Title	回帰線導出の方法（一）
Sub Title	Methods of regression
Author	佐藤, 保
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1966
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.59, No.8 (1966. 8) ,p.857(55)- 875(73)
JaLC DOI	10.14991/001.19660801-0055
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19660801-0055

力をめぐる取引関係の重視こそ、労働問題解決の基柢をなすものであるとする見解の発生の必然性を、われわれはよく理解することができるのである。

従って、わたくしは、社会政策学のほかに、労働組合論や労資関係論、労働市場論、あるいは賃金論や社会保障論などのさまざまなテーマで、いわゆる労働問題に接近することは基本的に正しいし、その相互の間における学問的交流が保たれている限り、望ましいことであると考える。それでは、社会政策学は、そうした個別研究にそのすべてを譲りわたして、もはや形骸と化し、その存立の基盤を失ってしまうのではないかという疑問がおこるかもしれない。しかしそうではない。さきにものべたように、社会政策学は、資本制国家による政策批判の学として存在するのであり、そうである限り、それは、資本主義の体制批判の学として、資本制社会そのものと運命をともにするというのが筆者の見解である。なぜそうであるのか。しばしば指摘したように、社会政策は、あくまでも社会改良であり、その意味で、それは明らかに二面性をもたざるをえない。すなわちそれは、一方において、労働者階級にたいする譲歩としてあらわれると同時に、他方、労働者階級の意識の尖鋭化を緩和し、もしくはこれを暴圧するところのものである。資本主義のそれぞれの段階ないしはさまざまの局面において、それらの手段が意識的にとられることは、すでに社会政策史にかんする尨大な研究がわれわれに教えるところである。資本の側から、国家権力を媒介として、労働者階級にたいし、どのような政策がうち出されるかは、資本主義発展段階の相違や、支配的権力機構の態様、労働者階級の組織状態などのさまざまな要因によって左右されるところであるが、問題は、資本制社会の危機的な段階においてこそ、社会政策学の研究は、労働問題の各個の研究よりもさらに重要な意義を獲得するからである。社会政策研究にかんする古典的な業績、とりわけ風早八十二氏の「日本社会政策史」および故服部英太郎教授の「ドイツ社会政策論史」は、われわれにそれを訴えてやまない（未完）。

（追記　文中、非礼にわたる点、隅谷、氏原両教授に御寛恕をお願い致す次第です。）

研究ノート

回帰線導出の方法（一）

佐藤　保

ここで述べようとすることは、計量経済学で現在使われている回帰線導出の具体的方法を示すと共にその性格に若干ふれることである。導出の方法は、

1、古典的最小自乗法の計算
2、誘導形の計算
3、間接最小自乗法の計算
4、二段階最小自乗法の計算
5、三段階最小自乗法の計算
6、構造パラメーターから誘導形の逆算
7、情報制限最尤法の計算
8、完全情報最尤法の計算

である。

計算の方式は Goldberger Econometric Theory と Klein A Textbook of Econometrics（宮沢光一、中村貢訳）による。計算の多くは大学院の田中、井原、黒田、蓑谷の諸氏によって行われた。

一、古典的最小自乗法の計算

普通最もよく知られ、かつ最も多く使われるのは多元回帰と呼ばれる方法である。以下いろいろな方法を例示するため、最初に使われる式と資料をあげておく。ここで用いられる式は、

(1.1)　(1)　$Y_1=a_0+a_1Y_2+a_2X_1$

　　　(2)　$Y_1=b_0+b_1Y_2+b_2X_2+b_3X_3$

という二つの式である。変数は、おのおの平均からの偏差をとって、

(1.2)　(1)　$y_1=a_1y_2+a_2x_1$

　　　(2)　$y_1=b_1y_2+b_2x_2+b_3x_3$

の形にして示しておいた方が便利な場合もあろう。（大文字はなまの数、小文字は平均からの偏差を示すことにする）

Y_1＝セメントの生産量（需要量および供給量と考えられる。）

Y_2＝セメントの価格

X_1＝総投資量

X_2＝石炭価格指数（原材料価格、あるいは生産コストの代用として用いられた。）

X_3＝セメント容量（セメントの生産能力を示す。）

従って(1)はセメントの需要函数を示し、(2)はセメントの供給函数を示すことになる。資料は時系列で次のように与えられた。

	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3
昭和 27	7096	8330	1163.5	100.0	9241
28	8741	8250	1505.1	95.3	10575
29	10640	8000	1507.6	90.8	12834
30	10519	7697	1469.0	88.1	16230
31	12969	6497	2044.9	90.8	17514
32	15107	7000	2684.3	97.6	18696
33	14904	6700	2665.3	95.7	21408
34	17169	6300	3263.2	91.4	23148
35	22425	6700	4339.9	88.4	29020
36	24484	6000	5985.2	86.6	31200
37	28662	6350	6534.6	84.9	35568
38	29766	6275	7083.5	82.2	43200

ここに昭和27年から38年まで12年間の資料があるが、このうち最初の10年の資料を使って計算を行い、最後の2年間を予測するものとする。計算の便宜のために記号を行列で示すことにすると、古典的最小自乗法では、左辺の変数を従属変数として、右辺の変数を独立変数とする。右辺は原因を示す変数で左辺は結果を示す変数である。誤差は従属変数のみに存在して独立変数には存在しない。形式として、独立変数をk個とすれば、

(1.3) $y_t=\beta_1x_{t1}+\beta_2x_{t2}+\cdots\cdots+\beta_kx_{tk}+e_t$

行列の形にすれば　　$(t=1,\cdots\cdots T)$

(1.4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots\cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{T1} & \cdots\cdots & x_{Tk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix}$

(1.5) $Y=X\beta+e$

と書くことができる。eは残差を示しているが、残差の二乗和を最小にするようにβをきめるのが最小自乗法であり、それによって正規方程式は、

(1.6) $X'Xb=X'Y$

と書ける。X'はXの転置行列、bはβの推定量である。$X'X$は独立変数の二次の積率行列、$X'Y$は独立変数と従属変数の積率行列を示すことになる。

(1.7) $b=(X'X)^{-1}X'Y$

$(X'X)^{-1}$ は $X'X$ の逆行列を示す。

としてとくことができる。重相関係数Rは、

(1.8) $R^2=1-\dfrac{\Sigma e^2}{\Sigma y^2}$　　(1.9) $R=\sqrt{R^2}$

$=\dfrac{bX'Y}{\Sigma y^2}$

として計算できる。回帰係数の常数は、

$b_0=\bar{Y}-b_1\bar{X}_1-\cdots\cdots\cdots\cdots-b_K\bar{X}_K$

として計算される。次に誤差の分布が正規分布をしていると仮定されるならば最尤推定量を計算することができ、これからbの共分散行列を計算して、偏回帰係数のt検定を行うことができる。

(1.10) $S_{bb}=S^2(X'X)^{-1}$　　S_{bb} は係数の共分散行列

$$S^2=\frac{\Sigma e}{T-K-1}=\frac{Y'Y-b'X'Y}{T-K-1}$$

$\dfrac{b_K-\beta_K}{S_{KK}}$ は自由度 t_{T-K-1} の t 分布をする。

普通は偏回帰係数を計算したのち、その下に( )をしてその標準誤差を書いておく。自由度によって異なるが、偏回帰係数の絶対値が、ほぼ標準誤差の二倍以上あれば係数が有意かそれに近いと判断されるからである。以上のことを先の式、

