Title	回帰線導出の方法 (一)
Sub Title	Methods of regression
Author	佐藤, 保
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1966
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.59, No.8 (1966. 8) ,p.857(55)- 875(73)
JaLC DOI	10.14991/001.19660801-0055
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19660801-0055

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

力をめぐる取引関係の重視こそ、労働問題解決の基柢をなすものであるとする見解の発生の必然性を、われわれはよく理解することができるのである。

従って、わたくしは、社会政策学のほかに、労働組合論や労資関係論、労働市場論、あるいは賃金論や社会保障論などのさまざまなテーマで、いわゆる労働問題に接近することは基本的に正しいし、その相互の間における学問的交流が保たれていく限り、望ましいことであると考え。それでは、社会政策学は、そうした個別研究にそのすべてを譲りわたして、もはや形骸と化し、その存立の基盤を失ってしまうのではないかという疑問がおこるかもしれない。しかしそうではない。さきにも述べたように、社会政策学は、資本制国家による政策批判の学として存在するのであり、そうである限り、それは、資本主義の体制批判の学として、資本制社会そのものと運命をともにするというのが筆者の見解である。なぜそうであるのか。しばしば指摘したように、社会政策は、あくまでも社会改良であり、その意味で、それは明らかに二面性をもたざるをえない。すなわちそれは、一方において、労働者階級にたいする譲歩としてあらわれると同時に、他方、労働者階級の意識の尖锐化を緩和し、もしくはこれを暴圧するところのものである。資本主義のそれぞれの段階ないしはさまざまな局面において、それらの手段が意識的にとられることは、すでに社会政策史にかんする老大な研究がわれわれに教えるところである。資本の側から、国家権力を媒介として、労働者階級にたいし、どのような政策がうち出されるかは、資本主義発展段階の相違や、支配的権力機構の態様、労働者階級の組織状態などのさまざまな要因によって左右されるところであるが、問題は、資本制社会の危機的な段階においてこそ、社会政策学の研究は、労働問題の各個の研究よりもさらに重要な意義を獲得するからである。社会政策研究にかんする古典的な業績、とりわけ風早八十二氏の「日本社会政策史」および故服部英太郎教授の「ドイツ社会政策論史」は、われわれにそれを訴えてやまない(未完)。

(追記 文中、非礼にわたる点、隅谷、氏原両教授に御寛恕をお願い致す次第です。)

研究ノート

回帰線導出の方法(二)

佐藤保

ここで述べようとするのは、計量経済学で現在使われている回帰線導出の具体的方法を示すと共にその性格に若干ふれることである。導出の方法は、

- 1、古典的最小自乗法の計算
- 2、誘導形の計算
- 3、間接最小自乗法の計算
- 4、二段階最小自乗法の計算
- 5、三段階最小自乗法の計算
- 6、構造パラメーターから誘導形の逆算
- 7、情報制限最尤法の計算
- 8、完全情報最尤法の計算

計算の方式は Goldberger Econometric Theory と Klein A Textbook of Econometrics (宮沢光一、中村貢訳) による。計算の多くは大学院の田中、井原、黒田、蓑谷の諸氏によって行われた。

回帰線導出の方法(一)

一、古典的最小自乗法の計算

普通最もよく知られ、かつ最も多く使われるのは多元回帰と呼ばれる方法である。以下いろいろな方法を例示するため、最初に使われる式と資料をあげておく。ここで用いられる式は、

$$(1.1) \quad Y_1 = a_0 + a_1 Y_2 + a_2 X_1$$

と二つの式である。変数は、おのおの平均からの偏差をとって、

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (1) \quad y_1 &= a_1 y_2 + a_2 x_1 \\ (2) \quad y_1 &= b_1 y_2 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \end{aligned}$$

の形にして示しておいた方が便利な場合もあろう。(大文字はなまの形の数、小文字は平均からの偏差を示すことにする)

Y_1 || セメントの生産量(需要量および供給量と考えられる。)
 Y_2 || セメントの価格
 X_1 || 総投資量

X₂ 石炭価格指数 (原材料価格、あるいは生産コストの代用として用いられた)

X₃ セメント容量 (セメントの生産能力を示す)

従って(1)はセメントの需要関数を示し、(2)はセメントの供給関数を示すことになる。資料は時系列で次のように与えられた。

	Y ₁	Y ₂	X ₁	X ₂	X ₃
昭和 27	7096	8330	1163.5	100.0	9241
28	8741	8250	1505.1	95.3	10575
29	10640	8000	1507.6	90.8	12834
30	10519	7697	1469.0	88.1	16230
31	12969	6497	2044.9	90.8	17514
32	15107	7000	2684.3	97.6	18696
33	14904	6700	2665.3	95.7	21408
34	17169	6300	3263.2	91.4	23148
35	22425	6700	4339.9	88.4	29020
36	24484	6000	5985.2	86.6	31200
37	28662	6350	6534.6	84.9	35568
38	29766	6275	7083.5	82.2	43200

ここに昭和27年から38年まで12年間の資料があるが、このうち最初の10年の資料を使って計算を行い、最後の2年間を予測するものとする。計算の便宜のために記号を行列で示すことにすると、古典的最小自乗法では、左辺の変数を従属変数として、右辺の変数を独立変数とする。右辺の原因を示す変数で左辺の結果を示す変数であ

