Title	所謂立地型の識別について（続）
Sub Title	Identification of locational pattern (continued)
Author	高橋, 潤二郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1966
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.59, No.5 (1966. 5) ,p.463(19)- 474(30)
JaLC DOI	10.14991/001.19660501-0019
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19660501-0019

負担。以上に要約できるが、これと関連しては、Ibid., pp. 72~73 を参照。

Ⅳ（1） 別に bail à rente とも呼ばれた。

（2） 例えばアブランビル村の場合だが、一六八八年にタイユの負担者五三のうち、ラントを支払う土地を引受けている者三六、うち一四は農業のためもっぱらラント負担の土地によらなければならなかった。Venard, Ibid., p. 74 に注意。

（3） ラントの取得者のなかでパリ在住のブルジョワをかく位置づけることに関しては、Ibid., p. 74 を参看。

（4） 例えばブルドン－デダリュ家だが、アブランビル村に持つフェルムを買却して後も村内に多くのラントを確保していた。同家は単にラントの取得者として地主に甘んじた。Ibid., p. 74 に注意。

（5） ティエ村においては葡萄畠の賃貸に際しラントによる場合が圧倒的な割合を占めた。Ibid., p. 74. アブランビル村では葡萄畠の賃貸に際し多くラントによっていた。Ibid., p. 75.

（6） Ibid., p. 73 に注意。ラント負担の土地を彼は抵当として差入れてしまった財産と考えた。

（7） 一六四四年に二〇リーブルのラントで賃借した半アルパンの葡萄畠が直営できず、なおかつ滞納金の支払も不能に陥いったので、一六九四年には返還をよぎなくされた。Ibid., pp. 73~74.

（8） 一六九三年三月に地主は九リーブルのラントで手放した葡萄畠の返還を受けた。しかし彼はそれを四月以降に今度は二〇リーブルのラントで賃貸に出した。Ibid., p. 74 に注意。

（9） マリ・ル・ジュージュは葡萄畠の賃貸にあたり、ラントとして白葡萄酒を要求した。Ibid., p. 74. 一六九四年クロード・ロションは葡萄畠の賃貸に際し、葡萄酒の価格が一ミュイにつき三〇リーブル相当かそれ以下の時、ラントをオルレアンの半樽に二つ、また三〇リーブルを上廻った時、一ミュイとした。Ibid., p. 75 を参看。

（10） 一六七七年クレマン・ブシェールは全耕地をフェルムに統合したが、葡萄畠二はラントを召上げることに甘んじた。Ibid., p. 75 に注意。

研究ノート

所謂立地型の識別について（続）

高橋潤二郎

一、立地型の判別

基本的な空間的分布のパターン、即ち、ここでいう立地型には、定形分布、ランダム分布そして集塊分布の三型があるが、対象となる立地型が、これら三型のいずれであるかを識別判定する上での一つの基準として分散、平均比が用いられることは既に述べた。[1] これは、いうまでもなく、ランダム分布の理論型（モデル）である Poisson 分布に於て、分散と平均値が一致することに着目し、$\sigma^2/\mu=1$ をランダム分布、$\sigma^2/\mu<1$ を定形分布、そして $\sigma^2/\mu>1$ を集塊分布の判定規準とするものである。この指標は、Clapham（一九三六）によって相対分散（relative variance）、Blackman（一九四二）によって分散係数（coefficient of dispersion）、又、鳥居（一九五二）によって離隔係数（divergence coefficient）と夫々ことなった名称を附与されているが、特に、鳥居は、これを Poisson 分布からの隔りの測度を示すものとして離隔係数と呼んだものである。[2]

対象分布の判定が全数調査による場合、この分散、平均比が直接の判定規準になるが、標本調査による場合、これら統計値は標本とともに変動し、たとえ対象分布がポアソン型であったとしても、$s^2/\bar{x}=1$を常に期待することができないことはいうまでもない。そこで通常の統計学的方法による $s^2/\bar{x} \gtrless 1$ の有意性検定がなされねばならない。ポアソン分布の適合度検定については、通常の χ^2 検定が適用出来ることは既に述べた通りであるが、Akellam や David and Moore は、ポアソン型の $s^2/\bar{x}$ が、近似的に自由度 $n-1$ の χ^2 分布をするという Fisher の説に着目して、

$$\chi_0^2=(s^2/\bar{x})\times(n-1)$$

なる式を χ^2 検定する方法を提案している。[3] 更に、鳥居は上式を書きかえて、

$$s^2/\bar{x}=\chi_0^2/(n-1)=F_0 \qquad df_1=n-1,\quad df_2=8$$

とし、$s^2/\bar{x}$ が近似的に自由度 $n-1$, 8 のF分布をすることから、$s^2/\bar{x} \gtrless 1$ の有意性をF検定することを提案した。[4]

即ち、Fisher によれば、ポアソン分布の Index of dispersion,

$$\chi_0^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/\bar{x} \qquad \bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n$$