(1)　$y_1=a_1y_2+a_2x_1+e$

(2)　$y_1=b_1y_2+b_2x_2+b_3x_3+e$

にあてはめてみれば、同様のことであるから、(2)は省略することにして(1)について書いてみる。まず正規方程式は、

(1.11) $\begin{aligned} a_1\Sigma y_2^2+a_2\Sigma y_2x_1&=\Sigma y_1y_2 \\ a_1\Sigma y_2x_1+a_2\Sigma x_1^2&=\Sigma y_1x_1 \end{aligned}$

となり、

(1.12) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Sigma y_2^2 & \Sigma y_2x_1 \\ \Sigma y_2x_1 & \Sigma x_1^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \Sigma x_1y_2 \\ \Sigma y_1x_1 \end{pmatrix}$

から a_1、a_2を計算できる。

次に、

(1.13) $R^2=\dfrac{a_1\Sigma y_1y_2+a_2\Sigma y_1x_1}{\Sigma y_1^2}$　　$R=\sqrt{R^2}$

から重相関係数を計算できる。変数をもとに戻したときの

$$Y=a_0+a_1Y_1+a_1X_1+e$$

の a_0は、

(1.14) $a_0=\bar{Y}_1-a_1\bar{Y}_2-a_2\bar{X}_1$

で示される。偏回帰係数の共分散行列をつくるため、まず、

(1.15) $S^2=\dfrac{\Sigma y_1^2-a_1\Sigma y_1y_2-a_2\Sigma y_1x_1}{10-2-1}$

を計算して、

(1.16) $S_{aa}=S^2\begin{pmatrix} \Sigma y_2^2 & \Sigma y_2x_1 \\ \Sigma y_2x_1 & \Sigma x_1^2 \end{pmatrix}^{-1}$

この行列の対角線の要素の平方根が a_1と a_2の標準誤差を示すことになる。そして、

(1.17) $t=\dfrac{a_1-\alpha_1}{S_{a1}}$　　$t=\dfrac{a_2-\alpha_2}{S_{a2}}$　　自由度7の t 分布

母数の検定では $\alpha=0$を検定するのであるから実際上は、

$t_7=\dfrac{a_1}{S_{a1}}$　　$t_7=\dfrac{a_2}{S_{a2}}$

として自由度7の t 分布の5％点をみてその値より大きければ a_iが有意であると判定される。

以上の計算を IBM 16・20 電子計算機によって計算すると次の結果を得た。記号を説明しておくと、

CASE 1 D. F. 7

MEANS ADJUSTED BY 10

.71474000 E+04 .26628000 E+04 .14405400 E+05

MOMENT MATRIX BY ROW, TRIANGULAR M.

.65229400 E+07 −.93642300 E+0.7 −.37122300 E+08 .20941569 E+08 .76003970 E+08

VARIANCES OF DEP. VAR., NOT ADJUSTED

.29112880 E+09

ELEMENTS OF INVERSE BY ROW, SQUARE M

.42814957 E−06 .19145131 E−06 .19145131 E−06 .13336126 E−06

DEPENDENT VARIABLE NO. 1

REGRESSION COEF.	STANDARD DEVIAT.	ESTIMATED T VALUE	NO
−.13428373 E+01	.82297691 E+00	.16316828 E+01	1
.30288719 E+01	.45930877 E+00	.65944133 E+01	2
.15937915 E+05	.69124291 E+04	.23056894 E+01	C

STANDARD ERROR .12577371 E+04 SQUARED ST. ERR. .15819028 E+07
MULT. COR. COEF. .98079772 E+00 ADJUST. COR. COEF .97524186 E+00

STANDARD COEF.	DELET. LOSS SS.	NO
−.20100297 E+00	.42116402 E+07	1
.81234950 E+00	.68791078 E+08	2

OBSERVED VALUE	ESTIMATED VALUE	RESIDUAL	ACCUMULATED RES.
.70960000 E+04	.82761734 E+04	−.11801734 E+04	−.11801734 E+04
.87410000 E+04	.94182630 E+04	−.67726300 E+03	−.18574364 E+04
.10640000 E+05	.97615442 E+04	.87845600 E+03	−.97898040 E+03
.10519000 E+05	.10051509 E+05	.46749100 E+03	−.51148940 E+03
.12969000 E+05	.13407242 E+05	−.43824200 E+03	−.94973140 E+03
.15107000 E+05	.14668454 E+05	.43854600 E+03	−.51118540 E+03
.14904000 E+05	.15013758 E+05	−.10975800 E+03	−.62094340 E+03
.17169000 E+05	.17361855 E+05	−.19285500 E+03	−.81379840 E+03
.22425000 E+05	.20085907 E+05	.23390930 E+04	.15252946 E+04
.24484000 E+05	.26009296 E+05	−.15252960 E+04	−.14000000 E−02

MEAN OF RESIDUAL −.14000000 E−03
M. SUC. SQ. DIFFERENCE .28981095 E+07
VARIANCE OF RESIDUAL .11073229 E+07
DURBIN-WATSON RATIO .26172216 E+01

CASE 2 D. F. 6

MEANS ADJUSTED BY 10

.71474000 E+04 .92470000 E+02 .18986600 E+05 .14405400 E+05

MOMENT MATRIX BY ROW, TRIANGULAR M.

.65229400 E+07 .16547600 E+05 −.49901000 E+08 −.37122300 E+08 .17830100 E+03
−.18334800 E+06 −.13494800 E+06 .48876740 E+09 .37168450 E+09

VARIANCES OF DEP. VAR., NOT ADJUSTED

.29112880 E+09

ELEMENTS OF INVERSE BY ROW, SQUARE M

.72190859 E−06 .14312709 E−04 .79072717 E−07 .14312708 E−04 .94142765 E−02
.49927781 E−05 .79072717 E−07 .49927781 E−05 .11991846 E−07

DEPENDENT VARIABLE NO. 1

REGRESSION COEF.	STANDARD DEVIAT.	ESTIMATED T VALUE	NO
.65972410 E+00	.96216042 E+00	.68566954 E+00	1
.53979740 E+02	.10987524 E+03	.49128211 E+00	2
.84805669 E+00	.12400791 E+00	.68387306 E+01	3
−.11426029 E+05	.15183681 E+05	.75252035 E+00	C

STANDARD ERROR .11324170 E+04 SQUARED ST. ERR. .12823683 E+07
MULT. COR. COEF. .98669707 E+00 ADJUST. COR. COEF .97997790 E+00

STANDARD COEF.	DELET. LOSS SS.	NO
.98750986 E−01	.60289611 E+06	1
.42244005 E−01	.30950995 E+06	2
.10988373 E+01	.59974097 E+08	3

