれば、(45)において厳密な不等式が成立し、

(62)　$p^*c^*-w^*AT^0c^*-v^*LT^0c^*>0$, $P^*x^*-w^*BT^*x^*-v^*MT^*x^*>0$ となることに注意しよう。(存在定理一の証明終り)

四・七　以上の存在証明によって明らかにされたモデルの構造について、最後に若干述べておこう。需給函数の連続性およびそれらの形状にたいする仮定が基本的に重要であることは云うまでもないが、消費財のうちの少なくとも一つ(基本的消費財)の需要量が正であることが体系を経済的に有意味たらしめているのである。つまり、モデルの諸仮定によって、そのような消費財を正の量生産するのに少なくとも一つの資本財用役および一つの本源的要素(労働)が必要となり、さらにそれらの用役価格は厳密に正となる。また、そのような資本財用役の供給がプラスであるためにその資本財のストック量はプラスであることになり、したがってその財の(補塡のために必要な)新たな生産量もプラスとなる。このとき、資本財の総ストック量は、毎期のその補塡量を新たに生産するに必要となる労働総量が体系内で供給可能である限度以下になるように決定される。

ここで、均衡においてある新資本財の価格がその生産費を下まわるならば、その財の生産量がゼロであるとともに、その財の総ストック量もゼロとなる($x^*=N^{-1}y^*$ だから)ことに注意しよう。すなわち、このモデルの均衡が資本ストックの水準をも変数として含むような長期定常均衡と解釈されるべきであり、ある新資本財が生産されなければ、時間とともに既存のその資本財ストックは寿命が尽きたものより順番に消滅して行くから、結局そのような資本財についてはその財のストック量自体がゼロである状態が長期定常均衡であると考えられるのである。また、生産期間が一期間(つまり今期のみ)である場合には、生産過程から生じる企業家の資本利潤はゼロであるのに対して、生産期間が二期間以上でかつ利子率が正の場合には、それが正であることは定理の証明の最後で示したとおりである。

(1)　これはオーストリー学派および北欧学派による批判として知られている。特にヴィクセルは「生産における時間要素の重要性はワルラスと彼の学派によって正しく評価されなかった。生産期間あるいは資本投資期間の概念は……ワルラス・パレートの理論のうちに存しない。」([51] p. 171) と述べており、また資本財の耐久期間を明示的に考慮してその決定を論じるために、オッカーマンの資本理論モデルを取り上げている。([51] p. 274—99) また安井 [52] も参照。

(2)　ヴィクセル [51] p. 226-7. 安井 [52] p. 19-20 参照。ただし、両者ともにワルラスモデルが定常状態を描写しているとするのが最も適当であると考えているようである。

（3）フロス [9] p. 65-9 参照。
（4）安井 [52] p. 73 参照。
（5）ヴィクセル [51] p. 275, 安井 [52] p. 74 参照。
（6）安井 [54] p. 236 参照。
（7）Pの導入は芳賀 [12] によって、また、y の導入は森嶋 [24] [27]、安井 [54] によってなされた。
（8）ワルラス法則への利潤所得（右辺第三項以下）の導入は、これまで何人によっても正しくなされていない。安井 [52] は利潤所得を $p(\mathrm{I}-A^{0-1}\mathrm{T}^{0})c+\mathrm{P}(\mathrm{I}-A^{-1}\mathrm{T})x$ としているが、これは（42）と（43）が成立するときには（32）の右辺第三項以下と等値になるけれども、恒等式であるワルラス法則に使用するのは誤まりであろう。
（9）すべての財の生産期間が1に等しい（今期のみ）ならば、$\mathrm{T}^{0}=\mathrm{T}=A^{0}=A=\mathrm{I}$（単位ベクトル）となって（33）―（36）は森嶋、芳賀、安井と同様の形になることに注意しよう。
（10）これまでは、森嶋 [24] [27] 芳賀 [12] におけるように資本財ストック y を所与とするか、あるいは安井 [54] におけるように単純化のため $y \equiv s$ とするかのどちらかであった。
（11）以下の証明は基本的に芳賀 [12] 芳賀＝大槻 [14] の方法に従う。
（12）例えば、ゴールドマン・タッカー [11] p. 16 定理2参照。
（13）芳賀＝大槻 [14] Appendix 参照。そこでの定理の主張だけを、参考のために記しておこう。ただし記号はすべて本文と独立である。