る。誤差は従属変数のみが存在して独立変数には存在しない。形式として、独立変数を*n*個とすれば、

$$(1.3) \quad y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_n x_{tn} + e_t \quad (t=1, \dots, T)$$

$$(1.4) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{T1} & \dots & x_{Tn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_T \end{pmatrix}$$

$$(1.5) \quad Y = X\beta + e$$

と書くことができる。eは残差を示しているが、残差の二乗和を最小にするようにβをきめるのが最小自乗法であり、それによって正規方程式は、

$$(1.6) \quad X'X\beta = X'Y$$

と書ける。X'はXの転置行列、βはβの推定量である。X'Xは独立変数の二次の積率行列、X'Yは独立変数と従属変数の積率行列を示すことになる。

$$(1.7) \quad b = (X'X)^{-1}X'Y$$

(X'X)⁻¹はX'Xの逆行列を示す。

と書くことができる。重相関係数Rは、

$$(1.8) \quad R^2 = 1 - \frac{\sum e^2}{\sum y^2} \quad (1.9) \quad R = \sqrt{R^2}$$

$$= \frac{bX'Y}{\sum y^2}$$

として計算できる。回帰係数の常数は、

次に、

$$(1.13) \quad R^2 = \frac{\alpha_1 \sum y_1 y_2 + \alpha_2 \sum y_1 x_1}{\sum y_1^2} \quad R = \sqrt{R^2}$$

から重相関係数を計算できる。変数をもとに戻したときの

$$Y = a_0 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 X_1 + e$$

の誤差

$$(1.14) \quad a_0 = \bar{Y} - \alpha_1 \bar{Y}_1 - \alpha_2 \bar{X}_1$$

で示される。偏回帰係数の共分散行列をつくるため、まず、

$$(1.15) \quad S^2 = \frac{\sum y_1^2 - \alpha_1 \sum y_1 y_2 - \alpha_2 \sum y_1 x_1}{10-2-1}$$

を計算して、

$$(1.16) \quad S_{aa} = S^2 \begin{pmatrix} \sum y_1^2 & \sum y_1 x_1 \\ \sum y_1 x_1 & \sum x_1^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

この行列の対角線の要素の平方根がα₁とα₂の標準誤差を示すことになる。そして、

$$(1.17) \quad t = \frac{\alpha_1 - a_1}{S_{a1}} \quad t = \frac{\alpha_2 - a_2}{S_{a2}} \quad \text{自由度 } \tau \text{ の } t \text{ 分布}$$

母数の検定ではα=0を検定するのであるから実際上は、

$$t_1 = \frac{\alpha_1}{S_{a1}} \quad t_2 = \frac{\alpha_2}{S_{a2}}$$

として自由度τのt分布の5%点のみをみてその値より大きければα_iが有意であると判定される。

以上の計算をIBM 16-20 電子計算機によって計算すると次の結果を得た。記号を説明しておく。

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - \dots - b_n \bar{X}_n$$

として計算される。次に誤差の分布が正規分布をしていると仮定されるならば最尤推定量を計算することができ、これからの共分散行列を計算して、偏回帰係数のt検定を行うことができる。

$$(1.10) \quad S_{bb} = S^2 (X'X)^{-1} \quad S_{bb} \text{ は係数の共分散行列}$$

$$S^2 = \frac{\sum e^2}{T-K-1} = \frac{Y'Y - b'X'Y}{T-K-1}$$

$b_k - \beta_k$ は自由度 t_{T-K-1} の t 分布をする。

普通は偏回帰係数を計算したのち、その下に( )をしてその標準誤差を書いておく。自由度によって異なるが、偏回帰係数の絶対値が、ほぼ標準誤差の二倍以上あれば係数が有意かそれに近いと判断されるからである。以上のことを先の式、

$$(1) \quad y_1 = a_1 y_2 + a_2 x_1 + e$$

$$(2) \quad y_1 = b_1 y_2 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + e$$

にあてはめてみれば、同様のことであるから、(2)は省略することにして(1)について書いてみる。まず正規方程式は、

$$(1.11) \quad \alpha_1 \sum y_2^2 + \alpha_2 \sum y_2 x_1 = \sum y_1 y_2$$

となり、

$$(1.12) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_2^2 & \sum y_2 x_1 \\ \sum y_2 x_1 & \sum x_1^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum y_1 y_2 \\ \sum y_1 x_1 \end{pmatrix}$$

からα₁、α₂を計算できる。

回帰線導出の方法 (11)

回帰線導出の方法(一)

CASE 2 D. F. 6

MEANS ADJUSTED BY 10

.71474000 E+04 .92470000 E+02 .18986600 E+05 .14405400 E+05

MOMENT MATRIX BY ROW, TRIANGULAR M.

.65229400 E+07 .16547600 E+05 -.49901000 E+08 -.37122300 E+08 .17830100 E+03
-.18334800 E+06 -.13494800 E+06 .48876740 E+09 .37168450 E+09

VARIANCES OF DEP. VAR., NOT ADJUSTED

.29112880 E+09

ELEMENTS OF INVERSE BY ROW, SQUARE M

.72190859 E-06 .14312709 E-04 .79072717 E-07 .14312708 E-04 .94142765 E-02
.49927781 E-05 .79072717 E-07 .49927781 E-05 .11991846 E-07

DEPENDENT VARIABLE NO. 1

REGRESSION COEF.	STANDARD DEVIAT.	ESTIMATED T VALUE	NO
.65972410 E+00	.96216042 E+00	.68566954 E+00	1
.53979740 E+02	.10987524 E+03	.49128211 E+00	2
.84805669 E+00	.12400791 E+00	.68387306 E+01	3
-.11426029 E+05	.15183681 E+05	.75252035 E+00	C