OBSERVED VALUE	ESTIMATED VALUE	RESIDUAL	ACCUMULATED RES.
.70960000 E+04	.73043378 E+04	−.20833780 E+03	−.20833780 E+03
.87410000 E+04	.81291626 E+04	.61183740 E+03	.40349960 E+03
.10640000 E+05	.96370830 E+04	.10029170 E+04	.14064166 E+04
.10519000 E+05	.12171442 E+05	−.16524420 E+04	−.24602540 E+03
.12969000 E+05	.12614423 E+05	.35457700 E+03	.10855160 E+03
.15107000 E+05	.14315729 E+05	.79127100 E+03	.89982260 E+03
.14904000 E+05	.16315181 E+05	−.14111810 E+04	−.51135840 E+03
.17169000 E+05	.17523772 E+05	−.35477200 E+03	−.86613040 E+03
.22425000 E+05	.22376536 E+05	.48464000 E+02	−.81766640 E+03
24484000 E+05	.23666329 E+05	.81767100 E+03	.46000000 E−02

MEAN OF RESIDUAL .46000000 E−03
M. SUC. SQ. DIFFERENCE .20907176 E+07
VARIANCE OF RESIDUAL .76942205 E+06
DURBIN-WATSON RATIO .27172571 E+01

最初の Case 1 はこの場合(1)を示す、したがって Case 2 は(2)を示す。D.F. は自由度、この場合7である。二行目は平均、順序は$\bar{Y}_1$、$\bar{Y}_2$、$\bar{X}_1$の順、(2)についても同様の順序である。次の積率行列は右上の三角について示してある。対称行列であるからこれだけ示せばわかる。逆行列についてはすべてのべてある。次に偏回帰係数と常数、その標準誤差、t検定をしたときのtの値が示されている。数字を示す際のEは10の何乗かを示す。E+04は10の4乗、E−02は10のマイナス2乗を示す。

二、二段階最小自乗法の計算
(間接最小自乗法を含む)

古典的最小自乗法が一つ一つの方程式を別々にあつかって推定するのに対して、同時方程式体系によって推定を行うとする場合がある。同時方程式を考えるということは、(1)と(2)と両方を考えてパラメーター、a_0、a_1、a_2とb_0、b_1、b_2、b_3を求めるということであるが、同時方程式の詳しい性格はここでは省略する。ただ前に述べたことと関連していえば、yは内生変数と呼ばれxは外生変数と呼ばれる。yは経済体系内部できめられる変数であり、したがってy_1とy_2は相互に関係しあう変数で、いずれが原因・結果とはいえないことになる。xは経済体系の外から与えられる変数で、xが原因を示す変数でyが結果を示す変数となりその反対方向はない。古典的最小自乗法では、y_2も原因を示す変数としてとりあつかわれた。この点が異ってくることになる。別の言葉でいえば両辺に誤差を含む変数があらわれているともいえる。

同時方程式をとりあつかう場合にまず最初に行うことは、おのおのの方程式が識別の条件をみたしているかどうかを調べることである。それは次の方法による。一般に、M個の内生変数とK個の外生変数があるとき、構造方程式は、

(2.1)

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{11}y_1(t)+\gamma_{21}y_2(t)+\cdots+\gamma_{M1}y_M(t)+\beta_{11}x_1(t)+\cdots+\beta_{K1}x_K(t)+u_1=0\\
&\vdots\\
&\gamma_{1M}y_1(t)+\gamma_{2M}y_2(t)+\cdots+\gamma_{MM}y_M(t)+\beta_{1M}x_1(t)+\cdots+\beta_{KM}x_K(t)+u_M=0
\end{aligned}
$$

(2.2) $Y'(t)\Gamma+X'(t)B+u'(t)=0$

$$
\Gamma=\begin{pmatrix}\gamma_{11}&\cdots&\gamma_{1M}\\ \vdots&&\vdots\\ \gamma_{M1}&\cdots&\gamma_{MM}\end{pmatrix}
\qquad
B=\begin{pmatrix}\beta_{11}&\cdots&\beta_{1M}\\ \vdots&&\vdots\\ \beta_{K1}&\cdots&\beta_{KM}\end{pmatrix}
$$

と書ける(この書き方は必ずしも一般的ではない)。ここで内生変数を外生変数のみで表わした形を誘導形というがこの形に直す。

(2.3)

$$
\begin{aligned}
y_1(t)&=\Pi_{11}x_1(t)+\Pi_{21}x_2(t)+\cdots\cdots+\Pi_{K1}x_K(t)+v_1(t)\\
y_2(t)&=\Pi_{12}x_1(t)+\Pi_{22}x_2(t)+\cdots\cdots+\Pi_{K2}x_K(t)+v_2(t)\\
&\vdots\\
y_M(t)&=\Pi_{1M}x_1(t)+\Pi_{2M}x_2(t)+\cdots\cdots+\Pi_{KM}x_K(t)+v_K(t)
\end{aligned}
\qquad t=1,\cdots\cdots M:
$$

(2.4)

$$
\begin{aligned}
Y'(t)&=X'(t)(-B\Gamma^{-1})+u'(t)(-\Gamma^{-1})\\
&=X'(t)\Pi+v'(t)
\end{aligned}
\qquad t=1,\cdots\cdots T
$$

(2.5)

$$
\Pi=-B\Gamma^{-1}=\begin{pmatrix}\Pi_{11}\ \Pi_{12}&\cdots\cdots&\Pi_{1K}\\ \vdots&&\vdots\\ \Pi_{K1}\ \Pi_{K2}&\cdots\cdots&\Pi_{KM}\end{pmatrix}
$$

あるいは簡単に

$$Y=X\Pi+V$$

と書くこともできる。これでわかるように、誘導形の係数であるΠは本来構造方程式の係数であるBとΓがわからなければわからないものである。しかし(2.3)式は右辺が外生変数ばかりであるから、直接最小自乗法を適用できることになる。したがって(2.3)に最小自乗法を用いてΠの推定値を計算することができるが、何等かの方法でB、Γを推定して、それから$-B\Gamma^{-1}$を計算した場合に、最小自乗法から計算したΠの推定値とは必ずしも一致しないことがある。最小自乗法を用いてΠの推定量Pを求めれば、

$$Y=X\Pi+V$$

から、

$$P=(X'X)^{-1}X'Y$$

と求められる。これは通常の最小自乗法の求め方である。

現在の資料によってこれを求めると、

(2.6)

$$
\begin{aligned}
y_1&=\Pi_{11}x_1+\Pi_{21}x_2+\Pi_{31}x_3+v_1\\
y_2&=\Pi_{12}x_1+\Pi_{22}x_2+\Pi_{32}x_3+v_2
\end{aligned}
$$

という形になる。

$$
Y=\begin{pmatrix}Y'(1)\\ \vdots\\ Y'(T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1(1)&\cdots\cdots&y_M(1)\\ \vdots&&\vdots\\ y_1(T)&\cdots\cdots&y_M(T)\end{pmatrix}
$$

$$
X=\begin{pmatrix}X'(1)\\ \vdots\\ X'(T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(1)&\cdots\cdots&x_K(1)\\ \vdots&&\vdots\\ x_1(T)&\cdots\cdots&x_K(T)\end{pmatrix}
$$

$$
U=\begin{pmatrix}u'(1)\\ \vdots\\ u'(T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1(1)&\cdots\cdots&u_M(1)\\ \vdots&&\vdots\\ u_1(T)&\cdots\cdots&u_M(T)\end{pmatrix}
$$

