Title	同時方程式体系による生産函数の推定
Sub Title	Estimation of production function in simultaneous equations system
Author	黒田, 昌裕
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1966
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.59, No.3 (1966. 3) ,p.321(101)- 333(113)
JaLC DOI	10.14991/001.19660301-0101
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19660301-0101

から一〇反、平均六、七反）を上回わっているのである。ここにおいて、主穀単作と特有農産物生産およびこれにともなう農村工業の収益性の差を見出せるように思われる。これに対して、戸数成長率三〇パーセント未満の中間部平坦地域は、一戸当り平均耕作面積はほぼ八反から一二反の間にあり、当時の標準的耕作面積を示すと思われる。また農産物は主穀と特有農産物（木綿・菜種・藍）が併存しており、さらに特有農産物に基づく工業生産物（木綿織物・水油等）もかなりみられる。平坦部農村として、幕末明治期における典型的な状態にあるといえよう。しかし、ここでは、利根川沿いの地帯や所沢・川越地区のような、とくに開港にともなう特有農産物に対する需要はみられず（この地帯の養蚕業の発達は微弱である）、また、江戸周辺部のように、大都市の影響も比較的希薄であると考えられる。[1] したがって、適当な耕作規模、主穀生産と特有農産物生産の併存と織物業、搾油業を中心とする農村工業の成立が、この地帯の一〇—三〇パーセント、年率にして〇・二—〇・五パーセントの成長率をもたらしたとみてよいであろう。また、この地帯の地理的条件および経済的条件を考慮すれば、この数値が武蔵国の正常な成長率とみなすべきであろう。しかし、さきに述べたように、今迄考察してきた文政一〇—明治九年は少なくとも政治的変動期であり、一部の地帯についてみれば経済的諸条件も大きく変化した時代であった。このような条件の変化した時点を含む期間における、両端のみを取り上げた二点間の成長率を考察しても、それはいわば結果としてのそれであり、このような戸数成長がどの時点において開始したかはしるよしもないし、また、これを何らかの成長要因に対する因果関係と関連づけることもさしあたり不可能である。

（1） これと関連して前節第一表の都市部成長率が村落部成長率とほぼ等しいことが想起されよう。このような地方都市は明治初年の衰退期にあったことも考慮にいれなければならないが、周辺地区の人口成長要因にはならなかったように思われる。

結び

以上のごとく、第二節において文政一〇年より明治九年までの、武蔵国戸数成長率を算出し、併せて同期間における武蔵国人口成長に関する従来の通説との比較を試みた。戸数年成長率〇・四〇パーセントは通説の人口成長率を上回わり、また明治五年から九年に至る人口成長率推計結果ともほぼ一致し、したがって戸数成長率の信頼度はかなり高いものであり、その結果、文政一一年の幕府調査人口は過大評価の可能性があることも考えられる。しかし、これは、さきにみたようにいくつかの仮定に基づいており、今後の研究をまたねばならないであろう。とくに、戸数成長と人口成長とを等しいとみなしたこと、明治九年の人口推計値、およびこれから逆算して得た同五年の人口推計値等については、将来修正の必要がある。

また、第三節では戸数成長の地域差を観察したが、このことから成長率の格差と経済的諸条件、とくに所得水準との間に一定の関係が存することが予測される。郡村誌および志料が記するところの生産物書上を利用して、成長率と所得水準の相関々係を見出すことが将来の課題になるであろう。

（一九六五・一二・一二）

研究ノート

同時方程式体系による生産函数の推定

黒田昌裕

序

経済分析における確率同時方程式体系の重要性は、ホーベルモ〔1〕、〔2〕によって提唱された。

需給函数にあっては、フリッシュ〔3〕の古典的命題 "Pitfalls in the Statistical Construction of Demand and Supply Curves" と結びついて、観測資料にあてはめる需要曲線、供給曲線が真の意味での需要供給曲線を示しているか否かを判定する、謂ゆる、識別の問題 (identification problem) が議論されるようになった。

この種の議論は需要供給分析のみならず、生産関係においても展開され、ダグラス〔4〕の先駆的研究にはじまり、ブロンフェンブレンナー〔5〕等の研究を通じて "interfirm production function" の識別問題として発展してきた。

企業単位の段階で生産関係一産出と投入のメカニズムを確率モデルをもって構成し、そのモデルに利潤極大行動または費用極小行動を挿入して同時推定モデルとして扱い、そのパラメーターの識別問題と、そのパラメーターの推定量の統計的特性を議論する。

この研究ノートでは、第一章において生産函数の確率モデルを定式化し、その際に生ずる問題を明らかにし、第二章でマルシャック＝アンドリュウス〔6〕の推定に関する議論を整理し、第三章においては、クライン〔7〕の議論、第四章において共分散分析による方法を検討し、第五章では研究のまとめとして若干のむすびをのべ、研究ノートとしたい。なおこの議論の展開は、最近出版された、ナーラブの文献〔8〕に多く依存しているが、上記の整理に加えて彼の議論をノートするとともに、その書の紹介も行いえるものと考える。

一

はじめに以下の議論で使用する生産函数の定式化を行なう。生産函数の把握の仕方自体が学説史的にみてきわめて重要な事項であるが、今しばらくは伝統的な形式として、コブ＝ダグラス型の生産函数を考えよう。

本来産出・投入の関係を物量表示でとらえるか、金額表示でとら

えるかによって理論的には大きな違いがあろうがその点を考慮して以下の如きモデルを組む。ある年 t、ある企業 f に対して

$$x_{0tf}=ax_{1tf}^{\alpha_1}x_{2tf}^{\alpha_2} \qquad (1.1)$$

なる生産函数が定式化できるとする。すなわちコブ＝ダグラス型に他ならない。x_0…産出量、x_i…生産要素 x_i 財の投入量 $(i=1,\ 2)$ である。t は年度、f は企業を示す。

