Title	回帰線導出の方法 (二)
Sub Title	Methods of regression (2)
Author	佐藤, 保
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1966
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.59, No.9 (1966. 9) ,p.994(84)- 1008(98)
JaLC DOI	10.14991/001.19660901-0084
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19660901-0084

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

回帰線導出の方法 (二)

佐藤 保

四、構造パラメーターから誘導形パラメーター への逆算

ジャストアイデンティファイでない場合は、最小自乗法によって求めた誘導形パラメーターと、構造パラメーターより逆算した誘導形パラメーターとは異ってくるが、本来の誘導形の式は

$$(4. 1) \hat{\Pi} = -B\hat{\Gamma}^{-1}$$

で与えられた。そこで $\hat{B}\hat{\Gamma}$ が例えば三段階最小自乗法で求められれば $\hat{\Pi}$ を求めることができる。そして $\hat{\Pi}$ の標準誤差は次の式より求める、 $\hat{\Pi}$ は K 行 M 列の行列であるがこれを方程式の順序に 1 列にならべかえる。これを $\hat{\pi}$ とすれば MK 行 1 列の行列となる。そしてこの $\hat{\pi}$ の分散共分散行列を ψ とすると、

$$(4. 2) \hat{\psi} = J\hat{\Delta}J'$$

$\hat{\Delta}$ はそれぞれの母数に対する推定量を示す。ここに Δ というのは、

$$(4. 3) A = \begin{pmatrix} I \\ B \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{I} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

とすると $\hat{A}$ は $(M+K)$ 行 M 列の行列となるが、ここでまた方程式の順序に 1 列に並べかえたものを α としこの推定量を $\hat{\alpha}$ とすれば $\hat{\alpha}$ は $M(M+K)$ 行 1 列の行列となる。この $\hat{\alpha}$ の分散、共分散行列を Δ で示し、その推定量を $\hat{\Delta}$ で示す。 $\hat{\Delta}$ は $M(M+K)$ 行 $M(M+K)$ 列の行列となる。次に J は、

$$(4. 4) J = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \alpha} = - \begin{pmatrix} \gamma_{11}(\hat{\Pi}') & \dots & \gamma_{1M}(\hat{\Pi}') \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{M1}(\hat{\Pi}') & \dots & \gamma_{MM}(\hat{\Pi}') \end{pmatrix}$$

で示される。 $\hat{\Pi}'$ は $\hat{\Pi}$ の転置行列、 I は単位行列を示す。この推定量を $\hat{J}$ で示す。 $\hat{J}$ は $\hat{J}$ の転置行列である。 Δ は例えば三段階最小自乗法の係数の分散・共分散を用いればよい。 γ_{ij} は I^{-1} の要素であるからこれは $\hat{\Pi}$ を求める際に計算してある。現在の場合に適用してみると、

$$(4. 5) \gamma_1 = a_1\gamma_2 + a_2a_1 \\ \gamma_1 = b_1\gamma_2 + b_2a_2 + b_3a_3$$

$$(4. 6) \Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} \end{pmatrix} \quad \pi = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \end{pmatrix}$$

$$(4. 7) J = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = - \begin{pmatrix} \gamma_{111} \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \end{pmatrix} & \gamma_{122} \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \end{pmatrix} \\ \gamma_{211} \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \end{pmatrix} & \gamma_{222} \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

として与えられる。推定量を代入して計算すれば J は 10 行 6 列の行列、 J' は 6 行 10 列の行列であり

$$\hat{\psi} = J\hat{\Delta}J'$$

$\hat{\psi}$ は 6 行 6 列の行列となる。この行列の対角線の値の平方根を求めれば、誘導形パラメーターの標準誤差が求められる。現在の場合では次のようになる。

まず三段階最小自乗法の係数を使えば

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\hat{\alpha}$ の分散共分散行列を求めるためこれに三段階最小自乗法の係数の分散共分散行列をあてはめ、-1 および 0 についての分散、共分散は 0 であるから、0 とおけば 10 行 10 列の行列ができる。 J は