と書けば、

$$Y\Gamma+XB+U=0$$

と全体を書くことができる。

次に個々の方程式について識別の条件をみてゆくが、そのために、まずm番目の方程式は、

(2.7) $Y\gamma_m+X\beta_m+u_m=0$

と書けるが、この方程式にはγ_mのM**個が0でありβ_mのK**個が0であるとしよう。

$$M^*=M-M^{**}$$

$$K^*=K-K^{**}$$

とする。すなわち今問題としているm番目の方程式は、全体でm個のうち、M*個の内生変数と全体でK個のうちのK*個の外生変数とを

含んでいるわけである。これを、

(2.8)　$Y_*\gamma_*+Y_{**}\gamma_{**}+X_*\beta_*+X_{**}\beta_{**}+u=0$

と書く。Y_*はその方程式に入っている内生変数、γ_*はその係数（普通0ではない）、Y_{**}はその方程式に入っていない内生変数、γ_{**}は0である。外生変数についても同様である。X_*はその方程式に入っている外生変数、β_*はその係数（普通0ではない）、X_{**}はその方程式に入っていない外生変数、β_{**}は0である。誘導形についても分割する。

$$Y=X\Pi+V$$

を、

(2.9)　$$(Y_*\ Y_{**})=(X_*\ X_{**})\begin{pmatrix}\Pi_{*,*} & \Pi_{*,**}\\ \Pi_{**,*} & \Pi_{**,**}\end{pmatrix}+(V_*\ V_{**})$$

Πの分割では最初の＊印は外生変数（先決変数たとえば y_{-1}（一期間前のyの値）等を含む）に関係し、二番目の＊印は内生変数に関係する。$\Pi_{*,*}$はK^*行M^*列の行列、$\Pi_{**,*}$はK^{**}行M^*列の行列、$\Pi_{*,**}$はK^*行M^{**}列の行列、$\Pi_{**,**}$はK^{**}行M^{**}列の行列となる。先の関係から、

(2.10)　$$\begin{pmatrix}\Pi_{*,*} & \Pi_{*,**}\\ \Pi_{**,*} & \Pi_{**,**}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_*\\ 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\beta_*\\ 0\end{pmatrix}$$

$$-\Pi_{*,*}\gamma_*=\beta_*$$

$$\Pi_{**,*}\gamma_*=0$$

(2.11)　$\Pi_{**,*}\gamma_*=0$

からγ_*が求められればそのγ_*を上の式、

(2.12)　$-\Pi_{*,*}\gamma_*=\beta_*$

に代入してやればβ_*を求めることができる。

$$\Pi_{**,*}\gamma_*=0$$

の式は、M^*個の未知数を含むK^{**}個の同時方程式の体系であるから、未知数の1個を1とおくことによる正規化を行えば、

(2.13)　$r(\Pi_{**,*})\leqq M^*-1$

$r(\Pi_{**,*})$ は $\Pi_{**,*}$ の階数（rank）

でなければならない。

(2.14)　$r(\Pi_{**,*})=M^*-1$

であれば比例的に係数を一義的にきめることができる。そこで識別の条件として、

rank condition

$$r(\Pi_{**,*})=M^*-1$$

order condition

$$K^{**}\geqq M^*-1$$

があげられる。ランクの条件はこれでなければ識別されないということでまずこれが調べられなければならない。次のオーダーの条件は、$K^{**}=M^*-1$ ならば just identify といい、$K^{**}>M^*-1$ のとき、over identify という。just の場合は先に最小自乗法でΠの推定量Pを計算したが、これから構造パラメーター$\gamma\beta$を求めることができる。したがって$\gamma\beta$から逆に戻してΠを推定した値は、当然のことながら先の最小自乗法による推定と一致する。しかし、over の場合は、Pからすぐに$\gamma\beta$を求めることができないから、構造パラメーターから誘導形パラメーターを逆算した場合一致しないことになる。

このことを現在の場合にあてはめてみよう。

(2.15)　(1)　$y_1=a_1y_2+a_2y_1+u_1$

(2)　$y_1=b_1y_2+b_2x_2+b_3x_3+u_2$

これをかきかえると、

(2.16)　(1)　$-y_1+a_1y_2+a_2y_1+u_1=0$

(2)　$-y_1+b_1y_2+b_2x_2+b_3x_3+u_2=0$

(2.17)　$$(y_1\ y_2)\begin{pmatrix}-1 & -1\\ a_1 & b_1\end{pmatrix}+(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & b_2\\ 0 & b_3\end{pmatrix}$$

$$\Gamma=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ a_1 & b_1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & b_2\\ 0 & b_3\end{pmatrix}$$

であることがわかる。これよりΠを求める。

(2.18)　$$\Pi=-B\Gamma^{-1}$$

$$=-\begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & b_2\\ 0 & b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ a_1 & b_1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=-\begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & b_2\\ 0 & b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1/(a_1-b_1) & 1/(a_1-b_1)\\ -a_1/(a_1-b_1) & -1/(a_1-b_1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-a_2b_1/(a_1-b_1) & -a_2/(a_1-b_1)\\ a_1b_2/(a_1-b_1) & b_2/(a_1-b_1)\\ a_1b_3/(a_1-b_1) & b_3/(a_1-b_1)\end{pmatrix}$$

(2.19)　$$(y_1\ y_2)=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{array}{c}\begin{array}{cc}(y_1) & (y_2)\end{array}\\ \begin{pmatrix}-a_2b_1/(a_1-b_1) & -a_2/(a_1-b_1)\\ a_1b_2/(a_1-b_1) & b_2/(a_1-b_1)\\ a_1b_3/(a_1-b_1) & b_3/(a_1-b_1)\end{pmatrix}\end{array}+(v_1v_2)$$

ここで、(1)方程式についてランクの条件をみてみる。$\Pi_{**,*}$ は全体のΠのうち、その方程式に入っていない外生変数と入っている内生変数からつくられる行列をみるということで、この場合（1）では、x_2、x_3とy_1、y_2、とを結ぶ行列を意味する。変数が多い場合にはΠをみて適当に選び出さなければならない。この場合では、

(2.20)　(1)　$$\Pi_{**,*}=\begin{pmatrix}a_1b_2/(a_1-b_1) & b_2/(a_1-b_1)\\ a_1b_3/(a_1-b_1) & b_3/(a_1-b_1)\end{pmatrix}$$