各財の市場条件が以下の如くであるとする。すなわち

$$x_{0tf}=b_0'p_{0tf}^{\eta_0},\quad x_{1tf}=b_1'p_{1tf}^{\eta_1},\quad x_{2tf}=b_2'p_{2tf}^{\eta_2} \qquad (1.2)$$

第一式は生産物の需要函数、第二、三式は夫々生産要素 x_1、x_2 の供給函数である。

このとき、$y_{0tf}=p_0x_{0tf}$, $y_{itf}=p_ix_{itf}$ $(i=1,\ 2)$ で総収入および総支出を表わせば (1.2) から

$$y_{itf}=b_ix_{itf}^{\beta_i} \quad i=0,\ 1,\ 2 \qquad (1.3)$$

ただし $b_i=(1/b_i')^{1/\eta_i}$, $\beta_i=1+1/\eta_i$

ここで、利潤

$$\pi_{tf}=y_{0tf}-y_{1tf}-y_{2tf}$$

の極大化の必要十分条件は、π_{tf} に関する一階の条件から

$$x_{0tf}=ax_{1tf}^{\alpha_1}x_{2tf}^{\alpha_2},\quad \frac{\alpha_i\beta_0}{\beta_i}=\frac{y_{itf}}{y_{0tf}},\ (i=1,\ 2) \qquad (1.4)$$

二階の条件として

$$\beta_0\alpha_i(\beta_0\alpha_i-\beta_i)\frac{x_{0tf}}{x_{itf}^2}<0 \quad i=1,\ 2 \qquad (1.5)$$

$$\beta_0\alpha_1\beta_0\alpha_2(\beta_0\alpha_1-\beta_1)(\beta_0\alpha_2-\beta_2)\frac{x_{0tf}^2}{x_{1tf}^2x_{2tf}^2}>(\beta_0\alpha_1\beta_0\alpha_2)\frac{x_{0tf}^2}{x_{1tf}^2x_{2tf}^2}$$

となる。

さらに、$\beta_0>0$ とすれば、一般に $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2>0$ だから

$$\alpha_i<\frac{\beta_i}{\beta_0},\quad i=1,\ 2,\quad \alpha_1\frac{\beta_0}{\beta_1}+\alpha_2\frac{\beta_0}{\beta_2}<1 \qquad (1.6)$$

となる。

このモデルは統計的な確率模型ではない。我々はこれを、確率模型として、定式化しなおさねばならない。

(1.2) 式を対数線型にし、物量表示で表わすと

$$\begin{aligned} X_{0tf}-\alpha_{1tf}X_{1tf}-\alpha_{2tf}X_{2tf}&=A_{tf}\\ B_{0tf}X_{0tf}-\beta_{1tf}X_{1tf}&=B_{1tf}\\ B_{0tf}X_{0tf}\qquad-\beta_{2tf}X_{2tf}&=B_{2tf} \end{aligned} \qquad (1.7)$$

となる。確率項、すなわち攪乱項は種々の形で挿入しうる。ここでは、先の議論を考慮して、最も一般的な確率模型を記しておく。

(1.1) 式にかわって、

$$x_{0tf}=ax_{1tf}^{\alpha_1\varepsilon_{1tf}}x_{2tf}^{\alpha_2\varepsilon_{2tf}}w_{0tf} \qquad (1.8)$$

(1.3) 式にかわって

$$y_{itf}=b_ix_{itf}^{\beta_i\nu_{itf}}v_{itf} \quad (i=0,\ 1,\ 2) \qquad (1.9)$$

とする。$\varepsilon_{itf}(i=1,\ 2)$ は、生産要素の弾力性に含まれる攪乱要因である。ν_{itf} は、製品および生産要素の需給方程式のパラメーターに含まれる攪乱項、又、w_{0tf}, v_{itf} は夫々の方程式に含まれる攪乱項である。(1.8), (1.9) にしたがうとき、利潤極大の条件式は、一階の条件 (1.4) にかわって

$$x_{0tf}=ax_{1tf}^{\alpha_1\varepsilon_{1tf}}x_{2tf}^{\alpha_2\varepsilon_{2tf}}w_{0tf}$$

$$\frac{\alpha_i\varepsilon_{itf}\beta_0\nu_{0tf}}{\beta_i\nu_{itf}}=\frac{y_{itf}}{y_{0tf}} \quad (i=1,2) \qquad (1.10)$$

二階の条件 (1.5) にかわって

$$\beta_0\alpha_i\nu_{0tf}\varepsilon_{itf}(\beta_0\nu_{0tf}\alpha_i\varepsilon_{itf}-\beta_i\nu_{itf})\frac{x_{0tf}}{x_{itf}^2}<0$$

$$\beta_0\alpha_1\beta_0\alpha_2\nu_{0tf}^2\varepsilon_{1tf}\varepsilon_{2tf}(\beta_0\alpha_1\nu_{0tf}\varepsilon_{1tf}-\beta_1\nu_{1tf})\times$$

$$(\beta_0\alpha_2\nu_{0tf}\varepsilon_{2tf}-\beta_2\nu_{2tf})\frac{x_0^2}{x_1^2x_2^2}>(\beta_0\alpha_1\nu_{0f}^2\varepsilon_{1f}\beta_0\alpha_2\varepsilon_{2f})\frac{x_{0tf}^2}{x_1^2x_2^2} \qquad (1.11)$$