回帰線導出の方法 (一)

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22} \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

とすればλを求めるときは

$$(5.8) \quad \lambda^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) - \lambda(b_{11}W_{22} + b_{22}W_{11} - 2b_{12}W_{12}) + W_{11}W_{22} - W_{12}^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{b_{11}W_{22} + b_{22}W_{11} - 2b_{12}W_{12} \pm \sqrt{(b_{11}W_{22} + b_{22}W_{11} - 2b_{12}W_{12})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(W_{11}W_{22} - W_{12}^2)}}{2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}$$

(5.9) $\hat{\beta}_1 = -(X'X)^{-1}(X'Y^*)\hat{\gamma}^*$
係数の標準誤差をいへるために

$$\hat{\gamma}^*/W$$

(5.10) $\hat{\gamma}^*/W\hat{\gamma}^*$
をいへる

$$(5.11) \quad C = \left(1 + \frac{1}{\lambda_0} \hat{\gamma}^* W \hat{\gamma}^*\right) \quad \lambda_0 = \text{最大根}$$

$$(5.12) \quad B - \frac{1}{\lambda_0 \hat{\gamma}^* W \hat{\gamma}^*} (\hat{\gamma}^* W) (\hat{\gamma}^* W)$$

この行列の一行一列を除いた行列を

$$(5.13) \quad F_{\gamma\gamma}^{-1} = \left[B - \frac{1}{\lambda_0 \hat{\gamma}^* W \hat{\gamma}^*} (\hat{\gamma}^* W) (\hat{\gamma}^* W) \right]$$

と書くとこの逆行列を $F_{\beta\beta}$ とする。

$$(5.14) \quad \frac{C}{T - m_1 - k_1} F_{\gamma\gamma}$$

はその方程式の内生変数の数 k_1 はその方程式の外生変数の数

(5.14)が $k_1, \dots, k_{m_1}$ までの分散共分散を与える。次に

(5.15) $(X'X)^{-1}X'Y^*$
この行列の第一列を除いたものを

$$\alpha_1((X_1'X_1)^{-1}X_1Y^*)$$

$$(5.15) \quad F_{\beta\beta} = \alpha_1((X_1'X_1)^{-1}X_1Y^*)F_{\beta\beta}$$

$$(5.16) \quad \frac{C}{T - m_1 - k_1} F_{\beta\beta}$$

が k_1 と k_2 の共分散行列をいへる。次に

$$(5.17) \quad F_{\beta\beta} = \alpha_1((X_1'X_1)^{-1}X_1Y^*)F_{\beta\beta} + (X_2'X_2)^{-1}$$

をいへる

$$(5.18) \quad \frac{C}{T - m_1 - k_1} F_{\beta\beta}$$

が $k_1, \dots, k_2$ の分散共分散行列となる。

現在の場合は次のようになる。また(1)より

$$(5.19) \quad W = \begin{pmatrix} .29112880E+09 & -.37122290E+08 \\ -.37122290E+08 & .65229498E+07 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .76003989E+08 & -.13494798E+06 & .37093833E+09 \\ -.13494798E+06 & .16547520E+05 & -.49672198E+08 \\ .37093833E+09 & -.49672198E+08 & .94338777E-02 \\ .29112880E+09 & -.37122290E+08 & .58744035E-05 \\ -.37122290E+08 & .65229498E+07 & .23503791E-07 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &.1154599E+08 \times .13138098E+07 + .1021833E+07 \times .373880E+07 \\ &- 2(-.3339569E+07 \times .203271E+06) \\ &= \sqrt{\frac{[.1154599E+08 \times .13138098E+07 + .1021833E+07 \times .373880E+07 \\ &- 2(-.3339569E+07 \times .203271E+06)]^2}{-4[(-.1154599E+08 \times .1021833E+07) - (-.3339569E+07)^2] \\ & \cdot (.373880E+07 \times .13138098E+07) - (.203271E+06)^2}} \\ &= 2[.1154599E+08 \cdot 1021833E+07 - (.3339569E+07)^2] \end{aligned}$$