Xはユークリッド空間内の集合、$b(x)$, $c(x)$, $\mathrm{H}(x)$ はそれぞれ、m 次元列ベクトル、n 次元行ベクトル、$m \times n$ 次行列、そしてそれらすべての要素は、X上で定義された一価連続函数であるとしよう。d およびKはそれぞれ r 次元列ベクトルおよび $r \times n$ 次行列であり、その要素はすべて一定の実数であるとしよう。次のような線型計画問題を考える。

Maximize $c(x)y$, subject to

$\mathrm{H}(x)y \leqq b(x)$ and $\mathrm{K}y \leqq d$

つまり、Xに属する任意の x に対して右のような n 次元列ベクトル y を見いだす問題である。

$\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{G}(x)$ および $\mathrm{M}(x)$ をそれぞれ、与えられた x についての右の問題の実現可能解の集合、最適解の集合および最適値であるとしよう。また $\mathrm{Y} \supset \bigcup_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(x)$ とする。

Theorem A 1. Xに属する任意の x が与えられたとき、$\mathrm{H}(x)y_x \leqq b(x)$ および $\mathrm{K}y_x \leqq d$ となるような y_x が存在すると仮定しよう。そのとき写像 F: $x \in \mathrm{X} \to \mathrm{F}(x) \cap \mathrm{Y}$ はX上で閉かつ下半連続な写像である。さらに、もしもYがコンパクトならば、写像FはX上で連続である。

Theorem A2. もしも写像FがXで連続ならば、写像 G: $x \in \mathrm{X} \to \mathrm{G}(x) \cap \mathrm{Y}$ は上半連続であり、また $\mathrm{M}(x)$ はX上で連続である。

（14）ベルジュ [3] p. 114 Theorem 4'、あるいは二階堂 [34] p. 310 の(2)および p. 200 の (ii) 参照。
（15）例えば、二階堂 [34] p. 308 鈴木 [43] p. 220 等参照。
（16）例えば、二階堂 [34] p. 176 等参照。

五、ワルラスの一様成長均衡モデル

五・一 本節においては、ワルラスの資本形成および信用のモデルを、定常均衡モデルから更に一歩進めて一様成長均衡モデルとして解釈しよう。そこでは体系内の諸量が――その相対的な比率および諸価格を一定に保ちつつ――毎期同一の一定率で一様に成長していくと考えられる。云うまでもなく、このような一様成長均衡において成長率がゼロに等しい特別な場合が、前節で考察した定常均衡の状態に対応している。その意味で、一様成長均衡モデルは一般化された定常均衡モデルないし準定常均衡モデルと云われるのである。

周知の如く、一様成長均衡の概念について最初に厳密な考察を加えたのはフォン・ノイマン [48] であった。その後、フォン・ノイマンモデルの拡張によるワルラスモデルへの接近が、森嶋 [25]、大槻 [38]、芳賀＝大槻 [14] 等によって試みられているが、本節でなされるワルラスモデルの一様成長均衡モデルへの拡張は、それとは逆の方向で、静学的な価格決定理論と動学的な成長理論との裂け目を埋める役割を果たすと思われる。ただし、前にも述べたように、資本財と消費財とを区別するワルラスモデルの成長モデルへの拡張は、多数資本財モデルであるフォン・ノイマンモデルへの接近と云うよりも、むしろ二部門成長モデルへの接近と呼ばれるほうがヨリ適切であると思われる。なお、定常均衡の存在は既に前節で示され