と改められる。対数を用いて表示すれば、利潤極大模型は、

$$\begin{aligned} X_{0tf}-\alpha_1\varepsilon_{1tf}X_{1tf}-\alpha_2\varepsilon_{2tf}X_{2tf}&=A+u_{0tf}\\ \beta_0\nu_{0tf}X_{0tf}-\beta_1\nu_{1tf}X_{1tf}&=B_1+u_{1tf}\\ \beta_0\nu_{0tf}X_{0tf}-\beta_2\nu_{2tf}X_{2tf}&=B_2+u_{2tf} \end{aligned} \qquad (1.12)$$

$$u_{0tf}=\log w_{0tf},\quad u_{itf}=\log\frac{v_{itf}\nu_{itf}}{v_{0tf}\nu_{0tf}\varepsilon_{itf}}$$

となる。資料は一般に、時系列データ、横断面データ、横断面データを時系列でプールしたものの三種が考えられる。夫々の場合に適応してこのモデルは変えられ、又市場条件の仮定に従って、攪乱項の幾つかは消去できる。

利潤極大のモデルでは、X_{0tf}, X_{1tf}, X_{2tf} が、内生変数であって、夫々についての誘導型をもとめることができる。その結果 X_{0tf}, X_{1tf}, X_{2tf} が攪乱項 u_{itf} $(i=0,\ 1,\ 2)$ の同時確率分布に依存し、従って、(1.12) 式の第一方程式のパラメーターの最小自乗推定値は、独立変数と攪乱項とに相関があると考えられるから不偏推定値でも、一致推定値でもありえない。したがって、何らかの同時推定の手続が取られなければならない。

又、(1.12) の体系にあっては、各財の価格水準（相対価格水準）は内生変数であって、X_{0tf}, X_{1tf}, X_{2tf} の誘導型パラメーターから、構造パラメーター α_1, α_2, A, β_0, β_1, β_2, B_1, B_2 を識別することはできない。すなわち、体系は、underidentifiable（識別が不能）なものとなっている。なんらかの外的制約条件を追加することなしには、パラメーターを確定できない。[1]

第二章以下の議論では、生産函数の推定に際して生ずる、推定量の特性に関する問題点と識別可能性 (identifiability) の問題を種々の市場条件のもとで考察してみる。

二

前章で生産関係が企業の行動としての利潤極大の条件式と同時的に推定されねばならぬこと、その際 (1.12) で示される体系は、識別不能であるために、新しく制約条件が追加されるべきことを説明した。

マルシャック＝アンドリュウス〔6〕は、企業単位のクロス・セクション・データからこの推定法を考察する。各企業にとって、生産要素に対する生産弾力性を示すパラメーター、および生産要素の市場の価格弾力性を示すパラメーターは共通の値をとるものと仮定される。各企業間較差は、w_{0f}, w_{1f}, w_{2f} のみに依存するものと考えられる

とする。そのとき、モデルは、

$$X_{0f}-\alpha_1X_{1f}-\alpha_2X_{2f}=A+u_{0f}$$
$$\beta_0X_{0f}-\beta_1X_{1f}=B_1+u_{1f} \qquad (2.1)$$
$$\beta_0X_{0f}-\beta_2X_{2f}=B_2+u_{2f}$$
$$B_i=\log\frac{b_i\beta_i}{\alpha_ib_0\beta_0},\quad u_{0f}=\log w_{0f},\quad u_{if}=-\log(v_{if}/v_{0f})$$

となる。ここで u_{0f} は、企業間の技術的較差を示すものとして、technical efficiency と呼び、u_{1f}, u_{2f} は、企業間の企業家能力(ability)の差を示すものとされ、economic efficiency と呼んで、両者を区別する。

議論は四段階の制約附加に分かれる。

先ず、第一制約条件は、利潤極大条件の二階条件によって与えられる。

前述の (1.6) 式で示した如く、

$$\alpha_1\frac{\beta_0}{\beta_1}+\alpha_2\frac{\beta_0}{\beta_2}<1$$ である。

一般に

$$0<\beta_0\le1,\quad \beta_i\ge1\quad i=1,2 \qquad (2.2)$$

を仮定することができるから、a priori に、$\beta_0, \beta_i(i=1, 2)$ を求めることができるとすれば、(1.6) 式は Figure 1 の $\alpha_1-\alpha_2$ 平面における直線と両軸にかこまれた内部を示すから α_1, α_2 のとるべき値に関して一つの範囲を与えることができる。

第二の制約は、先に定義した technical efficiency についてのものである。f 企業の technical efficiency が f' 企業の technical efficiency の k 倍であったとすると、

$$u_{0f}-u_{0f'}=\log_{10}k$$

とあらわされる。

technical efficiency が対数正規分布をしていると仮定すれば、u_{0f} の分散 σ_{00} を資料から求めることができる。f 企業はたとえば n 個の企業のうち、efficiency の程度において、上位から1.5％の水準に位置するものとし、f' 企業はその程度に於て、下位から1.5％の水準に位置するものとすれば、σ_{00} は

$$\log_{10}k\cong4.34\sqrt{\sigma_{00}}$$

と対数正規分布表から近似できる。

$k=4$ のときには、$\sigma_{00}=0.0192$ となる。したがって、資料から、一般に σ_{00} の上限と下限が求められるとすれば、

$$0<c\le\sigma_{00}\le c' \qquad (2.3)$$

が確定される。

ここで σ_{00} は、母集団における残差 u_{0f} の分散であって、標本分散ではない。しかしながら、標本が比較的大きいものならば、パラメーター α_1、α_2 が与えられたときの標本分散 s_{00} は、母集団の u_{0f} の分散 σ_{00} の一致推定値とみなしうる。それゆえ、σ_{00} を s_{00} でおきかえてもよい。X_i と X_j のモーメントを M_{ij} とすれば、

$$s_{00}=M_{00}+\alpha_1^2M_{11}+\alpha_2^2M_{22}-2\alpha_1M_{01}-2\alpha_2M_{02}+2\alpha_1\alpha_2M_{12} \qquad (2.4)$$