よってその大根と小根を

$$(5.22) \quad \lambda_1 = .31287780E+02$$

と求める。

$$(5.23) \quad W - \lambda_1 B$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} .373880E+07 & .203271E+06 \\ .203271E+06 & .13138098E+07 \end{pmatrix} \\ &\quad - .31287780E+02 \begin{pmatrix} .1154599E+08 & -.3339569E+07 \\ -.3339569E+07 & .1021833E+07 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -.35750960E+09 & 10469097E+09 \\ 10469097E+09 & -.30657076E+08 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(5.24) \quad - .35750960E+09 \quad a + 10469097E+09(-a_1) = 0$$

$$- .10469097E+09 \quad a - .30657076E+08(-a_1) = 0$$

$$a = - .10469057E+09 \quad \text{とすれば}$$

$$(5.25) \quad a_0 = 14405.400 - (-3.4149039) \cdot 7174 - 2.1023280 \times 2662.8$$

$$= 33305.842$$

現在の場合(1)と(2)の計算は同じであるから、それだけ計算が楽である。

$$(5.20) \quad B = \begin{pmatrix} .287390E+09 & -.373255E+08 \\ -.373255E+08 & .520914E+07 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} .06003989E+08 & \frac{1}{.20941569E+08} \\ -.93642286E+07 & \frac{1}{.20941569E+08} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} .76003989E+08 & -.93642286E+07 \\ .287390E+09 & -.373255E+08 \\ -.373255E+08 & .520914E+07 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} .27584401E+09 & -.33985931E+08 \\ -.33985931E+08 & .41893070E+07 \\ .115499E+08 & -.3339569E+07 \\ -.3339569E+07 & .1021833E+07 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(5.21) \quad \lambda_1 =$$

回帰線導出の方法 (1)

理論値を求め、誤差の自乗和を求めて誤差分散を求めてみると

$$(5.26) \quad \langle Y \rangle = \begin{matrix} 7306 \\ 8297 \\ 9156 \\ 10110 \\ 15418 \\ 15044 \\ 16029 \\ 18652 \\ 19550 \\ 25399 \end{matrix} \quad S^2 = 2118011$$

(5.27) (1) $Y_1 = -3.4149039Y_2 + 2.1023280X_1 + 33305.842$
 と求める。係数の標準誤差を求める。

$$(5.28) \quad \widehat{W} = \begin{pmatrix} -10469097E+09 & -35750960E+09 \\ 373880E+07 & 203271E+06 \\ 203271E+06 & 13138098E+07 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10469097E+09 \\ -35750960E+09 \end{pmatrix} = 23127925E+24$$

$$(5.29) \quad \frac{1}{\lambda_1' W \lambda_1} (\widehat{W})' (\widehat{W})$$

$$= \frac{1}{31287780E+02 \cdot 23127925E+24 - 49098026E+15} \begin{pmatrix} -46408993E+15 \\ -46408993E+15 & -49098026E+15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29764108E+05 & 31488702E+05 \\ 31488702E+05 & 33313224E+05 \end{pmatrix}$$

$$(5.30) \quad B - \frac{1}{\lambda_1' W \lambda_1} (\widehat{W})' (\widehat{W}) = \begin{pmatrix} 1154599E+08 & -3339569E+07 \\ -3339569E+07 & 1021833E+07 \end{pmatrix}$$

$$(5.36) \quad F_{gg} = -44715984E+00 \times -45235293E-06 + \left(\frac{1}{20941569E+08} \right) = 25002597E-06$$

$$(5.37) \quad \frac{C}{7} \cdot F_{gg} = 33039893E+23 \times 25002597E-06 = 82608313E+16$$