は近似的に自由度 $k=n-1$ のχ^2分布をする。即ち、

$$f_k(\chi^2)d\chi^2=\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}\Big/2\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)d(\chi^2) \qquad k=n-1$$

これは一つのΓ分布であるが、これを自由度kのχ^2分布をする変量をその自由度で除したものは、自由度（k, ∞）のF分布をするという事実にもとづいて、

$$F_0=\chi_0^2/(n-1)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/(n-1)}{\bar{x}}$$

とおけば、F_0は自由度 $n_1=n-1$, $n_2=\infty$ のF分布をすることになる。

$$f_{n_1 n_2}(F)=\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}F^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}\Big/\left\{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\right\}$$

ここで $s^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/(n-1)$ とすれば、

$$F_0=\chi_0^2/(n-1)=s^2/\bar{x}$$

となる。

周知のように、われわれの対象とする社会経済的な立地単位（人口、工場、都市等）の立地型は一般に何らかのかたちで集塊分布をなすものであり、ランダム分布や定形分布からある程度のへだたりを示しているのが普通であり、この意味で、ポアソン分布はそれ自体が対象分布のパターンを記述するよりも、むしろ、一つの帰無仮説としての意義があるわけである。即ち、集塊分布のあてはめに先立って、われわれは先ず、ポアソン分布を一つの帰無仮説として設定し、この有意性を検定することによって、対象分布の非ポアソン性を知る必要があるわけである。基本的な計測過程は以下の通りである。

一　適当な標本設計によって標本採集を行なう。

二　得られたデーターから平均$\bar{x}$と不偏分散s^2とを求め、$s^2/\bar{x}=F_0$を算定する。

三　$s^2/\bar{x}\gtrless 1$ の有意性をF検定によって判定する。

四　$s^2/\bar{x}\gtrless 1$ が非有意ならばポアソン型。$s^2/\bar{x}\gtrless 1$ が有意ならば非ポアソン型と判定する。

以上、$s^2/\bar{x}$がポアソン、非ポアソン型の判定指標として用いられることを述べたが、それではこの$s^2/\bar{x}$が1より大であるか、小であるかは確率分布との関係でどのように解釈したらよいであろうか。Student はこの点について次のように分析している。

いま、ある立地平面にn個の立地単位がランダムに分布しており、その単位面積当り立地確率をpとする。（非立地確率は$q=1-p$）この場合、単位面積内に$r=0,1,2\ldots\ldots$個発見される確率は既に述べたように、$\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$ であたえられる。この二項分布の特性値は、夫々 $\mu=np$, $\sigma^2=npq$ であり、$q=\sigma^2/\mu$, $p=1-\sigma^2/\mu$, $n=\mu/p$ で二項式 $(p+q)^n$ の性格は μとσ^2とで完全に決まってしまう。即ち、$\sigma^2/\mu>1$ ならば、$p<0$ $n<0$ で、二項式は $(q-p)^{-n}$ となり、これは後述する確率分布負の二項分布の原型である。$\sigma^2/\mu\to 1$ では $p\to 0$, μが有限ならば $n\to\infty$ であり、いうまでもなく、これはポアソン分布を導く。$\sigma^2/\mu<1$, $p>0$ $n>0$ で、$(q+p)^n$ は一般の二項式であり、上述のような正の二項分布が導かれる。

結局、μとσ^2の大小関係が、各確率分布を導く重要な岐点となるわけであるが、ポアソン分布の場合、この両者が等しいこと（$\mu=\sigma^2$）は周知のことであり、したがって、ポアソン分布の発生機構に於ける諸前提を検討することによって、この間の事情を知ろうとするのは妥当であろう。

ポアソン型の確率模型の前提は、立地確率が、

(1) $\binom{1}{a}$ すべての個体、$\binom{1}{b}$ すべての単位域について一定。

(2) 相互に独立である。

(3) 十分に小さい。

の三つであるが、いま、Student にしたがって、これら三条件を外した場合の発生機構を考え、夫々について σ^2/μ の動向を考察し、どのような確率分布が期待されるかをみてみると、それは次の四型に大別される。

(A)　前提 $\binom{1}{a}$ の除外、即ち、立地確率p_iが各単位について夫々ことなる場合、p_iが十分に小さい時は $\sigma^2/\mu\to 1$ となり、ポアソン分布が期待される。

(B)　Aのもとで、いくつかのp_iが大きい場合、$\sigma^2/\mu<1$となり、正の二項分布が期待される。

(C)　前提 $\binom{1}{a}$、$\binom{1}{b}$ の除外、立地確率 p_i は各個体について夫々相違し、各単位域についてもことなる（p_i', p_i''……）場合、$\sigma^2/\mu>1$ となり、負の二項分布が期待される。