を容易に導びくことができる。

この s_{00} について、(2.3)の制約条件を挿入すれば、(2.4)は $\alpha_1-\alpha_2$ 平面における楕円の方程式であるから第二の制約によって、Figure 1 で $\alpha_1-\alpha_2$ のとりうる範囲はさらに縮小される。

第三の制約は、technical efficiency と economic efficiency との相関についてのものである。(2.5) 式の第二、第三方程式について考える。市場が完全競争市場であるとすれば、方程式は、

$$u_{if}=\log\frac{y_{0f}}{y_{if}}+\log\alpha_i\quad i=1,2 \qquad (2.5)$$

となる。y_{0f}, y_{if} について、

$$w_{if}=\frac{y_{if}}{y_{0f}}\quad i=1,2 \qquad (2.6)$$

を定義すれば、これは、生産要素の総生産物にしめる割合を示している。したがって、α_i がすべての企業について共通だとすれば、

$$u_{if}=-\log w_{if}+\text{const.}\quad i=1,2 \qquad (2.7)$$

となる。それゆえ、u_{0f} と u_{if} の共分散は

$$\sigma_{0i}=E(u_{0f}u_{if})=-E(u_{0f}\log w_{if})$$

と定義される。$Eu_{0f}=0$ を仮定すれば、u_{0f} と u_{if}、すなわち、technical efficiency と economic efficiency との相関係数は、

$$\rho_{0i}=\frac{\sigma_{0i}}{\sqrt{\sigma_{00}\sigma_{ii}}}\quad i=1,2 \qquad (2.8)$$

となる。

しかるに

$$\sigma_{ii}=Eu_{if}^2=E[-\log w_{if}+\text{const.}-E(-\log w_{if}+\text{const.})]^2$$
$$=E[-\log w_{if}+E(\log w_{if})]^2$$
$$=VAR[-\log w_{if}]$$

それゆえ、(2.8) は

$$\rho_{0i}=-\rho_{u_{0f}\log w_{if}} \qquad (2.9)$$

となり、u_{0f} と u_{if} の相関係数は、technical efficiency と生産要素の総産出価値額にしめる割合の対数値との相関係数の符号を逆転したものとなる。

第一生産要素を労動、他を資本と考えるならば、一般に

$$-\rho_{u_{0f}\log w_{1f}}=\rho_{01}>0$$
$$-\rho_{u_{0f}\log w_{2f}}=\rho_{02}<0 \qquad (2.10)$$

を仮定しうる。C_{01}、C_{02} の大きさに関して a priori な仮定が可能ならば、

$$\rho_{01}\ge C_{01}>0$$
$$\rho_{02}\le C_{02}<0 \qquad (2.11)$$

（ただし、C_{01}、C_{02} はある定数。）がえられる。

標本が大きければ、母集団相関係数 ρ_{0i} の一致推定値として、標本相関係数 r_{0i} を代入することができる。r_{0i} は、標本に於ける分散・共分散が下のように求められるから、C_{01}、C_{02} が a priori にある定数を与えるとすれば、$\alpha_1-\alpha_2$ 平面に於て、パラメーター α_1、α_2 に関して制約を加えることになる (Figure 1 参照)。

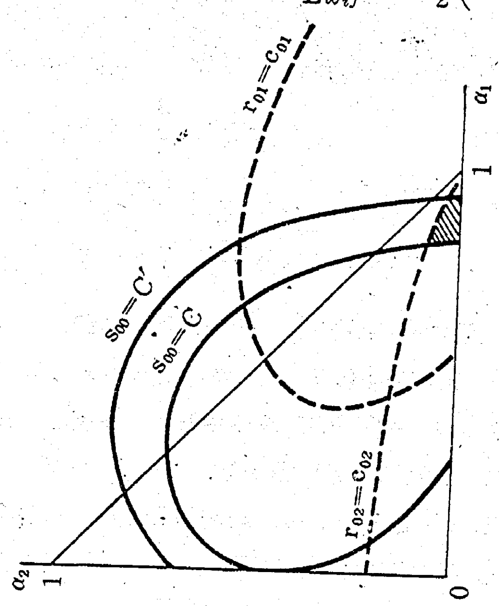
$$s_{0i}=\beta_0M_{00}-\beta_iM_{0i}-\alpha_1\beta_0M_{01}+\alpha_1\beta_iM_{1i}-\alpha_2\beta_0M_{02}+\alpha_2\beta_iM_{i2} \qquad (2.12)$$
$$s_{ii}=\beta_0^2M_{00}+\beta_i^2M_{ii}-2\beta_i\beta_0M_{0i}\quad i=1,2$$

r_{0i} は、β_i、β_0 が与えられれば、一般に円錐の切断面方程式を示し、$r_{0i}=0$ のとき、直線、r_{0i} が増加するにしたがい、放物線、楕円、となり、$r_{0i}=1$ or -1 のとき、一点を示すことになる。第四の制約として、完全競争を仮定すれば、さらに制約を加えることが可能となる。

産出額の総価値額に対する利潤の割合を w_{if} と定義すれば、一般に technical efficiency と w_f とは正相関の関係にあると考えられる。$\log w_{if}$ を母集団平均 Ew_{if} について展開すると、

$$\log w_{if}=\log(Ew_{if}+(w_{if}-Ew_{if}))\qquad(2.13)$$
$$=\log Ew_{if}+\frac{w_{if}-Ew_{if}}{Ew_{if}}-\frac{1}{2}\left(\frac{(w_{if}-Ew_{if})}{Ew_{if}}\right)^2+\cdots\cdots$$