F_{yy} F_{yg} F_{gg} を (-10469097E+09)² で割る。

$$(5.38) \quad F_{yy} = \frac{33423602E+17}{10960199E+17} = 30495434E+01$$

$$F_{yg} = \frac{14945673E+17}{10960199E+17} = 13636334E+01$$

$$F_{gg} = \frac{82608313E+16}{10960199E+17} = 75371180E+00$$

$$\sqrt{F_{yy}} = 1.74629419 \quad \sqrt{F_{gg}} = 0.86816577$$

方程式(2)に対して同様の計算を行うが、結果だけ記すとWは前と同じ。

$$(5.39) \quad \begin{pmatrix} 433995E+07 & 642230E+06 \\ 642230E+06 & 950356E+05 \end{pmatrix}$$

ここらみに λ_1' を使ってみると

$$\lambda_2' = 840353E+00 \quad \lambda_2 = -60250545E+06$$

$$b_1 = -27259845E+00 \quad b_1 = 67576317E+01$$

$$b_2 = 37076255E+02 \quad b_2 = 17488979E+03$$

$$b_3 = 74865127E+00 \quad b_3 = 15140387E+01$$

$$b_4 = -12817620E+04 \quad b_4 = -78992356E+05$$

(5.40) ここらみに λ_2' を使ってみると

$$(2) \quad Y_1 = -0.27259485Y_2 + 37.076255X_2 + 0.74865127X_3 - 1281.762$$

回帰線導出の方法 (11)

70(1000)

$$= \begin{pmatrix} 29764108E+05 & 31488702E+05 \\ 31488702E+05 & 33313224E+05 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11516226E+08 & 33710577E+07 \\ -33710577E+07 & 98851978E+06 \end{pmatrix}$$

$$(5.31) \quad C = \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) (\widehat{W})'$$

$$= \left(1 + \frac{1}{31287780E+02}\right) \begin{pmatrix} -10469097E+09 & -35750960E+09 \\ 373880E+07 & 203271E+06 \\ 203271E+06 & 13138098E+07 \\ -35750960E+09 \end{pmatrix}$$

$$= 23127925E+24$$

$$(5.32) \quad F_{yy}^{-1} = 98851978E+06 \quad F_{yy} = 10116135E-05$$

$$(5.33) \quad \frac{C}{1 - m_1 - K_1} F_{yy} = \frac{23127925E+24}{7} \times 10116135E-05 = 33423602E+17$$

$$(5.34) \quad (X_1' X_1)^{-1} X_1' Y_* = \frac{1}{20941569E+08} \begin{pmatrix} 76003989E+08 & -93642286E+07 \\ 36293359E+01 & -44715984E+00 \end{pmatrix}$$

この行列の1列を除く

$$(5.35) \quad \frac{C}{7} \cdot F_{yg} = -44715984E+00 \times 33423602E+17 = -14945693E+17$$

$$\frac{C}{7} \cdot F_{gg} = 14945693E+17$$

理論値と誤差分散は

$$(5.41) \quad \langle Y \rangle = \begin{matrix} 7037 \\ 7920 \\ 9512 \\ 12037 \\ 13426 \\ 14425 \\ 16467 \\ 17922 \\ 21895 \\ 23651 \end{matrix} \quad S^2 = 891297$$

となった。次に係数の標準誤差を計算してみると、計算を行った結果一応数値を求めることはできるが、この程度の8桁を基準とする計算ではその値が不安定であることがわかった。計算結果としては係数の標準誤差は非常に大きくなるが、計算の途中である桁数で切れば0に接近してしまふ。そこで結果はここに記さないことにする。これはBはすべての独立変数による回帰平方和からその方程式に入っている回帰平方和を引いた形になっているため、(2)の場合、これが相対的に小さな値になっている。また b_2 が小さいこともあつた。

$$B - \frac{1}{\lambda_2' W \lambda_2} (\widehat{W})' (\widehat{W})$$

の値は小さな値となり、したがって F_{yy} は大きな値となってしまう。一種のマルチコリニアリティーともいえるが、ここで単一方程式ではみられない、他の方程式に含まれた独立変数との関係が生じてくる。簡単な二つの連立方程式でもこの関係がみられるのであるから、更に方程式の数がふえた場合これらの関係は一層複雑となるであらう。単一方程式でマルチコがある場合でも計算上は係数あるいは標準誤差が0、無限大とでてくる場合はないので数値が求められなくなるわけであるからこの点に注意しておかなければならない。