である。この行列のランクをみると、第1列は第2列の a_1 倍であるからランクは1である。一方M^*（その方程式に入っている内生変数）は y_1とy_2の二つで　$M^*-1=1$　である。

$$1=2-1$$

で(1)はランクの条件をみたしている。次にオーダーの条件をみると、K^{**}（その方程式に入っていない外生変数）は x_2とx_3で2であり、

$$K^{**}>M^*-1$$

の条件に入れると、

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
x_1	.10000000E+01	−.54398195E+00	.94679313E+00	.97339518E+00	−.80120823E+00
x_2	−.54398195E+00	.10000000E+01	−.62157664E+00	−.59230707E+00	.48521478E+00
x_3	.94679313E+00	−.62157664E+00	.10000000E+01	.98568452E+00	−.88180014E+00
y_1	.97339518E+00	−.59230707E+00	.98568452E+00	.10000000E+01	−.85186380E+00
y_2	.80120823E+00	.48521478E+00	−.88180014E+00	−.85186380E+00	.10000000E+01

$$2>2-1$$

となってオーダーの条件をみたす。ただし over identify であることがわかる。

次に(2)方程式の方はどうか、

(2.21) (2) $\Pi_{**,*}=(-a_2b_1/(a_1-b_1)$

$$-a_2/(a_1-b_1))$$

$$M^*=2$$

$\Pi_{**,*}$ のランクは1であるから、

$$1=2-1$$

でランクの条件をみたす。$K^{**}=1$ であるから、

$$1=2-1$$

でオーダーの条件もみたし、just identify であることがわかる。したがって(1)(2)とも計算可能である。

(2)については、just であるから誘導形から直接構造パラメーターを推定できる。先に述べた方式により、まず

$$P_{**,*}\hat{\gamma}_*=0$$

より$\hat{\gamma}_*$を求め、

$$-P_{*,*}\hat{\gamma}_*=\hat{\beta}_*$$

より$\hat{\beta}_*$を求める。これは先の $\Pi_{**,*}$ をみてもすぐわかることであるが、よりていねいに書けば、今誘導形を、

(2.22) $y_1=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$

$$y_2=d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3$$

とすれば、(2)では、

$$P_{**}=\begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ \cdot & \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} P_{*,*} & P_{*,**} \\ P_{**,*} & P_{**,**} \end{pmatrix}$$

$$P_{**,*}=(c_1 \quad d_1)$$

$$P_{*,**}=0$$

$$P_{**,**}=0$$

であることがわかる。

(2.23) $P_{**,*}\hat{\gamma}_*=0 \quad (c_1 \quad d_1)\begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix}=0$

$$-c_1+d_1b_1=0 \quad b_1=\frac{c_1}{d_1} \quad b_1=\hat{\gamma}_{22}$$

$$\hat{\beta}_*=-\begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$b_2=c_2-d_2b_1 \quad b_3=c_3-d_3b_1$$

$$b_2=\hat{\beta}_{22} \quad b_3=\hat{\beta}_{32}$$

と一義的に計算できる。just identify の場合誘導形から構造パラメーターを推定するやり方を間接最小自乗法という。

後でも若干ふれるが、このような計算の際、これは古典的最小自乗法でもそうであるが、各変数間の単純相関係数をまずみることが必要である。それだけみても大体のことはわかるといってもよい。

一般に独立変数間に高い相関関係がある場合、マルチコリニアリチーがあるというが、同時方程式の場合は、それが一つの方程式内部だけではなく、他の方程式との関係にまでおよぶからである。現在の場合の相関行列は前頁の表のようになる。

(2)の場合は just であるからよいが、(1)の場合は over であるから、このままでは一義的に構造パラメーターをきめられない。そこで二段階最小自乗法の方法を用いる。二段階最小自乗法の考えは現在の場合でいえば、

(1) $y_1=a_1y_2+a_2x_1+u_1$

(2) $y_1=a_1y_2+b_2x_2+b_3x_3+u_2$

(1)式を例にとれば、このままでは普通の最小自乗法は使えないから まずy_2について誘導形、

$$y_2=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+u_2$$

を求め、これよりy_2の推定値$\hat{y}_2$を求めておく。これをもとの式に代入する。

(2.24) (1) $y_1=a_1\hat{y}_2+a_2X_1+u_1$

こうすれば普通の最小自乗法を使ってよい。(2)についても同様に$\hat{y}_2$をもとの式に代入してやればよい。正規方程式は(1)では、

(2.25) $a_1\sum\hat{y}_2^2+a_2\sum\hat{y}_2x_1=\sum y_1\hat{y}_2$

$$a_1\sum\hat{y}_2x_1+a_2\sum x_1^2=\sum y_1x_1$$

となり、その式に入っている右辺の内生変数を誘導形の推定値でおきかえて最小自乗法を用いればよい。これを行列の記号で書けば、

(2.26) $y=Y_1\gamma_1+X_1\beta_1+u$

内生変数を y と Y_1 に分け、Y_1 はその方程式に入っている内生変数、X_1はその方程式に入っている外生変数とする。Y_1に対する誘導形のパラメーターをP_{X_1}とすると、

(2.27) $P_{X_1}=(X'X)'X'Y_1$

で示されるから、これより

(2.28) $\hat{Y}=XP_{X_1}$

その方程式の構造パラメーターγ_1、β_1の推定量をc、bとすれば、Y_1の代りに$\hat{Y}_1$を代入して、正規方程式は、

(2.29) $\begin{pmatrix} \hat{Y}_1'\hat{Y}_1 & \hat{Y}'X_1 \\ X_1'\hat{Y}_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{Y}_1'y \\ X_1'y \end{pmatrix}$

これをこのまま忠実にやってもよいが、計算の便宜上、更に変形して、

$$\hat{Y}_1'\hat{Y}_1=Y'\hat{Y}_1 \qquad X_1'\hat{Y}_1=X_1'Y_1$$

を使い、$\hat{Y}_1=XP_{X_1}$ を代入すれば正規方程式は次のようになる。

(2.30) $\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'y \\ X_1'y \end{pmatrix}$

これよりc、bを求めれば良く、この正規方程式には$\hat{Y}_1$は入っていないから直接のデーターを使って解くことができる。係数の標準誤差を求めるために、係数の分散、共分散行列を求めるが、これは普通の最小自乗法に類似して行われればよい。

(2.31) $S_{cb,cb}=S^2\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}^{-1}$

S^2はYについての理論値と実際値との差の二乗和であるが、

(2.32) $S^2=T^{-1}(y-Y_{1c}-X_1b)'(y-Y_{1c}-X_1b)$

$=T^{-1}(y'y+c'Y_1'Y_c-2c'Y_1'y-b'X'Xb)$

$S_{cb,cb}$が求められれば、この行列の対角線の値の平方根を求めてゆけば、それぞれの内生変数および外生変数の係数の標準誤差となる。just identify の場合、間接最小自乗法を用いても二段階最小自乗法を用いても同一の結果となる。

現在の場合の計算は次のようになる。まず全体の積率行列を計算しておく。正確にいえば平均のまわりの二次の積率の行列である。

たとえば1行2列目の −.33240380E+05 は $\Sigma(X_1-\bar{X}_1)(X_2-\bar{X}_2)$ の値で普通に書けば、−33240.380 であることを示している。あるいは変動行列といってもよい。

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
x_1	.20941569E+08	−.33240380E+05	.95561043E+08	.76003989E+08	−.93642286E+07
x_2	−.33240380E+05	.17830100E+03	−.18305971E+06	−.13494798E+06	.16547520E+05
x_3	.95561043E+08	−.18305971E+06	.48645469E+09	.37093833E+06	−.49672198E+08
y_1	.76003989E+08	−.13494798E+06	.37093833E+09	.29112880E+09	−.37122290E+08
y_2	−.93642286E+07	.16547520E+05	−.49672198E+08	−.37122290E+08	.65229498E+07