STANDARD ERROR .11324170 E+04 SQUARED ST. ERR. .12823683 E+07
MULT. COR. COEF. .98669707 E+00 ADJUST. COR. COEF. .97997790 E+00

STANDARD COEF.	DELET. LOSS SS.	NO
.98750986 E-01	.60289611 E+06	1
.42244005 E-01	.30950995 E+06	2
.10988373 E+01	.59974097 E+08	3

OBSERVED VALUE	ESTIMATED VALUE	RESIDUAL	ACCUMULATED RES.
.70960000 E+04	.73043378 E+04	-.20833780 E+03	-.20833780 E+03
.87410000 E+04	.81291626 E+04	.61183740 E+03	.40349960 E+03
.10640000 E+05	.96370830 E+04	.10029170 E+04	.14064166 E+04
.10519000 E+05	.12171442 E+05	-.16524420 E+04	-.24602540 E+03
.12969000 E+05	.12614423 E+05	.35457700 E+03	.10855160 E+03
.15107000 E+05	.14315729 E+05	.79127100 E+03	.89982260 E+03
.14904000 E+05	.16315181 E+05	-.14111810 E+04	-.51135840 E+03
.17169000 E+05	.17523772 E+05	-.35477200 E+03	-.86613040 E+03
.22425000 E+05	.22376536 E+05	.48464000 E+02	-.81766640 E+03
.24484000 E+05	.23666329 E+05	.81767100 E+03	.46000000 E-02

MEAN OF RESIDUAL .46000000 E-03
M. SUC. SQ. DIFFERENCE .20907176 E+07
VARIANCE OF RESIDUAL .76942205 E+06
DURBIN-WATSON RATIO .27172571 E+01

CASE 1 D. F. 7

MEANS ADJUSTED BY 10

.71474000 E+04 .26628000 E+04 .14405400 E+05

MOMENT MATRIX BY ROW, TRIANGULAR M.

.65229400 E+07 -.93642300 E+07 -.37122300 E+08 .20941569 E+08 .76003970 E+08

VARIANCES OF DEP. VAR., NOT ADJUSTED

.29112880 E+09

ELEMENTS OF INVERSE BY ROW, SQUARE M

.42814957 E-06 .19145131 E-06 .19145131 E-06 .13336126 E-06

DEPENDENT VARIABLE NO. 1

REGRESSION COEF.	STANDARD DEVIAT.	ESTIMATED T VALUE	NO
-.13428373 E+01	.82297691 E+00	.16316828 E+01	1
.30288719 E+01	.45930877 E+00	.65944133 E+01	2
.15937915 E+05	.69124291 E+04	.23056894 E+01	C

STANDARD ERROR .12577371 E+04 SQUARED ST. ERR. .15819028 E+07
MULT. COR. COEF. .98079772 E+00 ADJUST. COR. COEF. .97524186 E+00

STANDARD COEF.	DELET. LOSS SS.	NO
-.20100297 E+00	.42116402 E+07	1
.81234950 E+00	.68791078 E+08	2

OBSERVED VALUE	ESTIMATED VALUE	RESIDUAL	ACCUMULATED RES.
.70960000 E+04	.82761734 E+04	-.11801734 E+04	-.11801734 E+04
.87410000 E+04	.94182630 E+04	-.67726300 E+03	-.18574364 E+04
.10640000 E+05	.97615442 E+04	.87845600 E+03	-.97898040 E+03
.10519000 E+05	.10051509 E+05	.46749100 E+03	-.51148940 E+03
.12969000 E+05	.13407242 E+05	-.43824200 E+03	-.94973140 E+03
.15107000 E+05	.14668454 E+05	.43854600 E+03	-.51118540 E+03
.14904000 E+05	.15013758 E+05	-.10975800 E+03	-.62094340 E+03
.17169000 E+05	.17361855 E+05	-.19285500 E+03	-.81379840 E+03
.22425000 E+05	.20085907 E+05	.23390930 E+04	.15252946 E+04
.24484000 E+05	.26009296 E+05	-.15252960 E+04	-.14000000 E-02

MEAN OF RESIDUAL -.14000000 E-03
M. SUC. SQ. DIFFERENCE .28981095 E+07
VARIANCE OF RESIDUAL .11073229 E+07
DURBIN-WATSON RATIO .26172216 E+01

最初の Case 1 はこの場合(1)を示す、したがって Case 2 は(2)を示す。D、E は自由度、この場合 7 である。二行目は平均、順序は $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{X}_1$ の順、(2)についても同様の順序である。次の積率行列は右上の三角について示してある。対称行列であるからこれだけ示せばわかる。逆行列についてはすべての β である。次に偏帰帰係数と常数、その標準誤差、t 検定をしたときの t の値が示されている。数字を示す際の E は 10 の何乗かを示す。E1+04 は 10 の 4 乗、E1-02 は 10 のマイナス 2 乗を示す。

二、二段階最小自乗法の計算
(間接最小自乗法を含む)

古典的的最小自乗法が一つ一つの方程式を別々にあつかって推定するのに対して、同時方程式体系によって推定を行うとする場合がある。同時方程式を考えると(1)と(2)と両方を考えてパラメーター、 a_0, a_1, a_2 と b_0, b_1, b_2, b_3 を求めるということであるが、同時方程式の詳しい性格はここでは省略する。ただ前に述べたことと関連していえば、 y は内生変数と呼ばれ、 x は外生変数と呼ばれる。 y は経済体系内部で定められる変数であり、したがって y_1 と y_2 は相互に関係しあう変数で、いずれが原因・結果とはいえないことになる。 x は経済体系の外から与えられる変数で、 x が原因を示す変数で y が結果を示す変数となりその反対方向はない。古典的的最小自乗法では、 y も原因を示す変数としてとりあつかわれた。この点が異なってくることになる。別の言葉でいえば両辺に誤差を含む変数