ノ一々ヲイテ

$$r_1^{1'} = (1 \quad .371029103E+01)$$

$$(2) \quad r_1^{2'} = r_0^{2'} + \hat{\Delta}r_1^{2'}$$

$$r_0^{2'} = (1 \quad -.65972410E+00)$$

$$\hat{\Delta}r_1^{2'} = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ .13428373E+01 & -.65972410E+00 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .13207580E-06 & -.79257962E-07 \\ -.79257962E-07 & .75736333E-06 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_1^{2'} = (1 \quad -.23661166E+01)$$

$$(6.16) \quad 2 \text{ 回目}$$

$$(1) \quad r_2^1 = r_1^{1'} + \hat{\Delta}r_1^{1'}$$

$$\hat{\Delta}r_1^{1'} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ .37102910E+01 & -.33661166E+01 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .90308054E-07 & .12126789E-06 \\ .12126789E-06 & .59098919E-06 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2^1 = (1 \quad .2349626E+01)$$

$$(2) \quad r_2^{2'} = r_1^{2'} + \hat{\Delta}r_1^{2'}$$

$$\hat{\Delta}r_1^{2'} = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ .37102910E+01 & -.33661166E+01 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .13207586E-06 & -.79257962E-07 \\ -.79257962E-07 & .75736333E-06 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2^{2'} = (1 \quad -.1846895E+01)$$

以下同様のへり返し計算を進めてゆく。その結果だけ記すと

$$(6.17) \quad 3 \text{ 回目}$$

$$(1) \quad r_3^{1'} = (1 \quad .2833371E+01)$$

$$(2) \quad r_3^{2'} = (1 \quad -.2422027E+01)$$

$$4 \text{ 回目}$$

$$(1) \quad r_4^{1'} = (1 \quad .2602095E+01)$$

$$(2) \quad r_4^{2'} = (1 \quad -.2165333E+01)$$

$$5 \text{ 回目}$$

$$(1) \quad r_5^{1'} = (1 \quad .2694237E+01)$$

$$(2) \quad r_5^{2'} = (1 \quad -.2278381E+01)$$

$$6 \text{ 回目}$$

$$(1) \quad r_6^{1'} = (1 \quad -.2652049E+01)$$

$$(2) \quad r_6^{2'} = (1 \quad -.2231440E+01)$$

$$7 \text{ 回目}$$

$$(1) \quad r_7^{1'} = (1 \quad .2669243E+01)$$

$$(2) \quad r_7^{2'} = (1 \quad -.2252602E+01)$$

$$8 \text{ 回目}$$

$$(1) \quad r_8^{1'} = (1 \quad .2661436E+01)$$

$$(2) \quad r_8^{2'} = (1 \quad -.2243911E+01)$$

$$9 \text{ 回目}$$

$$(1) \quad r_9^{1'} = (1 \quad .2664631E+01)$$

$$(2) \quad r_9^{2'} = (1 \quad -.2247846E+01)$$

6 回目の値を採用した ($a_1 = -2.664631$ $b_1 = 2.247846$)。次に外生変数の値をきめる。

$$(6.18) \quad (1) \quad \hat{\beta}_1 = a_2 = -(1 \quad .2662552E+01) \begin{pmatrix} .76003989E+08 \\ -.93642286E+07 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -.20941569E+08 \\ -.24387496E+01 \end{pmatrix}$$

$$= -.24387496E+01$$

$$a_2 = .24387496E+01$$

$$(6.19) \quad (2) \quad \hat{\beta}_2 = (b_2 \ b_3) = -(1 \quad -.2246441E+01)$$

$$\begin{pmatrix} -.13494798E+06 & .3709833E+09 \\ .16547520E+05 & -.49672198E+08 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .17830100E+03 & -.18305971E+06 \\ -.18305971E+06 & .48645469E+09 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= -(.86456960E+02 \quad .10244547E+01)$$