次に外生変数の積率だけをとりだしてその逆行列を求めておくと次のようになった。下の三行が逆行列の要素である。

	x_1	x_2	x_3
x_1	.20941569E+08	−.33240380E+05	.95561043E+08
x_2	−.33240380E+05	.17830100E+03	−.18305917E+06
x_3	.95561043E+08	−.18305971E+06	.48645469E+09
x_1	.47584141E−06	−.11831895E−04	−.97928639E−07
x_2	−.11831895E−04	.94338777E−02	.58744035E−05
x_3	−.97928639E−07	.58744035E−05	.23503791E−07

(2)については just であるから公式

$P=(X'X)^{-1}X'Y$

で誘導形のパラメーターを求めると、

(2.33) $\begin{pmatrix} .47584141E-06 & -.11831895E-04 & -.97928639E-07 \\ -.11831895E-04 & .94338777E-02 & .58744035E-05 \\ -.97928637E-07 & -.58744035E-05 & .23503791E-07 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} .76003989E+08 & -.93642286E+07 \\ -.13494798E+06 & .16547520E+05 \\ .37093833E+09 & -.49672198E+08 \end{pmatrix}$

$= \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & .143705E+01 & .21265449E+00 \\ x_2 & .668748E+01 & -.248907E+02 \\ x_3 & .48275082E+00 & -.15325198E+00 \end{array}$

これで誘導形は、

(2.34) (イ) $y_1=1.43705x_1+6.68748x_2+0.48275x_3$

(ロ) $y_2=0.21265x_1-24.8907x_2-0.15325x_3$

平均の差を用いて常数を求めて、理論値を計算してみると、

(2.35)

$\hat{Y}_1$	$\hat{Y}_2$
7597	8135
8700	8120
9764	7886
11330	7425
12795	7283
14330	7069
15600	6696
17400	6623
21632	6068
25037	6128

理論値と実際値の差を自乗して自由度6で割り、S_1^2、S_2^2を計算すると、

(2.36) $S_1^2=630366.35$　$S_2^2=214234.87$

S_1^2およびS_2^2を先の

$\begin{pmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1x_2 & \Sigma x_3^2 \\ \Sigma x_1x_2 & \Sigma x_2^2 & \Sigma x_2x_3 \\ \Sigma x_3^2 & \Sigma x_2x_3 & \Sigma x_3^2 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} .47584141E-06 & -.11831895E-04 & -.97928639E-07 \\ -.11831895E-04 & .94338777E-02 & .58744035E-05 \\ -.97928639E-07 & .58744035E-05 & .23503791E-07 \end{pmatrix}$

にそれぞれかけると、

(2.37) $\begin{pmatrix} 0.299955 & -7.458431 & -0.061731 \\ -7.458431 & 5946.800939 & 3.703027 \\ -0.061737 & 3.703027 & 0.014816 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0.101942 & -2.534804 & -0.020980 \\ -2.534804 & 2021.065563 & 1.258205 \\ -0.020980 & 1.258502 & 0.005035332 \end{pmatrix}$

となり、対角線の要素の平方根を求めれば、

(2.38) (イ) $Sx_1=0.547681$　$Sx_2=77.115504$　$Sx_3=0.121721$

(ロ) $Sx_1=0.319284$　$Sx_2=44.956263$　$Sx_3=0.070960$

を得る。

次に(2)について間接最小自乗法を使うと、

$P_{**,*}\hat{\gamma}^*=0$

ということは、

$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 1.437050 & 0.21265449 \\ x_2 & 6.68748 & -24.8907 \\ x_3 & 0.48275082 & -0.15325193 \end{array}$

(2)では$P_{**,*}$はその方程式に入っていない外生変数と、入っている内生変数であるから、結局、

(2.39) $(1.437050\ \ 0.21265449)\begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix}=0$

を解けばよい。

(2.40) $b_1=\dfrac{1.437050}{0.21265449}=6.75776$

と求められる。

$\hat{\beta}_*=-P_{*,*}\hat{\gamma}_*$

より

(2.41) $\hat{\beta}^*=\begin{pmatrix} 6.68774 & -24.8907 \\ 0.48275082 & -0.15325193 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 6.75776 \end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix} -6.68748 & -168.20537 \\ -0.48275 & -1.03563976 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 174.89285 \\ 1.51839004 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

結局、間接最小自乗法より求めた結果は、

$y_1=6.75776y_2+174.89285x_2+1.51839x_3$

となって古典的最小自乗法より求めた結果とはかなり違う。

次に二段階最小自乗法によって(1)(2)を求めてみよう。まず(1)につ

いて、先の公式

$$\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'y \\ X_1'y \end{pmatrix}$$

で現在の場合 $Y_1=y_2$, $y=y_1$, $X_1=x_1$, $c=a_1$, $b=a_2$ を意味する $Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1$　$Y_1'X(X'X)^{-1}X'y$ を求めるため、次の式をつくり、積率行列及び誘導形より適当な数値をひきだしてくると、

$$(2.42)\quad \begin{pmatrix} Y_1'X \\ y'X \end{pmatrix}\cdot(X'X)^{-1}X'Y_1$$

$$=\begin{pmatrix} -.93642286E+07 & .16547520E+05 & -.49672198E+08 \\ .76003989E+08 & -.13494798E+06 & .37093833E+09 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} .21265449E+00 \\ -.248907E+02 \\ -.15325193E+00 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} .520913559E+07 \\ -.37325475E+08 \end{pmatrix}$$

公式に代入する

$$(2.43)\quad \begin{pmatrix} .520913559E+07 & -.93642286E+07 \\ -.93642286E+07 & .20941569E+08 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -.373235475E+08 \\ .76003989E+08 \end{pmatrix}$$

$$(2.44)\quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} .520913559E+07 & -.93642286E+07 \\ -.93642286E+07 & .20941569E+08 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -.37325475E+08 \\ .76003989E+08 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -.326840E+01 \\ .216781E+01 \end{pmatrix}$$

平均を用いて常数を求めれば、

$$(2.45)\quad a_0=.1440540E+05-(-.32682036E+01)\times.71474E+04$$
$$-.21679261E+01\times.26628E+04=.31991805E+05$$

$$(2.46)\quad Y_1=-3.26840Y_2+2.16781X_1+31993.5175$$

理論値（推定値）を計算して、実際値との偏差を計算し、その自乗和よりS^2を求める（別の式で求める方法も前述した）。

(2.47)

Y_1	$\hat{Y}_1$	偏差
7096	7290	−194
8741	8292	449
10640	9115	1525
10519	10021	498
12969	15191	−2222
15109	14934	173
14904	15873	−969
17169	18477	−1308
22425	19503	2922
24484	25358	−874

$S^2=1973186$

$$(2.48)\quad S_{bc.bc}=.1973186E+07\begin{pmatrix} .520913559E+07 & -.93642286E+07 \\ -.93642286E+07 & .20941569E+08 \end{pmatrix}$$

$$=.1973186E+07\begin{pmatrix} .97863766E-06 & .43760746E-06 \\ .43760746E-06 & .24343239E-06 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} .19310341E+01 & .86348091E+00 \\ .86348091E+00 & .48033738E+00 \end{pmatrix}$$