第 1 図



となり、二次以降の項を無視すれば $Eu_{0f}=0$ を仮定して

$$\sigma_{0i}=-\frac{Eu_{0f}w_{if}}{Ew_{if}}\qquad i=1,2$$

の近似をうる。しかるに $w_{1f}+w_{2f}+w_f=1$ だから

$$\sigma_{01}Ew_{1f}+\sigma_{02}Ew_{2f}=Eu_{0f}w_f\qquad(2.14)$$

$Eu_{0f}w_f>0$ は一般的にいえることであるから

$$\sigma_{01}Ew_{1f}+\sigma_{02}Ew_{2f}>0\qquad(2.15)$$

σ_{01}, σ_{02}, w_{1f}, w_{2f} に夫々、標本値を与えると

$$s_{01}E\overline{w}_{1f}+s_{02}E\overline{w}_{2f}>0\qquad(2.16)$$

となり、$\alpha_1-\alpha_2$ 平面に於ける制約が附加される。以上がマルシャック＝アンドリゥスの要約であるが、前述のナーラブは、図を用いてこれを第1図のように表示する。図の斜線部分が $\alpha_1-\alpha_2$ の存在しうる範囲である。(2.1) 式の第一方程式の単一最小自乗法がバイアスを生ずることは、Hoch〔9〕によって数学的に証明されている。この場合、図からも明らかな如く、u_{0f} と u_{if} との相関が零ではないかぎり、ユニークな α_i の解は求められず、制約の附加にもかかわらず、現実には、u_{0f} と u_{if} の無相関を直接的に仮定することは困難であり、したがってこの点において、この手法は致命的な欠点を有すると云わねばならない。この点を合せて、この制約の附加は、サンプルの選択にともなう恣意性が含まれる危険が大きく、実践性にも欠けている。

この手法をより合理的に利用するために、第四章において、資料管理の目的で共分散分析の手法が導入される。この方法は実際的には、欠点が多く、特に経済分析を行なう場合にしばしばみられる統計至上主義に陥りやすい危険性を孕んでいると考えられる。

その手法については後章にゆずるとして、マルシャック＝アンドリゥスの手法の直接的応用例として、Verhulst〔10〕のアプローチがある。Verhulst は、フランスにおけるガス産業の横断面資料に対して、マルシャック＝アンドリゥスの手法を適用して、生産函数パラメーターの推定、および経済効率の測定を行なっている。

ナーラブ〔8〕の指摘したとおり、Verhulst の分析は、この適用方法を誤っているものとしか云えない。なんとなれば Verhulst は、(2.4) 式で与えられるサンプルからの残差の分散 s_{00} を出来るだけ小さく、そして又、第三の制約の r_{10}、r_{20} を出来るだけ大きくするような α_1、α_2 を求めている。これは、Verhulst の s_{00} が小さければ小さい程、technical efficiency が高く、technical efficiency が高ければ高いほど economic efficiency も又高いという、a priori に恣意的に置かれた仮説に依存するものである。そして又、たとえ、この仮説を容認するとしても、α_1、α_2 の均衡解を求めんとする彼の意図はパラメーターのバイアスを拡大するばかりで、なんら不偏的推定量をえることにはならない。もし上記の仮説が強く妥当すればするほど、u_{0f}、u_{if} に関する同時確率分布の確定が必要となるのではあるまいか。しかしながら、u_{0f}、u_{if} の同時確率分析が何らかの形で与えられたとしても、この四方程式による制約を満たすような形で、最尤法を適用することは、計算上の制約が大きすぎると考えられる。

三

前の議論において、マルシャック＝アンドリゥスの体系は under-identiable（識別不能）であって、制約条件を追加してもなおかつユニークな解がえられないことを述べた。しかもなお、β_i の与え方は全く a priori なものであって、完全競争の仮定がない場合には、その β_i の推定自体にバイアスを生ずることを示した。β_i はここで云う市場条件を示すものであって、以下に示されるクラインの手法においても、市場条件が大きな役割を果していることを指摘する。

クライン〔7〕の分析は、アメリカの鉄道サービスという公共的統制部門の生産函数を求めることである。鉄道業のような公共部門にあっては、個々の企業は、ある交通量（貨物輸送、人間輸送）を所与のものとして受け取らねばならない。すなわち、統計的には、これはサービスの産出量がもはや生産函数に含まれる攪乱項と独立であることを意味している。この仮定はマルシャック＝アンドリゥスがユニークな解を求め得なかったことに比して、クラインの手法が決定的な有意性を有する由縁である。

又クラインのモデルでは、要素市場に於ける要素価格を所与としており、これはパラメーターの推定にさいして、完全競争市場を仮定したことと同義の効果をもつことになる。

ただクラインのモデルの場合、鉄道サービスの産出が、貨物輸送と人間輸送という一種のプロダクト＝ミックス（product-mix）の形態をとっており、しかも投入量が前章の如く、二種のみではなく、それ以上に分割されていることが特徴であるといえる。

クライン流の推定法を先ず考察するのはナーラブの分析にしたがい、一般的なコブ＝ダグラス型の生産函数によって、おこなうのが便利である。

(1.10) 式において、利潤極大の条件式に於ける、$\nu_{0f}=1$ と仮定

して、対数をとれば、

$$X_{0f}-\alpha_1\varepsilon_1 X_{1f}-\alpha_2\varepsilon_2 X_{2f}=A+u_{0f}$$

$$Y_{0f}-Y_{if}+\log\alpha_i=u_{if}\quad i=1,2 \tag{3.1}$$

となり、もちろん、横断面資料であるから、サブスクリプトの、t は落している。クラインが設定した仮定にしたがえば、$\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$ と簡単化され、又 X_{0f} と u_{0f} とには相関がないと考えられている。このとき、クラインの推定法は

$$\widehat{\log\alpha_i}=\frac{1}{F}\sum_{f=1}^{F}\log\frac{P_iX_{if}}{P_0X_{0f}}$$

$$\log a=\frac{1}{F}\sum_{f=1}^{F}[X_{0f}-\hat{\alpha}_1X_{1f}-\hat{\alpha}_2X_{2f}] \tag{3.2}$$