があらわれているともいえる。

同時方程式をとりあつかう場合にまず最初に行うことは、おのおのの方程式が識別の条件をみたしているかどうかを調べることである。それは次の方法による。一般に、M 個の内生変数と K 個の外生変数があるとき、構造方程式は、

(2.1)

$$\begin{aligned} & \gamma_{11}y_1(t) + \gamma_{12}y_2(t) + \dots + \gamma_{m1}y_m(t) + \beta_{1x_1}(t) + \dots + \beta_{1x_K}(t) + u_1 = 0 \\ & \gamma_{21}y_1(t) + \gamma_{22}y_2(t) + \dots + \gamma_{m2}y_m(t) + \beta_{2x_1}(t) + \dots + \beta_{2x_K}(t) + u_2 = 0 \\ & \dots \\ & \gamma_{m1}y_1(t) + \gamma_{m2}y_2(t) + \dots + \gamma_{mm}y_m(t) + \beta_{mx_1}(t) + \dots + \beta_{mx_K}(t) + u_m = 0 \end{aligned}$$

(2.2) $Y'(t)T + X'(t)B + u'(t) = 0$

$$T = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \dots & \gamma_{mm} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mK} \end{pmatrix}$$

と書ける(この書き方は必ずしも一般的ではない)。ここで内生変数を外生変数のみで表わした形を誘導形というがこの形に直す。

(2.3) $y_1(t) = \Pi_{1x_1}(t) + \Pi_{1x_2}(t) + \dots + \Pi_{1x_K}(t) + o_1(t)$
 $y_2(t) = \Pi_{2x_1}(t) + \Pi_{2x_2}(t) + \dots + \Pi_{2x_K}(t) + o_2(t)$
 $\dots$
 $y_M(t) = \Pi_{Mx_1}(t) + \Pi_{Mx_2}(t) + \dots + \Pi_{Mx_K}(t) + o_M(t)$
 $t = 1, \dots, M$

(2.4) $Y'(t) = X'(t)(-BT^{-1}) + u'(t)(-T^{-1})$
 $= X'(t)H + v'(t)$
 $t = 1, \dots, T$

(2.5) $H = -BT^{-1} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{K1} & H_{K2} & \dots & H_{KM} \end{pmatrix}$

あるいは簡単に
 $Y = XH + V$

と書くこともできる。これでわかるように、誘導形の係数である H は本来構造方程式の係数である B と T がわからなければわからないものである。しかし(2.5)式は右辺が外生変数ばかりであるから、直接最小自乗法を適用できることになる。したがって(2.5)に最小自乗法を用いて H の推定値を計算することができるが、何等かの方法で B、T を推定して、それから $-BT^{-1}$ を計算した場合に、最小自乗法から計算した H の推定値とは必ずしも一致しないことがある。最小自乗法を用いて H の推定量 P を求めれば、

$P = (X'X)^{-1}X'Y$

と求められる。これは通常の最小自乗法の求め方である。現在の資料によってこれを求めると、

(2.6) $y_1 = \Pi_{1x_1} + \Pi_{1x_2} + \Pi_{1x_3} + o_1$
 $y_2 = \Pi_{2x_1} + \Pi_{2x_2} + \Pi_{2x_3} + o_2$

回帰線導出の方法 (一)

という形になる。

$$Y = \begin{pmatrix} Y'(1) \\ \vdots \\ Y'(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(1) & \dots & y_M(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(T) & \dots & y_M(T) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} X'(1) \\ \vdots \\ X'(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(1) & \dots & x_K(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(T) & \dots & x_K(T) \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u'(1) \\ \vdots \\ u'(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(1) & \dots & u_M(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(T) & \dots & u_M(T) \end{pmatrix}$$

$YT + XB + U = 0$

と全体を書くことができる。次に個々の方程式について識別の条件をみてゆくが、そのため、まず m 番目の方程式は、

(2.7) $\gamma'_{m\cdot} Y + X\beta_m + u_m = 0$

と書けるが、この方程式には γ_m の M^* 個が 0 であり β_m の K^* 個が 0 であるとしよう。

$M^* = M - M^{**}$
 $K^* = K - K^{**}$

とする。すなわち今問題としている m 番目の方程式は、全体で m 個のうち、 M^* 個の内生変数と全体で K 個のうちの K^* 個の外生変数とを

含んでいるわけである。これを、

$$(2.8) \quad Y^* \gamma^* + Y^{**} \gamma^{**} + X^* \beta^* + X^{**} \beta^{**} + w = 0$$

と書く。Y*はその方程式に入っている内生変数、γ*はその係数(普通0ではない)、Y**はその方程式に入っていない内生変数、γ**は0である。外生変数についても同様である。X*はその方程式に入っている外生変数、β*はその係数(普通0ではない)、X**はその方程式に入っていない外生変数、β**は0である。誘導形についても分割する。
 $Y = X\Pi + V$

$$(2.9) \quad (Y^* Y^{**}) = (X^* X^{**}) \begin{pmatrix} \Pi^{**} & \Pi^{**} \\ \Pi^{**} & \Pi^{**} \end{pmatrix} + (V^* V^{**})$$