(D)　前提2の除外、即ち、各立地試行が相互に非独立的である場合、

(D−1)　ある立地事象が、同一の立地事象の生起する確率を促進させる場合、即ち、ある単位域へのある個体の立地が、他の個体の同一域への立地を誘引促進させる可能性のある場合、$\sigma^2/\mu>1$ となり、負の二項分布。

(D−2)　逆に、これを排除ないし阻止する可能性がある場合、$\sigma^2/\mu<1$ となり、正の二項分布が夫々期待される。[5]

鳥居は、この分析を昆虫集団の場所的分布についてあてはめて、(A)を「機会的分布」(B)を「機会的分布の中に多少集中的な小班状部が散在する」もの、(C)を「強度の班状構造又は傾斜構造或は集中群の偏在様式」等をもつパターンに、更に、(D−1)を「特殊の連関的（associational）集中分布」、(D−2)を「相互排他的な排列構造」に夫々充当すると述べ[6]、これらにもとづいて、

$s^2/\bar{x}>1$ の場合　負の二項分布

$s^2/\bar{x}\to 1$　〃　ポアソン分布

$s^2/\bar{x}<1$　〃　正の二項分布

という判定規準を提案したのである。これらの規準がわれわれの立地型の三類型、定形分布、ランダム分布、集塊分布を判定識別するに

用いられることはいうまでもない。前二者については既に概説したから、ここでは、$s^2/\bar{x}>1$ が有意である場合、どのような確率模型が適用されるかを述べ、前稿の補足を試みたい。

二、集塊分布

さて、いままで繰返し述べたように、現実の社会経済的な立地事象の多くは多少とも集塊分布のパターンをとっているが、従来、知られた集塊分布に関する確率模型としては、Polya-Eggenberger の伝播分布、Neyman の擬伝播分布A型、Thomas の二重ポアソン分布、その他があげられる。このうち最初のものは、それ自体、確率論ないし統計学上の一つの標準的分布である負の二項分布であると同時に、その発生機構としては有名なポーリャの壺の問題を背景としている点で、極めて興味あるものであろう。

I　P・E・伝播分布

空間的な集塊分布に関する確率模型として、負の二項分布が認められた経緯については、Student や Fisher の古典的業績を別とすれば、Anscombe（一九四八、四九）梅棹（一九五〇）広瀬（一九五一）鳥居（一九五〇）[7]、Bliss and Fisher（一九五三）Bliss（一九五八）等を辿ることができるが、とりわけ、我国の生態学者は、これを Polya-Eggenberger 分布の名のもとに夫々独立に適用したもので、特記に値いする。

ここでは同分布の発生機構を知る意味で、ポーリャの壺の問題について述べ、これが一般的に負の二項分布型として規定され得ることを述べよう。

いま、b 個の黒球と r 個の紅球が入っている壺から、ランダムに一球をとりだし、それと同色の c 個の球と他の色の d 個の球をつけ加えて、もとにもどす。次に、この壺（$r+b+c+d$ 個の球が入っている）からランダムに一球をとりだし、先と同様な手続きを繰返す試行を考えよう。（ここに、c と d とは任意の整数であり、負であってもよい。$c=-1$, $d=0$ が、非復元のランダムな抽出にあたることはいうまでもない。）最初の球が黒である確率は $b/b+r$、そして、もし最初が黒ならば、二回目の抽出で黒球のでる確率は $b+c/b+c+r+d$ である。したがって、一回、二回目ともに黒である確率は $b/b+r\cdot b+c/b+c+r+d$ である。黒黒黒と三回つづく確率は、これに $b+2c/b+2c+r+2d$ を乗じたもので、以下同様である。一般にポーリャの壺の問題（Polya's urn scheme）として知られているものは、この一般的な壺の問題に通常の条件付確率に関する算法によって、$c>0$, $d=0$ という条件をあたえたものに他ならない。[8] 即ち、この場合、一回毎の抽出の後に、抽出されたと同色の球が c 個増し、もう一方の色の球の数は不変とする。この結果、いずれの球をとりだしたとしても、その次の抽出では前回と同色の球のでる確率は増大するであろう。n 回の抽出の結果、黒球 n_1 個と紅球 n_2 個を得る確率は、$(n=n_1+n_2)$、

$$(2.1)\quad \frac{b(b+c)(b+2c)\cdots\cdots(b+n_1c-c)\cdot r(r+c)\cdots\cdots(r+n_2c-c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)\cdots\cdots(b+r+nc-c)}$$