たので、本節では成長率が厳密に正であるような一様成長均衡の存在を証明する。

まず、前節の定常経済モデルを基礎にして、企業家が生産過程から獲得する資本利潤額を見ると、任意の期間tについて、

(63) $\sum_{i=1}^{m} p_i(t)c_i(t)-\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} w_j(t)a_{ji}+\sum_{g=1}^{l} v_g(t)l_{gi}\right)c_i(t)\sum_{\tau=0}^{T^0_i-1}(1+\alpha)^{\tau}\right\}$

(64) $\sum_{h=1}^{l} \mathrm{P}_h(t)x_h(t)-\sum_{h=1}^{l}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} w_j(t)b_{jh}+\sum_{g=1}^{l} v_g(t)m_{gh}\right)x_h(t)\sum_{\tau=0}^{T_h-1}(1+\alpha)^{\tau}\right\}$

となる。ただしαは体系の成長率で一定とされる。

次に、期間tにおいて需要される第j要素量は

(65) $\sum_{i=1}^{m}\left\{a_{ji}\sum_{\tau=0}^{T^0_i-1}(1+\alpha)^{\tau}c_i(t)\right\}+\sum_{h=1}^{l}\left\{b_{jh}\sum_{\tau=0}^{T_h-1}(1+\alpha)^{\tau}x_h(t)\right\}$

となるであろう。

最後に、期間tにおける（粗）投資量と期間tのはじめにおける資本ストック量との関係は、任意のhについて、

(66) $y_h(t)=\sum_{\tau=-N_h}^{-1} x_h(t)(1+\alpha)^{\tau}=x_h(t)\sum_{\tau=1}^{N_h}(1+\alpha)^{-\tau}$

で表わされることになる。

五・二 本節において新たに導入される記号のみを次に明示しておく。

V^0 $\dfrac{(1+\alpha)^{T_i}-1}{\alpha}$ をその対角要素とするm次対角行列

V $\dfrac{(1+\alpha)^{T_h}-1}{\alpha}$ をその対角要素とするl次対角行列

U_α $\dfrac{1-(1+\alpha)^{-N_h}}{\alpha}$ をその対角要素とするl次対角行列

するとワルラスの一様成長均衡モデルは以下のように表わされる。ただしr s、c、z、、x、y、w、v、p、Pおよびρについては、期間を表わす添字tを省略する。

(67) $r=\mathrm{R}(w\ v\ p\ \mathrm{P}\ \rho\ y)$

(68) $s=\mathrm{S}(w\ v\ p\ \mathrm{P}\ \rho\ y)$

(69) $c=\mathrm{C}(w\ v\ p\ \mathrm{P}\ \rho\ y)$

(70) $z=\mathrm{Z}(w\ v\ p\ \mathrm{P}\ \rho\ y)$

(71) $pc+\rho z\equiv wr+vs+(pc-w\mathrm{AV}^0c-v\mathrm{LV}^0c)+(\mathrm{P}x-w\mathrm{BV}x-v\mathrm{MV}x)$

(72) $\mathrm{AV}^0c+\mathrm{BV}x\leqq r$

(73) $\mathrm{LV}^0c+\mathrm{MV}x\leqq s$

(74) $(w\mathrm{A}+v\mathrm{L})\Lambda^0\geqq p$

(75) $(w\mathrm{B}+v\mathrm{M})\Lambda\geqq \mathrm{P}$

(76) $\mathrm{P}x=\rho z$

(77) $\mathrm{P}=\rho v\mathrm{U}_{\mathrm{N}}$

(78) $x=\mathrm{U}_\alpha^{-1}y$

(79) $w(\mathrm{AV}^0c+\mathrm{BV}x-r)=0$

(80) $v(\mathrm{LV}^0c+\mathrm{MV}x-s)=0$

(81) $(w\mathrm{A}\Lambda^0+v\mathrm{L}\Lambda^0-p)c=0$

(82)　$(wBA+vMA-P)x=0$

(83)　$px>0,\ wr>0,\ vs>0,\ Px>0$

(84)　$px-wAV^{0}c-vLV^{0}c\geqq 0\quad Px-wBVx-vMVx\geqq 0$

五・三　一様成長均衡の存在を証明するために、前節四・五における仮定２ｅを次のように修正する。また新たに仮定４ｃを付加する。

仮定２e'　第τ本源的要素（労働）の供給量は各期間において有界であり、その供給量の上限は毎期毎期外生的に与えられた一定率 $n>0$ で増大する。

４ｃ　需給函数R、S、CおよびZは、$(w\,v\,p)\geqq 0$ および $(P\,\rho)\geqq 0$ が任意に与えられるとき y（資本財ストック量）について正の一次同次である。[1] ただしその際、r_τ については、R_τ がその上限以上の値をとる場合に r_τ の値をその上限で置きかえるものとする。