Πの分割では最初の*印は外生変数(先決変数たとえばv_{t-1})一期間の前のvの値(等を含む)に関係し、二番目の*印は内生変数に関係する。Π**はK行M*列の行列、Π**はK行M**列の行列、Π**はK行M*列の行列、Π**はK行M**列の行列となる。先の関係から、

$$(2.10) \quad \begin{pmatrix} \Pi^{**} & \Pi^{**} \\ \Pi^{**} & \Pi^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^* \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \Pi^{**} \gamma^* = \beta^*$$

$$\Pi^{**} \gamma^* = 0$$

$$(2.11) \quad \Pi^{**} \gamma^* = 0$$

からγ*が求められればそのγ*を上式

$$(2.12) \quad - \Pi^{**} \gamma^* = \beta^*$$

よりなる。

γのことを現在の場合にあてはめてみよう。

$$(2.15) \quad (1) \quad y_1 = a_1 y_2 + a_2 y_1 + a_1$$

$$(2) \quad y_1 = b_1 y_2 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + a_2$$

これをかきかえよ。

$$(2.16) \quad (1) \quad -y_1 + a_1 y_2 + a_2 y_1 + a_1 = 0$$

$$(2) \quad -y_1 + b_1 y_2 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + a_2 = 0$$

$$(2.17) \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

であることがわかる。これよりΠを求める。

$$(2.18) \quad \Pi = -B T^{-1}$$

$$= - \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= - \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1/(a_1 - b_1) & 1/(a_1 - b_1) \\ -a_1/(a_1 - b_1) & -1/(a_1 - b_1) \end{pmatrix}$$

回帰線導出の方法 (1)

に代入してやればβ*を求めることができる。

$$\Pi^{**} \gamma^* = 0$$

の式は、M*個の未知数を含むK*個の同時方程式の体系であるから、未知数の1個を1とおくことによる正規化を行えば、

$$(2.13) \quad r(\Pi^{**}, *) \leq M^* - 1$$

$$r(\Pi^{**}, *) \text{ は } \Pi^{**}, * \text{ の階数 (rank)} \\ \text{でなければならない。}$$

$$(2.14) \quad r(\Pi^{**}, *) = M^* - 1$$

であれば比例的に係数を1義的に定めることができる。そこで識別の条件として、

rank condition

$$r(\Pi^{**}, *) = M^* - 1$$

order condition

$$K^{**} \geq M^* - 1$$

があげられる。ランクの条件はこれだけでは識別されないということですが、これが調べられなければならない。次のオーダーの条件は、K** = M* - 1 ならば just identity とし、K** > M* - 1 のときは over identity としよう。just の場合は先に最小自乗法でΠの推定量Pを計算したが、これから構造パラメータγβを求めることができる。したがってγβから逆に戻してΠを推定した値は、当然のことながら先の最小自乗法による推定と一致する。しかし、over の場合は、Pからすぐにγβを求めることができないから、構造パラメーターから誘導形パラメーターを逆算した場合一致しない

$$= \begin{pmatrix} -a_2 b_1 / (a_1 - b_1) & -a_2 / (a_1 - b_1) \\ a_1 b_2 / (a_1 - b_1) & b_2 / (a_1 - b_1) \\ a_1 b_3 / (a_1 - b_1) & b_3 / (a_1 - b_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(2.19) \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_2 b_1 / (a_1 - b_1) & -a_2 / (a_1 - b_1) \\ a_1 b_2 / (a_1 - b_1) & b_2 / (a_1 - b_1) \\ a_1 b_3 / (a_1 - b_1) & b_3 / (a_1 - b_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ここで、(1)方程式についてランクの条件をみても、Π**は全体のΠのうち、その方程式に入っていない外生変数と入っている内生変数からつくられる行列をみるということ、この場合(1)では、a₂, a₃とy₁, y₂とを結ぶ行列を意味する。変数が多い場合にはΠをみて適当に選び出さなければならない。この場合では、

$$(2.20) \quad (1) \quad \Pi^{**}, * = \begin{pmatrix} a_1 b_2 / (a_1 - b_1) & b_2 / (a_1 - b_1) \\ a_1 b_3 / (a_1 - b_1) & b_3 / (a_1 - b_1) \end{pmatrix}$$

である。この行列のランクをみると、第1列は第2列のa₁倍であるからランクは1である。一方M*(その方程式に入っている内生変数)はy₁とy₂の二つでM* - 1 = 1 である。

$$1 = 2 - 1$$

で(1)はランクの条件をみたしている。次にオーダーの条件をみると、K** (その方程式に入っていない外生変数) はa₂とa₃で2であり、

$$K^{**} \geq M^* - 1$$

の条件に入れると、

2>2-1

となってオーダーの条件をみたす。ただし over identity であることがわかる。

次に(2)方程式の方はどうか。

(2.21) (2) $P_{**,*} = (-a_2b_1/(a_1-b_1)) - a_2(a_1-b_1)$

$M_{**,*} = 2$

$P_{**,*}$ のランクは1であるから、

$I = 2 - 1$

でランクの条件をみたす。 $P_{**,*} = 1$ であるから、

$I = 2 - 1$

でオーダーの条件もみたし、just identity であることがわかる。したがって(1)とも計算可能である。

(2)については、just であるから誘導形から直接構造パラメーターを推定できる。先に述べた方式により、まず

$P_{**,*} \hat{y} = 0$

より $\hat{y}$ を求め、

$-P_{**,*} \hat{y} = \hat{\beta}^*$

より $\hat{\beta}^*$ を求める。これは先の $P_{**,*}$ をみてもすぐわかることであるが、よりて

いねいに書けば、今誘導形を、

(2.22) $y_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$
 $y_2 = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3$