となる。

ここで、黒または紅球のでる事象を、夫々BとRにおきかえて述べよう。最初の試行で、B、Rである確率は夫々 p, $q=1-p$ で示せば、n 回までの試行で k 個のBと $n-k$ 個のRを得たとすれば、$n+1$ 回目の試行で、BまたはRのでる条件附確率は、夫々 $(p+k\gamma)/(1+n\gamma)$, $(q+(n-k)\gamma)/(1+n\gamma)$ となる。（ただし γ はもとの壺の問題に於ける $c/(b+r)$ をおきかえたものであり、$\gamma>-1$ であるが、通常は $\gamma\geqq 0$ とする。）n 回目までの試行で丁度 k 回Bのでる確率は、そのあらわれ方の数が $\binom{n}{k}$ 通りであるから、

$$(2.2)\quad \pi(k;n)=\binom{n}{k}\frac{p(p+\gamma)(p+2\gamma)\cdots(p+k\gamma-\gamma)\cdot q(q+\gamma)(q+2\gamma)\cdots(q+n\gamma-k\gamma-\gamma)}{1(1+\gamma)(1+2\gamma)\cdots(1+n\gamma-\gamma)}$$

となる。これが一般にポーリャ、エゲンベルガー分布と呼ばれているものである。ここで、$\gamma=0$、即ち毎回の増分がないとすれば、

$$B(k,n)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

二項分布となり、一般の独立抽出の場合と一致する。ここで、$np=\lambda$, $n\gamma=\rho$ とおき、$n\to\infty$, $p\to 0$, $\gamma\to 0$ とすると (2.2) の極限型として、

$$(2.3)\quad \pi(k;\lambda,\rho)=\frac{1}{k!}\lambda(\lambda+\rho)(\lambda+2\rho)\cdots\cdots(\lambda+(k-1)\rho)(1+\rho)^{-\frac{\lambda}{\rho}-k}$$

を得る。[9] これが、ポーリャ・エゲンベルガーの伝播分布、より一般的には負の二項分布として知られているものである。前述のP・E・分布基本型は、Bがでれば次のBがでる確率が増大し、次ぎ次ぎにBが得られる確率がいわば伝染的、或いは Feller の表現にしたがえば事後効果をもって増大してゆく、いわゆる伝播的生起の確率分布（$k=0,1,2\cdots\cdots$）をあたえるものであるが、これに対して、後者のP・E・分布の極限型は、これに伝播要因の生起確率が非常に小さく、$(p\to 0)$ かつ伝播程度も少い $(\gamma\to 0)$ という二条件を課したものであり、この意味で、現実の伝播現象への適合をはかる上で、より相応しいものといえるであろう。鳥居はこの両分布を区別して、前者 (2.2) を「広義のP・E・型分布」[10]、後者 (2.3) を「P・E・型伝播分布」と呼ぶことを提案している。

この伝播分布で基本となるのが事後効果を示す γ ないしそれにもとづく ρ であることはいうまでもない。ρ は伝播母数とも呼ばれる。$\rho\to 0$ とすると、(2.3) はポアソン分布に近づく。即ち $\pi(k;\lambda,0)=p(k;\lambda)$ となる。このことからも容易に考えられることであるが、結局、P・E・型伝播分布は、ポアソン分布の「きびしい独立の条件をゆるめて一般化し、現実性を附与した」[11] ものといえるであろう。（この一般化ないし現実化を更に進めたものとして、北川の弱伝播分布があげられる。[12]）

又 $\lambda=\rho$ ならば、(2.3) は $(1/1+\rho)^{\lambda/\rho}(\rho/1+\rho)^k$、即ち幾何分布となる。

最後に、(2.3) を変形し、

$$(2.4)\quad \pi(k;\lambda,\rho)=\binom{\frac{\lambda}{\rho}+k-1}{k}\left(\frac{1}{\rho+1}\right)^{\lambda/\rho}\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^k$$

と書けるが、これは $\{(1+\rho)-\rho\}^{-\lambda/\rho}$ を展開したときの項である。この意味で、P・E・分布が伝染病の死亡率に関する Yule の模型で有名なパスカル分布とならんで、いわゆる負の二項分布に属することはあきらかであろう。

以上、集塊分布の確率模型として代表的なP・E・伝播分布について述べたが、前述の発生機構からもあきらかなように、立地型の形成過程、即ち、立地過程に関する一般的理論からいえば、これは、あたえられた立地平面に於ける先行立地単位l_iに対して、後続立地単位l_jが正の第一次反応をもち、したがって、接近(13) (Adience) 行動をおこす場合にあてはまるものと解釈してよかろう。人口、工場その他集積の利益のはたらく場合にみられる空間的集中分布が、この対象となることはいうまでもない。現在までのところ、負の二項分布の適用は専ら医学、生物学、植物生態学等の分野に限定されており、社会経済的現象への適用は殆んどないといってよかろう。最近、D.E. Boyce が試論的なかたちで鉄道輸送網の記述に適用しているが、その適合度は非有意であった。(14)

さて、P・E・分布の特性函数は、それが離散型であり、$k=0,1,2$……で $\pi(k;\lambda,\rho)$ だけ飛躍することから、

$$E\{e^{itX}\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{itn}\pi(n;\lambda,\rho)$$
$$=\left(1-\frac{\rho e^{it}}{1+\rho}\right)^{-(\lambda/\rho)}(1+\rho)^{-(\lambda/\rho)}$$
$$=(1-\rho(e^{it}-1))^{-(\lambda/\rho)}$$