のごとく示される。(3.2)の第一、第二方程式は α_1、α_2 が、第一、第二 input の総価値額の各企業の産出総価値額に対する割合の幾何平均としてもとめられ、その α_1、α_2 を第三方程式に代入することによって、定数項がもとめられる。

クラインの手法をより一般的に考えれば、

$$\widehat{\log\alpha_i}=\frac{1}{F}\sum_{f=1}^{F}\log\frac{P_{if}x_{if}}{P_{0f}x_{0f}}=\frac{1}{F}\sum_{f=1}^{F}\log\frac{y_{if}}{y_{0f}}\quad i=1,2$$

$$\widehat{\log a}=\frac{1}{F}\sum_{f=1}^{F}\left[X_{0f}-\frac{y_{1f}}{y_{0f}}X_{1f}-\frac{y_{2f}}{y_{0f}}X_{2f}\right] \tag{3.3}$$

となることが、ナーラブによって示されている。

クラインの(3.2)の体系からもとめられる α_i の推定値は不偏性、一致性という点において問題をもっている。

今、u_{0f}, u_{1f}, u_{2f} が、平均零、分散共分散有限値のある同時分布にしたがっているものとする。(3.2)の方程式へ、(3.1)の第二、第三方程式を代入すると

$$\widehat{\log\alpha_i}=\log\alpha_i+\sum_f\frac{u_{if}}{F}\quad i=1,2 \tag{3.4}$$

となる。期待値を考えると

$$E\,\widehat{\log\alpha_i}=\log\alpha_i+E\sum_f\frac{u_{if}}{F}=\log\alpha_i\quad i=1,2 \tag{3.5}$$

それゆえ、$\widehat{\log\alpha_i}$ は、不偏推定値である。

しかも $\widehat{\log\alpha_i}$ の分散を考えると

$$E[\widehat{\log\alpha_i}-\log\alpha_i]^2=E\frac{(\sum u_{if})^2}{F} \tag{3.6}$$

となり、チェビシェフの不等式によって

$$P\left\{\left|\left(\frac{\sum u_{if}}{F}\right)\right|>b\right\}<\frac{\sigma_i^2}{Fb}$$

ただし $\sigma_i^2=Eu_{if}^2$、それゆえ σ_i^2 が有限とすれば $F\to 8$ のとき、$P\left\{\left|\left(\frac{\sum u_{if}}{F}\right)\right|>b\right\}\to 0$ となる。したがって、$\widehat{\log\alpha_i}$ は一致推定値でもある。

しかしながら

$$\hat{\alpha}_i=e^{\widehat{\log\alpha_i}} \tag{3.7}$$

としてもとめられる $\hat{\alpha}_i$ の推定値は、

$$E\hat{\alpha}_i=Ee^{\widehat{\log\alpha_i}}<e^{E\,\widehat{\log\alpha_i}}=e^{\log\alpha_i}=\alpha_i \tag{3.8}$$

であるから、下方バイアスを生ずることがわかる。ただ、一致性に関しては、何らかの連続的な変換をほどこしても、それが継続されるから、$\hat{\alpha}_i$ は一致推定値である。しかしながら、この $\hat{\alpha}_i$ の推定値を代入して得られる $\log a$ は一般には、不偏でも一般推定値でもありえない。(3.3)の第三方程式のような手法によったとしても、一般に ε_{0f} の平均が零であることが仮定されないかぎり、バイアスを持ち、したがって又、$\log a$ が不偏推定値であったとしても、a は $\log\alpha_i$ についてと同様な理由でバイアスを有することとなる。

クラインの鉄道サービスの生産函数の場合そのモデルは、周知のとおり、

$$x_{1f}=Ax_{2f}^{\delta}n_f^{\alpha}c_f^{\beta}d_f^{\gamma}u_f \tag{3.9}$$

x_1…運搬された貨物の純トン・マイル、x^2…純人・マイル、n…雇用の人・時間、c…消費された燃料のトン数、d…利用された列車時間、w…平均一時間当り給与、q…燃料一トン当りの平均費用、r…資本用役の平均費用、となっている。パラメーターの企業間較差は存在せず、x_{1f}、x_{2f} という二種の産出があるが、いずれも外生的に所与となっているから、u_f との間には相関が存在しない。

このとき、x_{2f} が外生だから費用極小原理によって[2]

$$\widehat{\log\beta/\alpha}=\sum_f\frac{\log\frac{q_{cf}}{wn_f}}{F}$$

$$\log\gamma/\alpha=\sum_f\frac{\log\frac{rd_f}{wn_f}}{F} \tag{3.10}$$

でもとめられる $\log\beta/\alpha$, $\log\gamma/\alpha$ の推定値は、不偏で一致な推定量であるが、β/α、γ/α はバイアスを生ずる。

又、その他のパラメーターについては、

$$\log n_f+\frac{\beta}{\alpha}\log c_f+\frac{\gamma}{\alpha}\log d_f=\hat{y}_f \tag{3.11}$$

として求められる、$\hat{y}_f$ に対して

$$\hat{y}_f=\frac{A}{\alpha}-\frac{\delta}{\alpha}\log x_{2f}+\frac{1}{\alpha}\log x_{1f}-\frac{1}{\alpha}\log u_f \tag{3.12}$$

の最小自乗法によるあてはめを行なって、もとめられる。このとき、x_{1f}、x_{2f} が u_f と独立であるという仮定から、少くともパラメーター $\frac{A}{\alpha}$、$\frac{\delta}{\alpha}$、$\frac{1}{\alpha}$ は一致推定値となりうる。