とすれば、(2)では

$P_{**,*} = \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} P_{**,*} & P_{**,*} \\ P_{**,*} & P_{**,*} \end{pmatrix}$

$P_{**,*} = (c_1, d_1)$

$P_{**,*} = 0$

$P_{**,*} = 0$

であることがわかる。

(2.23) $P_{**,*} \hat{y} = 0 \quad (c_1, d_1) \begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0$

$-c_1 + d_1b_1 = 0 \quad b_1 = \frac{c_1}{d_1} \quad b_1 = \hat{y}_{21}$

$\hat{\beta}_* = - \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$b_2 = c_2 - d_2b_1 \quad b_3 = c_3 - d_3b_1$

$b_2 = \hat{\beta}_{22} \quad b_3 = \hat{\beta}_{32}$

と一義的に計算できる。just identity の場合誘導形から構造パラメーターを推定するやり方を間接最小自乗法という。

後でも若干ふれるが、このような計算の際、これは古典的の最小自乗法でもそうであるが、各変数間の単純相関係数をまずみることが必要である。それだけみても大体的ことはわかるといってもよい。

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
x_1	.1000000E+01	-.54398195E+00	.94679313E+00	.97339518E+00	-.80120823E+00
x_2	-.54398195E+00	.1000000E+01	-.62157664E+00	-.59230707E+00	.48521478E+00
x_3	.94679313E+00	-.62157664E+00	.1000000E+01	.98568452E+00	-.88180014E+00
y_1	.97339518E+00	-.59230707E+00	.98568452E+00	.1000000E+01	-.85186380E+00
y_2	.80120823E+00	.48521478E+00	-.88180014E+00	-.85186380E+00	.1000000E+01

一般に独立変数間に高い相関係数がある場合、マルチコリニアリチーがあるというが、同時方程式の場合は、それが一つの方程式内部だけではなく、他の方程式との関係にまでおよぶからである。現在の場合の相関行列は前頁の表のようになる。

(2)の場合は just であるからよいが、(1)の場合は over であるから、このままでは一義的に構造パラメーターをきめられない。そこで二段階最小自乗法の方法を用いる。二段階最小自乗法の考えは現在の場合でいえば、

(1) $y_1 = a_1y_2 + a_2x_1 + u_1$

(2) $y_2 = a_1y_2 + b_2x_2 + b_3x_3 + u_2$

(1)式を例にとれば、このままでは普通の最小自乗法は使えないからまず y_2 について誘導形

$y_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + u_2$

を求め、これより y_2 の推定値 $\hat{y}_2$ を求めておく。これをもとの式に代入する。

(2.24) (1) $y_1 = a_1\hat{y}_2 + a_2x_1 + u_1$

こうすれば普通の最小自乗法を使ってよい。(2)についても同様 $\hat{y}_2$ をもとの式に代入してやればよい。正規方程式(1)では、

(2.25) $a_1\hat{y}_1^2 + a_2\hat{y}_1x_1 = \sum y_1y_1$

$a_1\hat{y}_1x_1 + a_2\hat{y}_1^2 = \sum y_1x_1$

となり、その式に入っている右辺の内生変数を誘導形の推定値でおきかえて最小自乗法を用いればよい。これを行列の記号で書けば、

(2.26) $y = Y_1Y_1 + X_1\beta_1 + u$

回帰線導出の方法 (一)

内生変数を y と Y_1 に分け、 Y_1 はその方程式に入っている内生変数、 X_1 はその方程式に入っている外生変数とする。 Y_1 に対する誘導形のパラメーターを P_{x_1} とすると、

(2.27) $P_{x_1} = (X_1X_1)/X_1Y_1$

で示されるから、これより

(2.28) $\hat{y} = XP_{x_1}$

その方程式の構造パラメーター γ_1, β_1 の推定量を c, b とすれば、 Y_1 の代りに $\hat{y}_1$ を代入して、正規方程式は、

(2.29) $\begin{pmatrix} \hat{Y}_1/\hat{Y}_1 & \hat{Y}_1/X_1 \\ X_1/\hat{Y}_1 & X_1/X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1/\hat{Y}_1 \\ X_1/\hat{Y}_1 \end{pmatrix}$

これをこのまま忠実にやってもよいが、計算の便宜上、更に変形し

$\hat{Y}_1/\hat{Y}_1 = Y_1/\hat{Y}_1 \quad X_1/\hat{Y}_1 = X_1/Y_1$

を使い、 $\hat{Y}_1 = XP_{x_1}$ を代入すれば正規方程式は次のようになる。

(2.30) $\begin{pmatrix} Y_1/X_1(X_1X_1)^{-1}X_1Y_1 & Y_1/X_1 \\ X_1/Y_1 & X_1/X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1/X_1(X_1X_1)^{-1}X_1Y_1 \\ X_1/Y_1 \end{pmatrix}$

これより c, b を求めればよく、この正規方程式には $\hat{y}_1$ は入っていないから直接のデータを使って解くことができる。係数の標準誤差を求めるために、係数の分散、共分散行列を求めるが、これは普通の最小自乗法に類似して行われればよい。

(2.31) $S_{c,b,c} = S^2 \begin{pmatrix} Y_1/X_1(X_1X_1)^{-1}X_1Y_1 & Y_1/X_1 \\ X_1/Y_1 & X_1/X_1 \end{pmatrix}^{-1}$