であり、母数、即ち期待されるKの母平均、母分散は夫々

$$(2.5)\quad \begin{cases}\mu=\lambda\\ \sigma^2=\lambda(1+\rho)\end{cases}$$

である。積率法により推定量は標本平均$\bar{x}$、不偏分散s^2により、

$$(2.6)\quad \begin{cases}\lambda=\bar{x}\\ \rho=s^2/\bar{x}-1\end{cases}$$

となり、これらを（2.3）に代入することによって、P・E・伝播分布の理論度数を次の如く計算することができる。(15)

$$(2.7)\quad \begin{cases}f(x=0)=q^n\\ f(x=k+1)=\dfrac{q^{n-k-1}}{(k+1)!}\prod_{n=0}^{k}(\bar{x}-np)\quad (k,n=0,1,2\cdots,r,\cdots)\end{cases}$$

ただし、$p=1-s^2/\bar{x},\ q=1-p=s^2/\bar{x},\ n=\bar{x}/p$ で $s^2>\bar{x}$

II　複合ポアソン分布

集塊分布の理論型としてのP・E・伝播分布がポアソン分布の独立の条件をゆるめて一般化したものであることは既に述べた。即ち、ポアソン分布に於ける各事象の生起は相互に完全な独立であることにその特徴があるわけであるが、これに対して、P・E・発生機構はいわゆる伝播事象、即ち各事象の生起が他の事象の生起の確率を増加ないし減少させたりする場合を説明している。しかし乍ら、P・E・伝播分布は、形式的にはいわゆる負の二項分布として規定されるものであり、前述の（2.3）そのものは、相互に独立であるが、その事象が均質ではなく非均質である場合にもよく適合する。通常いわれる「ポーリャ・エゲンベルガー分布が観測結果にうまく適合するからといって、分布の背後の機構の中に伝播現象が存在すると考えるのは必ずしも妥当でない」ということは、この間の事情を示している。しかし乍ら、われわれは、ここで立地型の識別に役立つ適切な理論型を求める、ないし、適切な発生機構を知ろうとする立場をとり、必ずしも伝播現象そのものにスティックしているわけではないから、この言明は負の二項分布をとるが、P・E・型の発生機構とはことなった発生機構があるというかたちに理解さるべきであろう。

ここではポアソン分布を一般化したものとして知られる、いわゆる複合ポアソン分布 compound Poisson distribution について、そのうちでも特に著名な分布、ガンマ型複合ポアソン分布とポアソン型複合ポアソン分布について述べよう。複合ポアソン分布とは、ラフな言いかたをすれば、いま対象をいくつかの基本的単位にわけた場合、その単位内ではポアソン分布をするが、これら単位をすべてあつめたものについては、他の分布をするようなケースにあてはまるものと考えてよい。これら両分布は、ともにこの複合ポアソン分布に属するが、前者は理論型としては（2.3）と全く同じ形、即ち負の二項分布をとるが、発生機構がP・E・型と全くことなったもの、又、後者は、いわゆる Neyman の擬伝播分布として知られているものであるが、複合ポアソン分布の定型的例、いわゆる見かけの伝播分布 (appearent contagious distribution) を代表するものとして、夫々興味あるものといえよう。

イ　Γ型複合ポアソン分布

この分布が基本的に（2．3）と同じ形をとることは既に指摘しておいたが、その発生機構としては工場災害の発生率に関する Greenwood Yule の模型を基礎にしている。いま、ある対象域をいくつかの単位域に区劃し、これら単位域を m 個ずつまとめた地域を n 個つくるとする。各単位域当り立地数を、l_{ij} $(i=1,2\cdots\cdots m; j=1,2,\cdots\cdots m)$ であらわせば、（表一）l_{ij}は各地域内では $\mu_i(i=1,2,\cdots\cdots i)$ を母平均とするポアソン分布にしたがうものとする。しかし乍ら、地域を外して l_{ij}全体の分布は、ポアソン分布ではなく、各地域内の母平均 μ_iがガンマ分布、

（表一）

地域	1	2	……	n
	l_{11}	l_{12}	……	l_{1n}
	l_{21}	l_{22}		l_{2n}
	⋮	⋮		⋮
	lm_1	lm_2	……	lmn
地域平均	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	……	$\bar{x}_n$

$$F(\mu)=\int_0^{\mu}\frac{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)}e^{-\frac{\mu}{\rho}}\,d\mu/\rho$$

ただし　$\lambda/\rho>0\quad \rho>0$

にしたがっていたとする。各地域内の分布は、立地数をkとするポアソン型 $e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$ であるから、結局、l_{ij}全体の分布は、

$$(3.1)\quad P(l)=\int_0^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}dF(\mu)$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)}e^{-\frac{\mu}{\rho}}\,d\mu/\rho$$