しかしながら、もし生産函数の各パラメーターに企業間較差が存在するとすれば、モデルは

$$x_{1f}=Ax_2^{\delta\varepsilon_{2f}}n_f^{\alpha\varepsilon_{nf}}c_f^{\beta\varepsilon_{cf}}d_f^{\gamma\varepsilon_{df}}\varepsilon_{1f} \tag{3.13}$$

のごとくとなり、$\frac{\beta}{\alpha}$、$\frac{\gamma}{\alpha}$ の推定値ばかりでなく、(3.12)式は

$$\hat{y}_f=\frac{-\log A}{\alpha\varepsilon_{nf}}-\frac{\delta\varepsilon_{2f}}{\alpha\varepsilon_{nf}}\log x_{2f}+\frac{\log x_{1f}}{\alpha\varepsilon_{nf}}-\frac{\log\varepsilon_{1f}}{\alpha\varepsilon_{nf}} \tag{3.14}$$

となり、もはや、夫々のパラメーターは、不偏推定値でも一致推定値でもありえなくなる。

市場条件による a priori な制約がクラインのモデルにおいてみられるように、非常に重大な推定上の利点をもたらし、しかもモデルの選択に与える影響の大なることがうかがわれる。

四

前章までの議論で、生産函数の同時推定に附随する種々の問題を

扱い、その困難を指摘した。しかしながら、もとより経験科学としての経済分析に従事するわれわれとしては、推定法を論ずるまえに、得られる資料の性質を吟味するという配慮を怠ることはできない。(3)

前述のように、一般に資料は time series データ、cross section データ、両者をプールしたデータの三種が考えられる。

マルシャック＝アンドリゥス、およびクライン等の議論は、横断面資料に対してなされた。

cross section データと time series データをプールしたものによる推定に際してデータの処理の試みが、マンドラック〔11〕によってなされている。彼の分析方法を概観し、その実践的限界を考えてみることにする。

マンドラックの場合、共分散分析法（covariance analysis）による資料整備を行なう。

彼のモデルは、(1.10)式にかわって

$$x_{0tf}=a\,x_{1tf}^{\alpha_1}x_{2tf}^{\alpha_2}k_{0t}m_{0f}u_{0ft}$$

$$\frac{\alpha_i\beta_0}{\beta_i k_{it}m_{if}u_{itf}}=\frac{y_{itf}}{y_{0tf}}\qquad i=1,2 \tag{4.1}$$

となる。ここで $k_{0t}m_{0f}u_{0ft}=w_{0tf}$,

$$k_{it}m_{if}u_{itf}=v_{itf}$$

で、k は時系列的変化にともなう攪乱項、m は企業間変化にともなう攪乱項、u はその他の攪乱項と分類されている。又、このモデルでは、パラメーターの企業間較差は存在しないことを仮定している。

このとき、産出および投入要素の需給方程式を

$$y_{itf}=b_i x_{itf}^{\beta_i}k'_{it}m'_{if}v_{itf} \tag{4.2}$$

とすると、(4.1) 式の対数をとって大文字で示し、さらに行列表示にすれば、

$$\begin{pmatrix}1 & -\alpha_1 & -\alpha_2\\ \beta_0 & -\beta_1 & 0\\ \beta_0 & 0 & -\beta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{0tf}\\ X_{1tf}\\ X_{2tf}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-A_0\\ A_1\\ A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_{0t}\\ K_{1t}\\ K_{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}M_{0f}\\ M_{1f}\\ M_{2f}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U_{0tf}\\ U_{1tf}\\ U_{2tf}\end{pmatrix} \tag{4.3}$$

ただし　$A_0=\log a,\quad A_i=\log\left(\frac{\alpha_i\beta_0 b_0}{\beta_i b_i}\right)\quad (i=1,2)$

$K_{0t}=\log k_{0t},\quad M_{0f}=\log m_{0f},\quad U_{0tf}=\log u_{0tf}$

$K_{it}=\log\left(\frac{k'_{it}k_{it}}{k_{0t}}\right),\quad M_{if}=\log\left(\frac{m'_{if}m_{if}}{m_{0f}}\right),\quad U_{itf}=\log\left(\frac{v_{itf}w_{itf}}{u_{0tf}}\right)\quad (i=1,2)$

(4.3) 式を単純化のために、

$$BX+\Gamma=\varepsilon \tag{4.4}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -\alpha_1 & -\alpha_2\\ \beta_0 & -\beta_1 & 0\\ \beta_0 & 0 & -\beta_2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}X_{0tf}\\ X_{1tf}\\ X_{2tf}\end{pmatrix},\quad \Gamma=\begin{pmatrix}-A_0\\ A_1\\ A_2\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}K_{0t}\\ K_{1t}\\ K_{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}M_{0f}\\ M_{1f}\\ M_{2f}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}U_{0tf}\\ U_{1tf}\\ U_{2tf}\end{pmatrix}$$

とする。さらにデータを平均からの偏差の次元で考えれば、

$$BX=\varepsilon \tag{4.5}$$

となる。(4.5)式から誘導型をもとめれば、

$$X=B^{-1}\varepsilon \tag{4.6}$$

となり、(4.6) 式から明らかなように、X は、ε の同時確率分布に依存し、しかも体系は識別不能となっている。

ε について考えると、これは、k、m、u の合成であり、夫々の定義から時間が固定されていれば、時間的変化効果 k は定数であり、企業が固定されていれば、m が固定的となる。データから、これらの効果をはじめに除去することができるとすれば、a priori に攪乱項 ε に対して仮定をもうけることができる。