いて、先の公式

$$\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 \\ X_1'Y_1 \end{pmatrix}$$

で現在の場合 $Y_1 = y_2, y = y_1, X_1 = x_1, c = a_1, b = a_2$ を意味する
 $Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1, Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1$
 を求めるため、次の式を「へり」積乗行列及び誘導形より適当な数値を求めた「へり」

$$(2.42) \begin{pmatrix} Y_1'X \\ Y_1'X \end{pmatrix} \cdot (X'X)^{-1}X'Y_1$$

$$= \begin{pmatrix} -.93642286E+07 & .16547520E+05 & -.49672198E+08 \\ .76003989E+08 & -.13494798E+06 & .37093833E+09 \\ .21265449E+00 & -.248907E+02 & -.15325193E+00 \\ .520913559E+07 & -.37325475E+08 \end{pmatrix}$$

公式に代入する

$$(2.43) \begin{pmatrix} .520913559E+07 & -.93642286E+07 \\ -.93642286E+07 & .20941569E+08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -.373235475E+08 \\ .76003989E+08 \end{pmatrix}$$

$$(2.44) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .520913559E+07 & -.93642286E+07 \\ -.93642286E+07 & .20941569E+08 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -.37325475E+08 \\ .76003989E+08 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -.326840E+01 \\ .216781E+01 \end{pmatrix}$$

平均を用いて偏差を求めるため

$$(2.45) a_0 = .1440540E+05 - (-.32682036E+01) \times .71474E+04 - .21679261E+01 \times .26628E+04 = .31991805E+05$$

$$(2.46) Y_1 = -3.26840Y_2 + 2.16781X_1 + 31993.5175$$

理論値(推定値)を計算して、実際値との偏差を計算し、その自乗和より a_0 を求める(別の式で求める方法も前述した)。

偏差	194	449	1525	498	2222	173	969	1308	2922	874
$\hat{Y}_1$	7290	8292	9115	10021	15191	14934	15873	18477	19503	25358
Y_1	7096	8741	10640	10519	12969	15109	14904	17169	22425	24484
S^2	= 1973186									

$$(2.48) S_{bc, bc} = .1973186E+07 \begin{pmatrix} .520913559E+07 & -.93642286E+07 \\ -.93642286E+07 & .20941569E+08 \end{pmatrix}$$

$$= .1973186E+07 \begin{pmatrix} .97863766E-06 & .43760746E-06 \\ .43760746E-06 & .24343239E-06 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} .19310341E+01 & .86348091E+00 \\ .86348091E+00 & .48033738E+00 \end{pmatrix}$$

$$S^2_{a_1} = .19310341E+01 \quad S^2_{a_2} = .86348091E+00$$

$$S_{a_1} = .13896165E+01 \quad S_{a_2} = .69306376E+00$$

(2)の供給函数について同様の計算を行う。先の式で、 $Y_1 = y_2, X_1 = x_2, y = y_1, c = b_1, b = b_2, b_3$ とする。

$$(2.49) \begin{pmatrix} .520913559E+07 & .16547520E+05 & -.49672198E+08 \\ .16547520E+05 & .17830100E+03 & -.18305971E+06 \\ -.49672198E+08 & -.18305971E+06 & .48545469E+09 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -.37325475E+08 \\ -.13494798E+06 \\ .37093833E+09 \end{pmatrix}$$

$$(2.50) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .10522594E-04 & .20628020E-03 & .11521255E-05 \\ .20628020E-03 & .13183385E-01 & .26024495E-04 \\ .11521255E-05 & .26024495E-04 & .12949334E-06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .6769584E+01 \\ .1749051E+03 \\ .1518458E+01 \end{pmatrix}$$

$$(2.51) b_0 = .144054E+05 - .6769584E \times .71474E+04 - .1749051E+03 \times .9247E+02 - .1518458E+01 \times .18986E+05 = .78983355E+05$$

$$(2.52) Y_1 = 6.769584Y_2 + 174.9051X_1 + 1.518458X_2 - 78983.355$$

理論値(推定値)を計算し実際値との偏差の自乗和を求めて S^2 を求める。

回帰線導出の方法 (一)

$$(2.53) S_{bc, bc} = .5734540E+07$$

$$\begin{pmatrix} .10522894E-04 & .20628020E-03 & .11521255E-05 \\ .20628020E-03 & .13183385E-01 & .26024495E-04 \\ .11521255E-05 & .26024495E-04 & .12949334E-06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .60343957E+02 \\ .75600649E+05 \\ .74258474E+00 \\ .77681373E+01 \\ .27495572E+03 \\ .86173357E+00 \end{pmatrix}$$

二段階最小自乗法で求めた(2)の係数と間接最小自乗法で求めた係数とは若干異っているが、これは計算誤差によるもので、本来一致すべきものである。係数を比べてみても等しいとしてよいことがわかるであろう。

三 三段階最小自乗法の計算

同時方程式体系を解く場合、二段階及び、制限情報法では全体を考慮しながらも、計算をすすめてゆく場合は一つの方程式をと

いてゆく。これに対して体系全部を一時に計算しようというのが、三段階最小自乗法であり完全情報法である。一般的には後者の方がよりすぐれているとよいてよいであろうが、それだけ計算がたいへんになる。三段階最小自乗法では結果だけ示せば、先の