となる。

他方、前述の（2.3）をガンマ函数であらわすと、

$$(3.2)\quad \frac{1}{k!}\lambda(\lambda+\rho)(\lambda+2\rho)\cdots\cdots(\lambda+(k-1)\rho)(1+\rho)^{-\frac{\lambda}{\rho}-k}$$

$$=\frac{\rho^k\Gamma\left(\frac{\lambda}{\rho}+k\right)}{k!\,(1+\rho)^{\frac{\lambda}{\rho}+k}\,\Gamma\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)}$$

であるが、又、これは、

$$=\int_0^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)}e^{-\frac{\mu}{\rho}}d\mu/\rho$$

ともあらわせる。[16] この最後の形は前述の（3．1）と同じであり、この意味で、Γ型複合ポアソン分布は形式的にはP・E・伝播分布と全く同じ、負の二項分布に属するといえる。要するに、この分布は、平均μ_iを有するいくつかのポアソン型を基調として、夫々のμ_iにガンマ分布による加重をつけたものと考えられるが、ガンマ分布の形状的特徴からいって、その立地型としての主な特徴は、

一　いくつかの要素集団が、相互に重複することなく並列する。各集団内で立地点はランダムパターンをなす。

二　各要素集団の密度は相互に相違し、高密度の比較的大きい要素集団の間に低密度の比較的小さい要素集団が混在する。

三　各集団間の密度の変化は連続的ではなく、むしろ「階段的」であり、この点でP・E・伝播にみられるようなスムーズな、いわゆる傾斜構造と対比的である。

等である。

ロ　ポアソン型複合ポアソン分布

ネイマンの擬伝播分布は、ポアソン分布の一般化、又、広義の伝播性を対象としている意味でP・E・伝播分布と似ているが、数学的な形式では相違しており、複合ポアソン分布の定型的な例として扱われる。周知のようにネイマンが問題としたのは、ある範囲に散在する卵塊から孵化した幼虫が四散する場合、これら幼虫が単位域にk個みいだされる確率を求めることであった。[17] このためにネイマンの設定した前提は、

一　卵塊は対象域にランダムに散在する。

二　一卵塊から孵化した幼虫のうち、生き残るものの確率は各卵塊を通じて同一である。

三　孵化位置からある一定期間に移動する範囲は、同一齢をもつものについてはすべて同一である。

であり、各幼虫は相互に独立に自らが孵化した卵塊から四散してゆくものと考えている。ここで更に、

四　一つの卵塊からでて観測時まで生き残った個体数を考え、この一卵塊当り残存個体数 $t(0,1,2\cdots\cdots)$ がポアソン分布にしたがう。

とする。以上の前提のもとにネイマンは、A、B、C型三種の伝播分布を導いている。このうち立地型の識別のために興味あり、かつ最も研究されているのは、A型とりわけ二つの母数m_1, m_2をもつそれであろう。鳥居は、このA型が複合ポアソン分布であることに着目してこれを明示的に、

$$f^{t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(km_2)^t}{t!}e^{-km_2}\frac{m_1^{\,k}}{k!}e^{-m_1}$$

とあらわし、前述のガンマ型複合ポアソン分布と対比する意味で、ポアソン型複合ポアソン分布と名づけている。[18] いうまでもなく、これは母数 km_2 $(k=0,1,2\cdots)$ をもつk個のポアソン分布を基調として、母数m_1をもつポアソン分布の各項を加重としてつけ加えたものに他ならない。立地型の特徴はΓ型複合ポアソン分布の場合と同様、加重する分布の一般的形状に依存するが、特にこの場合、ポアソン分布の形状が母数の大小によって、いわゆるJ型から左右対称型に変るため、m_1のとる値によって可なりの変差がある。その主要な特徴は、

一　いくつかの要素集団が相互に重複することなく並列する。各集団内で立地点はランダムパターンをなす。

二　各要素集団の密度は相互に相違し、このため標本調査による場合、みかけ上はP・E・伝播分布と同様スムーズな傾斜構造と考えられるが、勿論、前述のΓ型と同じく、その変動は本来「階段的」である。

三　要素集団の大きさはm_1に依存する。即ち、一般にm_1が小さいときは、低密度の部分が大きくなり、小さな集団が散在するパターンをとり、m_1が大きいときは中位密度をもつ要素集団を最大にし、他は相称的に小さくなるパターンをとる。

等があげられる。

Ⅲ　その他のポアソン分布

前節では、二つの複合ポアソン分布について、その理論型とこれらの発生機構によって導出される立地型の特徴について概述したが、更に集塊分布にあてはめることができる理論型として、いわゆる重畳ポワソン分布と二重ポアソン分布について述べることが必要であろう。前者の空間的分布パターンへの適用は、主としてL. C. Cole（一九四六）によって、[19] 後者はM. Thomas（一九四九）によって行われたものである。[20]