このとき、次の存在定理が成立する。

存在定理二　任意の期間 t について、仮定１ａｂｃ、２ａｂｃｄe'、３ａｂｃおよび４ａｂｃを満たす体系（67）―（84）には、正の α を持つ非負解が存在して、そこではさらに（72）（73）および（74）が厳密な等式で成立し、（75）の少なくとも一つの列が厳密な等式で成立する。ただし成長率 α は、第τ本源的要素供給量の上限の成長率 n と利子率の下限 $\bar{\theta}$ のうち、小さい方の値に等しいとする。

定理の成立は明らかである。なぜなら、$\alpha=\min(\bar{\theta},\ n)$ とすれば、α は均衡利子率 θ よりも小さくなり、したがって $A^{0}\geqq V^{0}$、$A\geqq V$ だから、（81）（82）より（84）が満たされることがわかる。そこで前節における存在定理一およびその証明において、T^{0}、TおよびNをそれぞれ、V^{0}、VおよびU_αに置きかえるだけで存在定理二が完全に証明されたことになる。

最後に、求める一様成長均衡の存在定理を示そう。

存在定理三　ある期間 t_0 について、定理二でその存在が保証される体系（67）―（84）の任意の非負解をr^*、s^*、c^*、z^*、x^*、y^*、w^*、v^*、p^*、P^*およびρ^*とすれば、定理二と同一の仮定のもとで、t_0以降の任意の期間 t について、

(85)
$$\begin{pmatrix} r(t)\\ s(t)\\ c(t)\\ z(t)\\ x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r^*\\ s^*\\ c^*\\ z^*\\ x^*\\ y^*\end{pmatrix}(1+\alpha)^{(t-t_0)}$$

(86)　$(w(t)\,v(t)\,p(t)\,P(t)\,\rho(t))=(w^*\,v^*\,p^*\,P^*\,\rho^*)$

となるような諸量および諸価格は、その期間に対応する体系（67）―（84）の均衡解である。ただし $\alpha=\min(\bar{\theta},\ n)$ である。

定理の証明は容易である。仮定２e'および４ｃの付加により、$\alpha=\min(\bar{\theta},\ n)$ に対して[2]体系（67）―（84）における等式は、式の両辺が不変であるか、または共通の α の率で成長するためにそのまま成立し続け、不等式も同様に不等式のまま維持さ

れる。また（84）の成立は既に述べた。かくて存在定理三の証明が終了する。

（1）　これは非常に厳しい仮定であるが、とりわけ、体系内で再生産が可能でない本源的要素が資本ストック量と同一の率で増加すると仮定することは、非現実的である。この困難は、通常なされるように、本源的要素が一種類つまり労働のみであると想定することによって取り除くことができるであろう。

（2）　むろん、$\min(\theta, n)$ よりも小な α について定理が成立することは明らかである。

六、結び

六・一　最後に結びとして、これまでに見たようなワルラスの定常経済モデルおよび成長モデルと、従来までの経済成長モデルとの顕著な相違を列挙しよう。

先ず、本稿のモデルにおいては、資本ストック量とその用役量とが明確に区別されている。周知の如く通常の経済成長モデルでは、体系内に存在する資本ストックが諸価格に関して非弾力的に供給されると想定されており、また毎期産出されるフローとしての生産物が、直接に現存する資本ストック量と労働量とに依存するように生産函数が設定されている。それに対して、ここでのモデルでは、生産される資本財それ自体は家計（資本家）によって所有され、生産に際してはその用役だけが諸価格に応じて適当な量だけ企業に販売されるという関係が明示的に定式化されている。