$$b_2 = .86456960E+02$$

$$b_3 = .10244547E+01$$

次に定数を求める。

$$(6.20) \quad (1) \quad a_0 = 14405.4 - (-2.662552 \times 7174)$$

$$= -2.4387496 \times 2662.8 = 27012.646$$

$$(6.21) \quad (2) \quad b_0 = 14405.4 - (2.246441 \times 7174) - (.86.456960 \times 92.47)$$

$$= -1.0244547 \times 18986.6 = -29156.153$$

$$(6.22) \quad (1) \quad Y_1 = -2.662552Y_2 + 2.4387496X_1 + 27012.646$$

$$(6.23) \quad (2) \quad Y_1 = 2.246441Y_2 + .86.456960X_2 + 1.0244547X_3$$

$$= -29156.153$$

理論値を求めて誤差分散を計算する。

回帰線導出の方法 (1)

$$(6.24) \quad (1) \quad \langle Y_1 \rangle$$

7671
8767
9389
10152
14701
14921
15674
18197
19757
25634

$$S^2 = 15155819$$

$$(6.25) \quad (2) \quad \langle Y_1 \rangle$$

7669
8450
9814
12378
11232
14160
16100
16889
23267
23773

$$S^2 = 11188446$$

となった。完全情報法では係数の標準誤差は計算されな。

七、結果のまとめ

重相関係数 R を次の定義式からそれぞれ計算してみる。

$$(7.1) \quad R = \sqrt{1 - \frac{\sum (実測値 - 推定値)^2}{\sum y_i^2}}$$

そして(7)の結果をそれぞれ並べて書してみる。係数の(1)の()内の数字は係数の標準誤差を示す。

$$(7.2) \quad (1) \text{ 式}$$

$$\text{古典的最小自乗法} \quad Y_1 = -1.3428373Y_2 + 3.0288719X_1 + 15937.915$$

$$(0.82297691) \quad (0.45930877)$$

$$R = 0.9808$$

$$\text{二段階最小自乗法}$$

$$Y_1 = -3.2682036Y_2 + 2.1679261X_1 + 31991.805$$

$$(1.3896165) \quad (0.69306376)$$

$$R = 0.9655$$

$$\text{三段階最小自乗法}$$

$$Y_1 = -3.26840Y_2 + 2.16781X_1 + 31993.5175$$

九五(100)

(1. 3896344) (0. 6930749)
R=0. 9655 (若干の計算誤差を含む)

情報制限最尤法 $Y_1 = -3. 4149039Y_2 + 2. 1023280X_1 + 33305. 842$
(1. 74629419) (0. 86816577)
R=0. 9629

完全情報最尤法 $Y_1 = -2. 662552Y_2 + 2. 4387496X_1 + 27012. 646$
R=0. 9736

(7. 3) (2) 式
古典的最小自乘法
 $Y_1 = 0. 65972410Y_2 + 53. 979740X_2 + 0. 84805669X_3 - 11426. 029$
(0. 96216042) (109. 87524) (0. 12400791)
R=0. 9867

二段階最小自乘法
 $Y_1 = 6. 769584Y_2 + 174. 9051X_2 + 1. 518458X_3 - 78983. 355$
(7. 7681373) (274. 95572) (0. 86173357)
R=0. 8961

三段階最小自乘法
 $Y_1 = 6. 5403Y_2 + 72. 450X_2 + 1. 46145X_3 - 66134. 1285$
(7. 7585786) (206. 85008) (0. 85580928)
R=0. 8883

情報制限最尤法 (Y_2' を使ったとき)
 $Y_1 = -0. 27259845Y_2 + 37. 076255X_2 + 0. 74865127X_3 - 1281. 762$
R=0. 9846
完全情報最尤法

$Y_1 = 2. 246441Y_2 + 86. 456960X_2 + 1. 0244547X_3 - 29156. 153$
R=0. 9801

(7. 4) 誘導形(単純)
(1) $y_1 = 1. 43705x_1 + 6. 68748x_2 + 0. 48275x_3$
(0. 547681) (77. 115504) (0. 121721)
(2) $y_1 = 0. 21265x_1 - 24. 8907x_2 - 0. 15325x_3$
(0. 319284) (44. 956263) (0. 070960)