(イ)　重畳ポアソン分布

一般に確率論に於て、独立な確率変数の和の分布函数を求めることが問題となる。即ち、いま二つの独立確率変数X、Yを考え、これに対応する分布函数を夫々F(x)、G(x)とした場合、Z=X+YとおきZの分布函数H(z)を求めるというのがこれである。このH(z)を求める積分過程を普通分布函数G(x)、F(x)の重畳といい、H=G*Fとあらわすのであるが、[21] 重畳ポワソン分布とは、これらX、Yが夫々ポワソン分布である独立確率変数である場合Z=X+Yについて成立する分布であるといってよかろう。立地型について考察する場合、これは、対象域に個々の立地単位が相互に独立にランダムに分布するポアソン型の集団が、幾つか独立にたたみこまれて平面的に重なって形成されたパターンを考えればよい。生態学的に

は、いわゆる normadic individuals の集塊分布がこれにあたる。いま前述のX、Yに則して、最も単純な場合、即ち、X、Yを夫々ポワソン分布 $p(i, \lambda_1)$, $p(j, \lambda_2)$ をもつものとして重畳ポワソン分布を考えてみると、

$$P(z=k)=\sum_{i+j=k} p(i, \lambda_1)p(j, \lambda_2)$$
$$=\sum_{i+j=k} \frac{\lambda_1^i}{i!}\frac{\lambda_2^j}{j!}e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}$$
$$=\sum_{i+j=k} \frac{1}{k!}e^{-\lambda_1-\lambda_2}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$
$$=\frac{1}{k!}e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i+j=k}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$
$$=\frac{1}{k!}e^{-\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1+\lambda_2)^k$$

母数 $\lambda_1+\lambda_2$ をもつポワソン分布となる。（上式で $\sum_{i+j=k}$ は $i+j=k$ なる i, j について和をとったものである。）いうまでもなく、これは重畳ポワソン分布の最も単純な場合であって、より一般的には、立地単位が単独ではなく、二個以上いくつかかたまり合って群体をなし、これがランダムに分布する広義のポワソン型の集団がいくつか独立にたたみこまれたパターンを考えることができるわけであり、この場合、その空間的パターンの立地組成がかなり複雑となることはいうまでもない。[22] これら広義のポワソン集団のたたみこみを含む重畳ポワソン分布の立地型への適用は、生態学の分野では、かなり精密化しているが、むしろ、現段階に於て、われわれにとって必要なのは、このような分布が社会経済的な立地事象との関連に於て、どのような意味をもつか、を考察してゆくことであろう。

(ロ) 二重ポアソン分布

二重ポワソン分布 double Poisson distribution は、いわゆる多重ポワソン分布 (multiple Poisson distribution) の特殊ケースである。いま確率 $p_1 q_1$、$p_2 q_2$ をもつ二つのベルヌーイの試行の系列の組合せを考えると、一回の試行の結果四個の可能な場合 (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0) がある筈である。二つの系列は独立であるから、これら四つの結果に対応する確率は夫々 p_1p_2, p_1q_2, q_1p_2, q_1q_2 である。この場合、n 回の試行の結果、(1, 1) が k_1……(0, 0) が k_4 回現われる確率は、$(k_1+k_2+k_3+k_4=n)$,

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}p_1^{k_1+k_2}q_1^{k_3+k_4}p_2^{k_1+k_3}q_2^{k_2+k_4}$$

となる。要するに、これは壺に黒、紅球が p、q の割合で入っていて、銅貨を投げて表がでれば壺から一個球をとりだす場合であるが、二重ポワソン分布は、これと全く同様に二つのポワソン分布を結合したものに他ならない。Thomas は、本来この発生機構を植物の集塊分布について提出したものであるが、これを前述したネイマンの幼虫の例になおせば、次のように言える。即ち、卵塊が単位域当り平均値 m のポワソン分布にしたがって、ランダムに生れる。各卵塊からかえる幼虫数は、母数 λ のポワソン分布をとるとする。単位域に k 個見出される確率は、

$$f_k=\sum_{r=0}^{k}\frac{m^r}{r!}e^{-m}\cdot e^{-r\lambda}\frac{(r\lambda)^{(k-r)}}{(k-r)!}$$

$$f_0=e^{-m}$$

となる。[23]