次に、労働用役の供給量とその上限との区別が指摘されよう。通常の経済成長モデルでは、資本に関してと同様に労働の存在量が非弾力的に供給され、しかもその上で完全雇用が仮定されるから、体系の成長率が結局労働の外生的な成長率に制約されてしまうのである。それに対して、ここでのモデルでは、外生的に成長するのは労働用役の供給量の上限であるから、体系の成長率はその上限の成長率を越えなければ、何らその率に制約されることはなく、しかも完全雇用の一様成長均衡を実現しうる。なぜなら、ここでは労働用役の需要量ばかりでなく供給量自体も、その供給量の上限の成長率とはまったく独立に、体系の（資本ストック量の）成長率に歩調を合わせることが可能であるから、労働用役の需給の厳密な均等という意味での完全雇用を伴う成長率は、外生的に与えられた労働用役供給量の上限の成長率以下であってもさしつかえないからである。(1)

第三の主要な相違点は、ここで通常の静学的な需給函数をそのまま成長モデルに適用したということである。とりわけ、ここでは貯蓄率がアプリオリに一定であるという極度な単純化の仮定を置く必要が生じないことに注意しよう。云わば、家計の最適化の行動がそのまま成長モデルに組み込まれているのである。ただその半面で、需給函数が家計の保有する資本ストック量について一次同次であるという強い仮定が採用されている。これは一様成長均衡の存在を証明するために重要な仮定であるが、必ずしも必要な仮定ではなく、何らかの方法でより現実的な仮定に置き換えることが望ましいと思われる。

六・二　本稿のモデルが一般の成長モデルと異なる最後の点は、既に第四節でも述べた如く、定常経済ないし成長経済において生産期間および耐久期間という概念が持つ意味を明確にしているということである。(2) 特に生産期間について云えば、体系の成長率と均衡利子率との関係が、生産過程から生じる資本利潤と投資との関係にある対応を持っているという事が指摘できる。今、事態の本質を見るために生産期間はすべての財について今期を含めて二期間以上であると仮定しておこう。つまり、すべての i と h について T^o_i, $T_h \geqq 2$ と仮定する。さらに、体系が均衡利子率に等しい率で一様成長することが可能であったと想定しよう。つまり、体系（67）—（84）における α をすべて利子率 θ に置き換えて均衡利子率 θ^* をもとめたとき、$(\alpha =)\ \theta^* \leqq n$ となるように労働用役供給量の上限の成長率 n が与えられていて、体系が事実 θ^* の成長率で一様に成長することが可能であったと想定しよう。

そのような場合には、定義より明らかに $A^0=V^0$, $A=V$ となるから、(81)(82) よりただちに (84) が厳密に等号で成立する。つまり生産過程より生じる資本利潤がゼロであることがわかる。しかし四・六の最後で証明したように、定常経済均衡においては、生産期間が二期間以上である場合には資本利潤は厳密に正であった。したがって、ここでは、それだけの利潤が体系を θ^* の率で成長させるために「投資」された、つまり定常経済におけるよりも企業家によって資本用役および本源的要素用役がより多く購入され、毎期毎期より大なる生産量が生み出されると考えることができる。このような意味で、利潤がすべて投資される状態が、成長率イコール利子率の状態に対応していると云いうるのであるが、ここでの投資は明らかに、所得の中から貯蓄され、それで購入された新資本財の価額という意味での投資とはまったく異なり、さらに、通常の賃金所得 (wr) および利子所得 (vs) はそれぞれ、消費 (pc) にも貯蓄 (pz) にもふりむけられていることに注意すべきであろう。

(1) もっとも、本源的要素の上限の成長率が利子率の下限よりも大きくないならば、つまり $n \leqq \bar{\theta}$ のように $n(\geqq 0)$ が与えられるならば、成長率が n の一様成長均衡が存在して、しかもそれは一様な成長均衡のうち最大の成長率を持つものにほかならない。このような意味で、体系の成長率が本源的要素の成長率に制約されていると云うことはできる。