(3.1) $y = Y_1 \gamma_1 + X_1 \beta_1 + u$

を

(3.2) $y_1 = Z_1 \alpha_1 + u_1$

$y_1 = y$ $u_1 = u$ $Z_1 = (Y_1, X_1)$ $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$

と書く。M個の方程式をいっしょに

(3.3) $y = Z\alpha + u$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_M \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Z_M \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix}$$

と書ける。われわれが求めるのはだから α であるが、それは

(3.4)
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} Z_1' X(X'X)^{-1} X' Z_1 \dots S_{1M} Z_1' X(X'X)^{-1} X' Z_M \\ \vdots \\ S_{M1} Z_M' X(X'X)^{-1} X' Z_1 \dots S_{MM} Z_M' X(X'X)^{-1} X' Z_M \end{pmatrix}^{-1}$$

Z_1 をより詳しくいふと

(3.6) $Z_1 = \begin{pmatrix} y_{21} & z_{11} \\ y_{22} & z_{12} \\ \vdots & \vdots \\ y_{2T} & z_{1T} \end{pmatrix}$

の対角線上の値を求めて平方根を求めればよい。三段階最小自乗法では係数を求める途中で、係数の分散がわかってしまうのは興味あることである。

これを現在の方程式にあてはめてみると

(3.5) $Z_1 = (Y_1, X_1)$ $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ $Z_2 = (Y_2, X_2)$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} S_{11} Z_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 + \dots + S_{1M} Z_1' X(X'X)^{-1} X' Y_M \\ \vdots \\ S_{M1} Z_M' X(X'X)^{-1} X' Y_1 + \dots + S_{MM} Z_M' X(X'X)^{-1} X' Y_M \end{pmatrix}$$

として求められる。 S_{ij} は二段階最小自乗法を用いて計算された誤差の、分散、共分散行列の逆行列の要素である。そして α_1 から α_M まですべてを計算する途中の最初の行列の逆行列がそのまま係数の分散、共分散行列となっている。そこでその対角線上の値の平方根を求めれば、係数の標準誤差を求めることができる。すなわち、行列

$$\begin{pmatrix} S_{11} Z_1' X(X'X)^{-1} X' Z_1 \dots S_{1M} Z_1' X(X'X)^{-1} X' Z_M \\ \vdots \\ S_{M1} Z_M' X(X'X)^{-1} X' Z_1 \dots S_{MM} Z_M' X(X'X)^{-1} X' Z_M \end{pmatrix}$$

(3.7) $Z_1' X(X'X)^{-1} Z_1 = \begin{pmatrix} Y_1' \\ X_1' \end{pmatrix} X(X'X)^{-1} X' \begin{pmatrix} Y_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 & Y_1' X(X'X)^{-1} X' X_1 \\ X_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 & X_1' X(X'X)^{-1} X' X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

この誘導形の式は

(3.8) $X_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 = \hat{Y}_1$

同様 $X_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 = X_1' \hat{Y}_1 = X_1' Y_1$

$Y_1' X(X'X)^{-1} X' X_1 = Y_1' X_1$

$X_1' X(X'X)^{-1} X' X_1 = X_1' X_1$

(3.9) $Z_1' X(X'X)^{-1} Z_1 = \begin{pmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 & Y_1' X_1 \\ X_1' Y_1 & X_1' X_1 \end{pmatrix}$

同様の手法をすくべて及ぼせば、結局

(3.10)
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} \begin{pmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 & Y_1' X_1 \\ X_1' Y_1 & X_1' X_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \vdots \\ S_{M1} \begin{pmatrix} Y_2' X(X'X)^{-1} X' Y_1 & Y_2' X_1 \\ X_2' Y_1 & X_2' X_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \vdots \\ S_{M2} \begin{pmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X' Y_2 & Y_1' X_2 \\ X_1' Y_2 & X_1' X_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ \vdots \\ S_{MM} \begin{pmatrix} Y_2' X(X'X)^{-1} X' Y_2 & Y_2' X_2 \\ X_2' Y_2 & X_2' X_2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

回帰線導出の方法 (一)

(3.11)
$$\begin{pmatrix} S_{11} \begin{pmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X' Y_1 & Y_1' X_1 \\ X_1' Y_1 & X_1' X_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \vdots \\ S_{M1} \begin{pmatrix} Y_2' X(X'X)^{-1} X' Y_1 & Y_2' X_1 \\ X_2' Y_1 & X_2' X_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \vdots \\ S_{M2} \begin{pmatrix} Y_1' X(X'X)^{-1} X' Y_2 & Y_1' X_2 \\ X_1' Y_2 & X_1' X_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ \vdots \\ S_{MM} \begin{pmatrix} Y_2' X(X'X)^{-1} X' Y_2 & Y_2' X_2 \\ X_2' Y_2 & X_2' X_2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \beta_{11} \end{pmatrix}$

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{22} \\ \beta_{22} \end{pmatrix}$

$\alpha_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \beta_1 \\ \beta_{33} \end{pmatrix}$

上の行列の積を計算すれば、結局5行1列の行列となり、 a_1, a_2, b_1, b_2 という(1)式(2)式のパラメーターが一度に得られるわけである。式のはんぎつをいとわなければ、 Z という文字を使わずに直接に公式を書いておいた方がわかりよいかもしれない。この場合パラメーターが5個であるので、5行5列の逆行列を計算することになるが、方程式体系が大きく数十個のパラメーターを含む場合は、その大きな逆行列を計算しなければならぬので大容量の電子計算機を必要とするであろう。このような場合は、まず just identity の方程式はとり除いておいて over identity の方程式だけについて三