誘導形 (漸進方程式より逆算)
(1) $y_1 = 1. 4454645x_1 + 2. 4141383x_2 + 0. 48697618x_3$
(0. 42915284) (59. 827504) (0. 090416840)
(2) $y_2 = 0. 22100888x_1 - 7. 3862992x_2 - 0. 14899526x_3$
(0. 25893716) (17. 25572) (0. 051897159)

まず(1)式よりみると、 X_1 の係数はどの計算方式によっても非常に安定した値を示しており有意である。これに対して、 Y_2 の係数はやや不安定であって有意である場合とそうでない場合とがある。これは最初の相関行列より想像されることで、左辺の Y_1 は X_3 、 X_1 、 Y_2 の順序に高い相関をもっており、 X_1 と X_3 の係数は非常に安定している。(1)式全体としては古典的最小自乘法だけがやや異った係数を示しており、他は似かよった値を示している。重相関は古典的最小自乘法について完全情報最尤法が高い。(2)式についてみると X_2 という不安定要素の大きい変数が入ったため、係数は計算方式が異なるにつれて大きく変っている。 X_2 の係数の変化が最も大きく、ついで Y_2 の係数でいずれも有意ではなくあまり信用できない。この中で X_3 の係数は

比較的安定しており、有意か又はそれに近い水準にある。これも単純相関行列より予想されることであるが X_2 が以外に悪い結果を示している。重相関は古典的最小自乘法について情報制限最尤法が高くなっており、この係数は信用できないが、係数の信頼性と相関とは別のものであり、従って係数の信頼性と予測とは又別のものであるという議論が適用できる。これは本来おかしなことであるが、分析の便宜上よく使われることである。(1)・(2)を通じて、二段階最小自乗法と三段階最小自乗法とはあまり異っていないことがわかる。これは計算方式からも予想されることであるが、三段階の方が多くの情報よりなることは当然としても、計算上の労力の増加を考えれば、三段階の有利性への疑問が残るであろう。誘導形についても X_2 と X_3 は安定しているが、 X_1 は不安定である。以上の式を使って昭和37、38年の実際値と予測値は次のようになった。

(7. 5) (1)式

	実際値	古典的最小自乗法	二段階最小自乗法	三段階最小自乗法	(Y_2' 使用)情報制限最尤法	完全情報最尤法
37	28662	27203	25405	25405	25359	26041
38	29766	28967	26840	29840	26769	27580

(2)式

	28662	27510	32861	33529	26763	28887
37	28662	27510	32861	33529	26763	28887
38	29766	33787	43470	43996	33397	36303

この結果をみると、(1)式より37年は現実値に古典的最小自乗法が最も近く、いずれも過小推定であるが、ついで完全情報最尤法にな

回帰線導出の方法 (11)

っている。38年も同様の傾向がみられた。(2)式では37年は現実値に完全情報最尤法が最も近くついで古典的最小自乗法であり、ここでは計算方式によって過大推定から、過小推定が2となっている。38年についてはすべて過大推定となっているが、情報制限最尤法が最も現実値に近くついで古典的最小自乗法となっている。総合して順序をつけるとすれば、古典的、完全、情報限定、二段階、三段階となろうが、重相関の値からもある程度の子想は考えられるところである。以上のことからそれぞれの方式の特徴をくりかえし簡単に再述すれば、

- 1、古典的最小自乗法、最も計算が簡単であり、重相関は最も高く、その限りで期間内のあてはまり(中)は最もよい。従って予測にもかなり有効である。しかし経済構造特有の内生変数の誤差を無視するという意味でのパラメーターの信頼性は少くなる。又しばしばあらかじめ予想される符号や数値と異なる値を生じることがある。
- 2、二段階最小自乗法 計算は古典的最小自乗法について簡単であり、内生変数を考慮に入れるという意味でのパラメーターの信頼性は高まる。そこで最も使われる可能性がある。この例に関する限り重相関はかなり落ちていく。
- 3、情報制限最尤法 全体を考慮しながら一つ一つの方程式を解いてゆくという意味では二段階と同じであるが、固有根を求めるなど計算方式がめんどうであるので、この点がおとる。
- 4、三段階最小自乗法 全体系を一度に考慮するという点で、2、