(2) ボェーム＝ヴィクセル＝オッカーマンの問題、すなわち最適な生産期間および耐久期間の決定の問題は、最適な生産係数の決定の問題とともに、結合生産の可能性を考慮することおよび同一種類の資本用役を提供するいくつかの資本財を考慮することによって処理されうる。そのような一般的モデルについては、本誌四十二年六月号研究ノートを参照されたい。

引用文献

〔1〕 Arrow, K. J. and G. Debreu, "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy" *Econometrica* Vol. 22, July 1954.
〔2〕 Aumann, R. J., "Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders" *Econometrica*, Vol. 34, January 1966.
〔3〕 Berge, C., *Topological Spaces*, translated by E. M. Patterson (Edinburgh and London, Oliver and Boyd Ltd,) 1963.
〔4〕 Debreu, G., *Theory of Value* (New York, John Wiley and Sons) 1959.
〔5〕 Debreu. G., "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis" *International Economic Review*, Vol. 3, September 1962.
〔6〕 Dorfman, R., P. A. Samuelson, and R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, (New York, McGraw-Hill) 1958.
〔7〕 Drandakis, E. M. "On the Competitive Equilibrium in a Monetary Economy", *International Economic Review*, Vol. 7, September 1966.
〔8〕 福岡正夫・小山昭雄「カッセル一般均衡体系の再検討」季刊理論経済学 Vol. IX January, 1959.
〔9〕 Floss, L., "Some Notes on Léon Walras' Theory of Capitalization and Credit" *Metroeconomica*, Vol. IX, April 1957.
〔10〕 Gale, D., "The Law of Supply and Demand", *Mathematica Scandanavica* 3, 1955.
〔11〕 Goldman, A. J., and A. W. Tucker, "Theory of Linear Programming" in *Linear Inequalities and Related Systems*, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Princeton University Press) 1956.
〔12〕 芳賀半次郎「Walras の『資本化および信用の理論』と解の存在」季刊理論経済学 Vol. XV, Nevember 1964.
〔13〕 Haga, H., "Existence of Solution to the Walrasian System of Circulation and Money" 一九六六年度計量経済学会第一回極東大会報告要旨。
〔14〕 Haga, H. and M. Otsuki, "On a Generalized von Neumann Model" *International Economic Review*, Vol. 6, January 1965.
〔15〕 Hicks, J. R., *Value and Capital* (Oxford Clarendon Press) 1st edition 1939, 2nd edition 1946.
〔16〕 Inada, K., "A Note on the Revison of the Proof of Dorfman, Samuelson and Solow's Existence Theorem of General Equilibrium" 季刊理論経済学 Vol. XIII, February 1963.
〔17〕 Karlin, S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Vol. 1, (Addison-Wesley Publishing Company Inc.) 1959.
〔18〕 Kuenne. R. E., *The Theory of General Economic Equilibrium* (Princeton University Press) 1963.
〔19〕 Kuga, K., "Weak Gross Substitutability and the Existence of Competitive Equilibrium" *Econometrica* Vol. 33, July 1965.
〔20〕 Kuhn, H. W., "On a Theorem of Wald" in *Linear Inequalities and Related Systems*. H. W., Kuhn and A. W. Tucker (Princeton University Press) 1956.
〔21〕 McKenzie, L., "On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems" *Econometrica*, Vol. 22,