以上、集塊分布にあてはめられる確率模型について、列記してきた。紙数の都合によって、ここでは現実に観察された対象に、個々の分布をあてはめる統計的過程については殆んど触れることをしなかったが、前稿に於て概述したランダム分布、定形分布に関する模型とともに、これで立地型の識別を考察する上で基本的準備ともいえる空間的分布パターンの理論型を一応カヴァーしたことになる。いうまでもなく、立地型の識別に当っては、これら理論型の列記のみでなく、標本採集法の吟味、標本にもとづく母数推定、検定等が論ぜられねばならない。これらについては、又、稿をあらためて報告することにしたい。従来、立地型の識別は、地理学というよりは、むしろ生態学の分野で intensive に研究されてきたため、ここでも依拠した文献は、殆んどがこの分野、とりわけ個体群生態学といわれる特殊分野に属するものであり、このために、これらの報告が地理学と如何なる関係があるかと考えられる方々もいられるかも知れないが、筆者は、この立地型ないし空間的分布パターンの研究が本来地理学固有の一主題であると確信しており、この意味で、われわれの手によってこれをより一般的な体系へと構成することの必要性を痛感している。もとより本稿は、前稿とともに本来この分野に於ける既存の研究のリヴューを試みたものであり、かつ、その内容も基礎的な段階に止まっているが、従来ややもすれば等閑視されたこの分野の研究に地理学専攻者の目を向けさせる一助ともなれば幸いである。

参考文献

(1) 高橋潤二郎、一九六六、所謂立地型の識別について。三田学会雑誌、五九巻一号、七八—九三頁。

(2) Clapham, A. R., 1936; J. Ecol., 24, p. 232—251.
Blackman, G. E., 1942; Ann. Bot., Lond., N. S. 6, p. 351—370.
鳥居酉蔵、一九五二、昆虫集団の推計法、八木・野村編、生態学概説二〇二—二八六頁。
なお、鳥居は Beall coefficient of disturbance も基本的には同じ考え方をしていると指摘している。

(3) Skellam J. G., 1952; Biometrika 39, p. 346—362.
David F. N. and Moore, P. G., 1954; Ann. Bot. Lond., N. S. 18, p. 47—53.

(4) 鳥居、前掲書、二二七—二三〇頁。

(5) この部分は Student の研究と、それを鳥居が整理したものに依存している。
Student; Biometrika, 12, p. 211—215, 1919.
鳥居、前掲書、二三一—二三二頁。

(6) 鳥居、前掲書、二三二頁。

(7) Anscombe, F. J., 1948; The transformation of Poisson, binomial and negative-binomial data. Biometrika, 35, p. 246—254.
—— 1949; The Statistical analysis of insect counts based on the negative binomial distribution, Biometrics, 5, p. 165—173.
伊藤嘉昭、動物生態学入門——個体群生態学編、昭和三八年、七

二頁。
Bliss, C. I. and Fisher, R. A., 1953; Fitting the negative binomial distribution to biological data and note on the efficient fitting of the negative binomial. Biometrics, 9, p. 176—200.
Bliss, C. I., 1958; The analysis of insects counts as negative binomial distributions. Proc. intern. Congr. Ent. 2, p. 1015—1031.
(8) Feller, W., 1957; An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 1, p. 109—111.
河田竜夫監訳、確率論とその応用、一九六一年、一五七—一五八頁。
(9) P・E・分布基本形から極限形を導く過程は、国沢清典、近代確率論、岩波全書一二、一九五一年、四九頁にのっている。
(10) 鳥居、前掲書、一三六頁。
(11) 鳥居、前掲書、一三六頁。
(12) 北川敏男、ポアソン分布表、一九五一年、一七—二一頁。
(13) 高橋潤二郎、一九六三年、マルコフ連鎖としての立地過程、三田学会雑誌。
(14) Boyce, D. E., An application of the negative binomial distribution to the description of transportation networks. 1964, Univ. Penna. Mimeo.
(15) 実際の母数の推定、理論度数の計算については、
鳥居酉蔵、昆虫集団の pattern とその見わけ方、八木誠政他、新編生態学汎論、一九六〇年、三九二—三九三頁。
増山元三郎、少数例のまとめ方II、一九六四年、五九〇—五九五頁。
伊藤嘉昭、負の二項分布の計算法、農業技術一七(九)、四四〇—四四三頁。一七(一一)五五五—五五七頁。
——、前掲書、七二—七六頁。
に詳述されている。
(16) 鳥居、前掲書、一九五二年、一三八頁。
(17) Neyman, J., 1939; On a new class of "Contagious" distributions, applicable in entomology and bacteriology. Ann. Math. Stat., 10, p. 35—57.
(18) 鳥居、前掲書、一九六〇年、四〇七頁。
(19) Cole, L. C., 1946; A theory for analysing contagious distributed populations. Ecology, 27; p. 329—341.
(20) Thomas, M., 1949; A generalization of Poisson's binomial unit for use in ecology. Biometrika, 36, p. 18—25.
(21) 国沢、前掲書、六三—六五頁。
(22) これらについては、
Cole, L. C., op. cit.
鳥居、前掲書、一九六〇。
に詳述されている。
(23) 母数の推定、理論度数の算出については、
Thomas, M., op. cit.
鳥居、前掲書、一九六〇。
を参照されたい。

資料

昭和四〇年国勢調査「速報」にみられる人口集中現象について

鳥居泰彦

目次

昭和四〇年国勢調査「速報」にみられる人口集中現象について