$S^2a_1=.19310341E+01$　　$S^2a_2=.86348091E+00$

$Sa_1=.13896165E+01$　　$Sa_2=.69306376E+00$

(2)の供給函数について同様の計算を行う。先の式で、$Y_1=y_2$, $X_1=x_2$, x_3, $y=y_1$, $c=b_1$, $b=b_2, b_3$ となる。

$$(2.49)\quad \begin{pmatrix} .520913559E+07 & .16547520E+05 & -.49672198E+08 \\ .16547520E+05 & .17830100E+03 & -.18305971E+06 \\ -.49672198E+08 & -.18305971E+06 & .48645469E+09 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -.373254757E+08 \\ -.13494798E+06 \\ .37093833E+09 \end{pmatrix}$$

$$(2.50)\quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} .10522594E-04 & .20628020E-03 & .11521255E-05 \\ .20628020E-03 & .13183385E-01 & .26024495E-04 \\ .11521255E-05 & .26024495E-04 & .12949334E-06 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -.373254757E+08 \\ -.13494798E+06 \\ .37093833E+09 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} .6769584E+01 \\ .1749051E+03 \\ .1518458E+01 \end{pmatrix}$$

$$(2.51)\quad b_0=.144054E+05-.6769584E\times.71474E+04$$
$$-.1749051E+03\times.9247E+02-.1518458E+01$$
$$\times.189866E+05$$
$$=.78983355E+05$$

$$(2.52)\quad Y_1=6.769584Y_2+174.9051X_2+1.518458X_3-78983.355$$

理論値（推定値）を計算し実際値との偏差の自乗和を求めてS^2を求める。

Y_1	$\hat{Y}_1$	偏差
7096	8230	−1134
8741	9592	−851
10640	10543	97
10519	13176	−2657
12969	7474	5495
15107	13864	1243
14904	15618	−714
17169	15211	1958
22425	25900	−3475
24484	24157	327

$S^2=5734540$

$$(2.53)\quad \overline{S_{bc,bc}}=.5734540E+07\begin{pmatrix} .10522894E-04 & .20628020E-03 & .11521255E-05 \\ .20628020E-03 & .13183385E-01 & .26024495E-04 \\ .11521255E-05 & .26024495E-04 & .12949334E-06 \end{pmatrix}$$

$S^2b_1=.60343957E+02$
$S^2b_2=.75600649E+05$
$S^2b_3=.74258474E+00$
$Sb_1=.77681373E+01$
$Sb_2=.27495572E+03$
$Sb_3=.86173357E+00$

二段階最小自乗法で求めた(2)の係数と間接最小自乗法で求めた係数とは若干異っているが、これは計算誤差によるもので、本来一致すべきものである。係数を比べてみても等しいとしてよいことがわかるであろう。

三、三段階最小自乗法の計算

同時方程式体系を解く場合、二段階及び、制限情報法では全体を考慮しながらも、計算をすすめてゆく場合は一つ一つの方程式をと

いてゆく。これに対して体系全部を一時に計算しようというのが、三段階最小自乗法であり完全情報法である。一般的には後者の方がよりすぐれているといってよいであろうが、それだけ計算がたいへんになる。三段階最小自乗法では結果だけ示せば、先の

(3.1)　$y=Y_1\gamma_1+X_1\beta_1+u$

を

(3.2)　$y_1=Z_1\alpha_1+u_1$

$$y_1=y \quad u_1=u \quad Z_1=(Y_1X_1) \quad \alpha_1=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

と書く、M個の方程式については、

(3.3)　$y=Z\alpha+u$

$$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_M\end{pmatrix} \qquad Z=\begin{pmatrix}Z_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & Z_2 & & \vdots\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & Z_M\end{pmatrix}$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_M\end{pmatrix} \qquad u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_M\end{pmatrix}$$

と書ける。われわれが求めるのは α_1 から α_M までであるが、それは、

(3.4)
$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_1\\ \vdots\\ \hat{\alpha}_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S^{11}Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_1 & \cdots & S^{1M}Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_M\\ \vdots & & \vdots\\ S^{M1}Z_M'X(X'X)^{-1}X'Z_1 & \cdots & S^{MM}Z_M'X(X'X)^{-1}X'Z_M\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix}S^{11}Z_1'X(X'X)^{-1}X'y_1+\cdots\cdots+S^{1M}Z_1'X(X'X)^{-1}X'y_M\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ S^{M1}Z_M'X(X_1X)^{-1}X'y_1+\cdots\cdots+S^{MM}Z_M'X(X'X)^{-1}X'y_M\end{pmatrix}$$

として求められる。S^{ij} は二段階最小自乗法を用いて計算された誤差の、分散、共分散行列の逆行列の要素である。そして $\hat{\alpha}_1$ から $\hat{\alpha}_M$ までを計算する途中の最初の行列の逆行列がそのまま係数の分散、共分散行列となっている。そこでその対角線上の値の平方根を求めれば、係数の標準誤差を求めることができる。すなわち、行列

$$\begin{pmatrix}S^{11}Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_1 & \cdots\cdots & S^{1M}Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_M\\ \vdots & & \vdots\\ S^{M1}Z'_MX(X'X)^{-1}X'Z_1 & \cdots\cdots & S^{MM}Z_M'X(X'X)^{-1}X'Z_M\end{pmatrix}$$

の対角線上の値を求めて平方根を求めればよい。三段階最小自乗法では係数を求める途中で、係数の分散がわかってしまうのは興味あることである。

これを現在の方程式にあてはめてみると、

(3.5)　$Z_1=(Y_1X_1) \quad \alpha_1=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \beta_1\end{pmatrix} \quad Z_2=(Y_2X_2) \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}\gamma_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$

Z_1 をより詳しくいえば、

(3.6)　$Z_1=\begin{pmatrix}y_{21} & x_{11}\\ y_{22} & x_{12}\\ \vdots & \vdots\\ y_{2T} & x_{1T}\end{pmatrix}$

(3.7)　$Z_1'X(X'X)^{-1}Z_1=\begin{pmatrix}Y_1'\\ X_1'\end{pmatrix}X(X'X)^{-1}X'(Y_1X_1)$

$$=\begin{pmatrix}Y_1'X(X'X)^{-1}X'\\ X_1'X(X'X)^{-1}X'\end{pmatrix}(Y_1X_1)$$

$$=\begin{pmatrix}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X(X'X)^{-1}X'X_1\\ X_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & X'X(X'X)^{-1}X'X_1\end{pmatrix}$$

ここで誘導形の式より

(3.8)　$X_1(X'X)^{-1}X'Y^1=\hat{Y}_1$

同様に　$X_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1=X_1'\hat{Y}_1=X_1'Y_1$

$$Y_1'X(X'X)^{-1}X'X_1=Y_1'X_1$$

$$X_1'X(X'X)^{-1}X'X_1=X_1'X_1$$

(3.9)　$Z_1'X(X'X)^{-1}Z_1=\begin{pmatrix}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1\\ X_1'Y & X_1'X_1\end{pmatrix}$