April 1954.
〔22〕 McKenzie, L., "On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market" *Econometrica*, Vol. 27, January 1959.
〔23〕 McKenzie, L., "On the Existence of General Equilibrium: Some Corrections" *Econometrica*, Vol. 29, April 1961.
〔24〕 Morishima, M., "Existence of Solution to the Walrasian System of Capital Formation and Credit" *Zeitschrift für Nationalöconomie*, Vol. 20, Nos. 1-2, 1960.
〔25〕 Morishima, M., "Economic Expansion and the Interest rate in Generalized von Neumann Models" *Econometrica*, Vol. 28, April 1960.
〔26〕 Morishima. M., "A Dynamic Leontief System with Neo-classical Production Functions" in *Equilibrium Stability and Growth* (Oxford at the Clarendon Press) 1964.
〔27〕 Morishima, M., "Walras's Theory of Capital Formation" in *Equilibrium Stability and Growth* (Oxford at the Clarendon Press) 1964.
〔28〕 Negishi, T., "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy" *Metroeconomica*, Vol. XII, 1960.
〔29〕 Negishi, T., "Monopolistic Competition and General Equilibrium" *Review of Economic Studies*, Vol. 28, 1961-2.
〔30〕 根岸　隆『価格と配分の理論』（東洋経済新報社）1965.
〔31〕 根岸　隆『貨幣の一般均衡分析』経済学論集 1966 年 4 月.
〔32〕 Nikaidô, H., "On the Classical Multilateral Exchange Problem" *Metroeconomica*, Vol. VIII, Fasc. II, Agosto 1956.
〔33〕 Nikaidô, H., "A Supplementary Note to《On the Classical Multilateral Exchange Problem》" *Metroeconomica*. Vol. IX, Dicembve 1957.
〔34〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』（岩波書店）1959.
〔35〕 Nikaidô, H.,"Stability of Equilibrium by the Brown- von Neumann Differential Equation"*Econometrica* Vol. 27, October 1959.
〔36〕 Nikaidô, H., "Generalized Gross Substitutability and Extremization" in *Advances in Game Theory* (Princeton University Press)1963.
〔37〕 Nikaidô, H., "A Technical Note on the Existence Proof for Competitive Equilibrium" 季刊理論経済学 Vol. XIII, September 1962.
〔38〕 大槻幹郎『Neumann の均衡成長モデルの一般化について』季刊理論経済学 Vol. XIII, February 1963.
〔39〕 Patinkin, D., "*Money Interest and Prices*" Second Edition (New York: Harper & Row Publishers) 1965.
〔40〕 Samuelson, P. A., *Foundation of Economic Analysis* (Harvard University Press) 1948.
〔41〕 Schumpeter, J., *History of Economic Analysis* (George Allen & Unwin Ltd., London) 1954.
〔42〕 Solow, R. M., "Note on Uzawa's Two-Sector Model of Economic Growth" *Review of Economic Studies*, Vol. XXIX, October 1961.
〔43〕 鈴木光男『ゲームの理論』（勁草書房）1959.
〔44〕 Uzawa, H., "Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange" *Review of Economic Studies*, Vol. XXVII, June 1960.
〔45〕 Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, Vol. XXIX, October 1961.
〔46〕 Uzawa, H., "Aggregative Convexity and the Existence of Competitive Equilibrium", 季刊理論経済学 Vol. XII, January 1962.
〔47〕 Uzawa, H., "Walras' Existence Theorem and Brouwer's Fixed-Point Theorem" 季刊理論経済学 Vol. XIII, September 1962.
〔48〕 von Neumann, J., "A Model of General Economic Equilibrium" English translation, *Review of Economic Studies*, Vol. XIII, 1945-6.
〔49〕 Wald, A., "On some systems of equations of Mathematical Economics"—English translation *Econometrica*, Vol. 19, October 1951.
〔50〕 Walras, L., *Elements of Pure Economics*, translated by W. Jaffé (Richard D. Irwin, Inc.,) 1954.
〔51〕 Wicksel, K., *Lectures on Political Economy* translated by E. Classen (Routledge, London) 1934.
〔52〕 安井琢磨『均衡分析の基本問題』（岩波書店）1955.
〔53〕 安井琢磨『ワルラス体系の一考察』中山伊知郎博士還暦記念論文集（東洋経済新報社）1958.
〔54〕 Yasui, T., "Existence of Stationary Equilibrium in the Walras-Wicksellian Model of Production" 経済研究 Vol. 13, July 1962.
〔55〕 安井琢磨・二階堂副包「経済理論における数学的方法」岩波講座現代応用数学（岩波書店）1957-58.