3より多く情報を含み、計算も逆行列を一度求めればよいという点で比較的簡単である。しかし二段階に比べそれほどの相違がなければ実用的という意味では難点がある。

5、完全情報最大法 全体系を考慮しながら進む点は三段階と同じであるが、逆行列をくり返し計算しなければならぬという点で最もめんどうである。また係数の標準誤差が利用できないという欠点がある。一般に構造方程式を使う場合、古典的 최소自乗法において起ったマルチコの問題(主として係数が予想された値と違うといった)を一面において回避することができると考えられるが、同時に全外生変数を考慮するという意味でのマルチコの危険はより増大するとも考えられるであろう。これらの点を考慮すると、現実には古典的 최소自乗法が最も多く使われ、ついで二段階最小自乗法が使

われるという理由がわかる。それから当然のことともいえるが、どの計算方式をとっても非常に有意な係数は、計算方式の違いによってその値があまり変わらない、安定的であるといえる。有意でない係数ほど計算方式の違いによって値が大きく違ってくるということが言える。ゴールドバーグはその著書の中でクライシスの構造方程式の中で消費関数だけをとりあげて示しているが、その場合でもそのことが言えるようである。このことを逆にいえば古典的 최소自乗法を用いても各係数が非常に有意である場合は(マルチコの場合は一応除外して)それにつづくよりはるかに構造推定を行う利点は少ないとも言えるであろう。(情報限定法と完全情報法について若干の計算上の問題点を含んだまま述べたので、この点は他日再述したい。)

書 評

戸塚秀夫著

『イギリス工場法成立史論』

——社会政策論の歴史の再構成——

飯 田 鼎

社会政策の本質論争にたいする反省がたかまって以来、その理論的再構成をめぐって新たな問題が提起されている。戸塚氏の今回の業績は、この理論的問題に真向から取り組んだものとしてまことに注目に値する労作であるといわなければならない。一読して明瞭なことは、理論構成が、社会経済史学における研究の成果の十分な評価と摂取の上に立っていることであり、社会政策の理論を、歴史的な事実の追求のなから掴みとろうとする熱情が犇々と感じとられることである。つぎのような内容から成っている。

第一編 主題と方法

序 章 研究の主題、第一章 研究の方法、

補論(一) 社会政策本質論争の一回顧——社会政策論の再構成の

ための前提——

第二編 イギリス綿工場における「原生的労働関係」

書 評

第二章 産業革命前夜の綿業労働者

第三章 アークライト工場の出現と教区徒弟

第四章 蒸気力工場の展開と「自由な児童」

第五章 工場制の発展と「原生的労働関係」の克服

補論(二) 「原生的労働関係」の理論

第三編 イギリス初期工場法と「原生的労働関係」

第六章 問題の設定

第七章 初期工場立法の沿革

第八章 初期工場立法の成立根拠

第九章 初期工場立法の諸結果

補論(三) 初期工場立法の理論

補論(四) イギリス産業革命期における労働政策の転回

著者はすでに、社会政策論をもって、大河内理論における如く、「政策提案の学」ではなく、「政策批判の学」として再構成されるべきであるという、まことにユニークな問題提起をもって知られているが、そのような理論的基底の上に立って、つぎのようにいわれる。「戦後約二〇年間のこの分野での研究史をふまえた上で、現在われわれに要請されることは、社会政策学の伝統的な枠からはなれて進められてきた労働問題プロパーについての近來の理論的、実証的研究の成果を前提した上で、かつて提起された問題についての解答を、政策研究の領域において積極的に提示していくことにあるということができる。その場合、社会改良的諸施策についての歴史的・実証的研究が、従來の社会政策理論の真理性を吟味する上で