同様の手法をすべてに及ぼせば、結局、

(3.10)
$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_1\\ \hat{\alpha}_2\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}S^{11}\begin{pmatrix}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1\\ X_1'Y_1 & X_1'X_1\end{pmatrix} & S^{12}\begin{pmatrix}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & Y_1'X_2\\ X_1'Y_2 & X_1'X_2\end{pmatrix}\\ S^{21}\begin{pmatrix}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_2'X_1\\ X_2'Y_1 & X_2'X_1\end{pmatrix} & S^{22}\begin{pmatrix}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & Y_2'X_2\\ X_2'Y_2 & X_2'X_2\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}^{-1}$$

$$\times\left\{\begin{matrix}S^{11}\begin{pmatrix}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_1\\ X_1'y_1\end{pmatrix}+S^{12}\begin{pmatrix}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_2\\ X_1'y_2\end{pmatrix}\\ S^{21}\begin{pmatrix}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_1\\ X_2'y_1\end{pmatrix}+S^{22}\begin{pmatrix}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_2\\ X_2'y_2\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

(3.11)　$\hat{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_1\\ \hat{\beta}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_{21}\\ \hat{\beta}_{11}\end{pmatrix}$

$$\hat{\alpha}_2=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_2\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_{22}\\ \hat{\beta}_{22}\\ \hat{\beta}_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_1\\ \hat{\alpha}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

上の行列の積を計算すれば、結局5行1列の行列となり、a_1 a_2 b_1 b_2 b_3 という(1)式(2)式のパラメーターが一度に得られるわけである。式のはんざつをいとわなければ、Zという文字を使わずに直接に公式を書いておいた方がわかりよいかもしれない。この場合パラメーターが5個であるので、5行5列の逆行列を計算することになるが、方程式体系が大きく数十個のパラメーターを含む場合は、その大きさの逆行列を計算しなければならないので大容量の電子計算機を必要とするであろう。このような場合は、まず just identify の方程式はとり除いておいて、over identify の方程式だけについて三

(3.15)

$$\begin{pmatrix} .12096595E-05\begin{pmatrix} .52091356E+07 & -.93642286E+07 \\ -.93642286E+07 & .20941569E+08 \end{pmatrix} & .54088163E-06\begin{pmatrix} .52091356E+07 & .16547520E+05 & -.49672198E+08 \\ -.93642286E+07 & -.33240380E+05 & .95561043E+08 \end{pmatrix} \\ .54088163E-06\begin{pmatrix} .52091356E+07 & -.93642286E+07 \\ .16547520E+05 & -.33240380E+05 \\ -.49672198E+08 & .95561043E+08 \end{pmatrix} & .41622924E-06\begin{pmatrix} .52091356E+07 & .16547520E+05 & -.49672198E+08 \\ .16547520E+05 & .17830100E+03 & -.18305971E+06 \\ -.49672198E+08 & -.1830597E+06 & .48645469E+09 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix} .12096595E-05\begin{pmatrix} -.37325476E+08 \\ .76003989E+08 \end{pmatrix}+.54088163E-06\begin{pmatrix} -.37325476E+08 \\ .76003938E+08 \end{pmatrix} \\ .54088163E-06\begin{pmatrix} -.37325476E+08 \\ -.13494798E+06 \\ .37093833E+09 \end{pmatrix}+.41622924E-06\begin{pmatrix} -.37325476E+08 \\ -.13494798E+06 \\ .37093833E+09 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} .63012804E+01 & -.11327528E+02 & .28175258E+01 & .89502496E-02 & -.26866779E+02 \\ -.11327528E+02 & .25332168E+02 & -.50649392E+01 & -.17979111E-01 & .51687213E+02 \\ .28175258E+01 & -.50649392E+01 & .21681946E+01 & .68875617E-02 & -.20675021E+02 \\ .89502496E-02 & -.17979111E-01 & .68875617E-02 & .74214090E-04 & -.76194804E-01 \\ -.26866779E+02 & .51687213E+02 & -.20675021E+02 & -.76194804E-01 & .20247667E+03 \end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix} -.65339781E+02 \\ .13304811E+03 \\ -.35724619E+02 \\ -.12916018E+00 \\ .35502911E+03 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} .19310839E+01 & .86350859E-00 & -.77863405E+01 & -.13134523E+03 & -.80869033E-00 \\ .86350859E-00 & .48035279E-00 & -.40575673E+01 & -.73064761E+02 & -.44985848E-00 \\ -.77863405E+01 & -.40575673E+01 & .60195542E+02 & .11127729E+04 & .65679768E+01 \\ -.13134523E+03 & -.73064761E+02 & .11127729E+04 & .42786955E+05 & .13095058E+03 \\ -.80869033E-00 & -.44985848E-00 & .65679768E+01 & .13095058E+03 & .73240952E-00 \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} -.65339781E+02 \\ .13304811E+03 \\ -.35724619E+02 \\ -.12916018E+00 \\ .35502911E+03 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -.326840E+01 \\ .216781E+01 \\ .65403\ E+01 \\ .72450\ E+02 \\ .146145E+01 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

段階の最小自乗法で計算し、just のものについては別々に計算する(例えば二段階最小自乗法によって)。このようにすれば計算の手間はそれだけ省くことができるが、係数の有効性は変らないのでこの方法を用いるのが良いであろう。それでもパラメーター数が多ければたいへんであるが、ともかく一回の計算ですむ。完全情報法がくりかえし法を使うのに比べれば簡単であるといってよいであろう。

先の三段階最小自乗法を求める式において、現在の場合、$Y_1=y_2$、$Y_2=y_2$, $X_1=x_1$, $X_2=x_2$, x_3で、$y_1=y_1$, $y_2=y_1$。この場合$Y_1=Y_2$, $y_1=y_2$という特殊形になっているため、S^{ij}を除いて、すべて二段階最小自乗法を計算する際に計算されているか、あるいは積率行列をみることによって簡単に要素を求められる。しかし通常はこうはゆかないから対角線の要素については新たな計算を行わなければならないであろう。次にS^{ij}を計算しなければならないが、S_{11}は(1)式の誤差分散、S_{22}は(2)式の誤差分散で、これはすでに二段階最小自乗法を計算する際計算されている。そこで今度は(1)式と(2)式の偏差どおしの積和をつくって10で割れば$S_{12}=S_{21}$を求めることができる。これを求めると、

(3.12) $S_{12}=S_{21}=-.2564116E+07$

行列

(2.13) $$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} .1973186E+07 & .-2564116E+07 \\ -.2564116E+07 & .5734540E+07 \end{bmatrix}$$

逆行列をつくって要素を求めると、

(3.14) $$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} .12096595E-05 & .54088163E-06 \\ .54088163E-06 & .41622924E-06 \end{bmatrix}$$

となる。これを公式に代入すれば、前頁の計算のごとくなり係数が求められる。

平均の差より常数を求める。

(3.16) (1) $Y_1=-3.26840Y_2+2.16781X_1+31993.5175$

(2) $Y_1=6.5403Y_2+72.450X_2+1.46145X_3-62134.1285$

となる。係数の標準誤差は計算の途中の逆行列の要素の対角線の平方根をとればよいから、

$S_{a1}=1.3896344$　$S_{b1}=7.7585786$

$S_{a2}=0.6930749$　$S_{b2}=206.85008$

$S_{b3}=0.85580928$

となる。

三段階最小自乗法の理論値と誤差分散の値は

(3.17)

(1)	(2)
7290	9097
8293	10182
9115	11522
10022	14309
15192	8532
14934	14042
15874	15856
18477	15916
19504	26502
25359	24979
$S^2=$ 1973226	$S^2=$ 6138698

となる。各種の計算値の比較はまとめて次号で行うこととする。