一般性を失うことなく、

$$\sum_t K_{it}=\sum_f M_{if}=0\quad (i=0,1,2) \tag{4.7}$$

を仮定してもよい。

そのとき、次のことがいえる。

$$\frac{1}{F}\sum_f\varepsilon_{itf}=\varepsilon_{it\cdot}=K_{it}+U_{it\cdot}$$

$$\frac{1}{T}\sum_t\varepsilon_{itf}=\varepsilon_{i\cdot f}=M_{i\cdot f}+U_{i\cdot f} \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{FT}\sum_f\sum_t\varepsilon_{itf}=\varepsilon_{i\cdot\cdot}=U_{i\cdot\cdot}\quad (i=0,1,2)$$

夫々、時間に関する平均値、企業に関する平均値、全体に関する平均を示している。

このとき、$\varepsilon_{itf}=K_{it}+M_{if}+U_{itf}$ であるから(4.8)をもちいて、

$$\varepsilon_{itf}-\varepsilon_{it\cdot}-\varepsilon_{i\cdot f}+\varepsilon_{i\cdot\cdot}=u_{itf}-u_{it\cdot}-u_{i\cdot f}+u_{i\cdot\cdot}\quad (i=0,1,2) \tag{4.9}$$

を考えることができる。

これを、$\varepsilon^{FT}=\varepsilon_{itf}-\varepsilon_{it\cdot}-\varepsilon_{i\cdot f}+\varepsilon_{i\cdot\cdot}$

$u^{FT}=u_{itf}-u_{it\cdot}-u_{i\cdot f}+u_{i\cdot\cdot}$

とすれば $\varepsilon^{FT}=u^{FT}$ となり、ε^{FT} は、もはや、$k_{it\cdot}$, $m_{i\cdot f}$ の効果は含んでいない。この操作は、$x_{itf}(i=0,1,2)$ についても、同様に

$$x_i^{FT}=x_{itf}-x_{it\cdot}-x_{i\cdot f}-x_{i\cdot\cdot} \tag{4.10}$$

として、新しいデータ x_i^{FT} を求めることが可能となる。この処理は、原資料を使用した場合よりも、ε_{0tf} と $\varepsilon_{itf}(i=1,2)$ との間の相関関係を少なくしたことになると考えてよく、$E(\varepsilon_{0tf}\varepsilon_{itf})=0$ を仮定することを可能にさせるかもしれない。

この仮定は、第二章の議論において、γ_{01} および γ_{02} を零と仮定することであり、β_i に関する a priori な情報があれば、マルシャック＝アンドリゥスの手法によって、ユニークな解を求めることを可能にするといえる。ただ、この方法においてもなお、完全競争等の仮定がなければ依然として体系は識別不能であり、完全な解決とは云えない。

その上、共分散分析法によるデータの処理は、真の意味で、time effect や firm effect と呼ばれる攪乱項の部分を除去したことになるか否かについては、統計学的なきめ手がないという批判は免がれられない。

五

利潤極大図式における生産函数モデルの展開は前章までの議論で示すとおり、市場条件の制約なしには、ユニークな解をもとめることは困難である。

コブ＝ダグラス型の生産函数による同時推定方式の議論は容易に他のタイプの函数にも拡張することが可能であろう。

利潤極大モデルでは、産出及び生産要素需要が内生変数となり、市場における需給函数の挿入によって、市場価格も又内生化される。

経験科学としての経済分析では環境の先見的認識が極めて重要な意味をもつことが明らかとなる。

例えば、収穫逓増の局面にある経済にあっては、利潤極大よりもむしろ費用極小の体系の方がよりオペレーショナルと考えられる種々の要素が存在する。

理論は事実の確実な把握に基づかなければならない。モデルの定式化は仮説であり、統計的手法は仮説の検定のための手段である。

資料が分析者にとってきわめて貧困な状態にあっては、天文学者が望遠鏡の整備に力を入れるがごとく、資料の吟味を行ない我々は得られた資料からできるかぎり普遍的な法則性を見出すべく努力しなければならない。

生産函数、その他の分野において、同時方程式体系のアプローチは、経済現象の自律的把握を目的とするものであり、もちろんその段階に至るまでの理論の内部的整合性が保証されねばならないことはいうまでもない。

この研究ノートを閉じるにあたって、生産函数の同時推定方式の研究のより一般的な探究が必要であることと、特にクラインの方法におけるような費用極小図式によるモデル展開の検討が必要であることを主張したい。(4)

又、理論仮説を overidentifiable（過剰決定的）なものに組んでおくことが一つの解決をもたらすかもしれない。

この点はさらに研究をすすめたい。

（1）もし価格が外生変数として扱えたとしても、価格に変化が少ない場合、パラメーターの推定値の efficiency が低下する。

（2）クラインの推定においては、産出 x_r は外生として扱われるから、費用方程式

$$c_r=wn_r+qc_r+rd_r$$

の x_r 水準での極小条件を導けばよい。

またクラインの仮定によれば、パラメーターの企業間較差は存在しないが、この手法では較差が存在することを暗に前提にしている。

（3）資料管理（data control）と呼ぶ。

（4）推定に関するかぎり、費用極小体系の方が利潤極大体系よりも種々の点で有利と考えられる。

参考文献

〔1〕 Trygve Haavelmo, "The Statistical Implications of a System of Simultaneous Equations," Econometrica, Vol. 11, January 1943.

〔2〕 Trygve Haavelmo, "The Probability Approach in Econometrics," Econometrica, Vol. 12. Supplement, July 1944.

〔3〕 Ragnar Frisch, "Pitfalls in the Statistical Construction of Demand and Supply Curves," 1933.

〔4〕 Paul H. Douglas, "The Theory of Wages," New York, Macmillan, 1934.

〔5〕 M.Bronfenbrenner, "Production Functions: Cobb-Douglas, Interfirm, Intrafirm," Econometrica, Vol. 12, January 1944.

〔6〕 Jacob Marschak and William H. Andrews, "Random Simultaneous Equations and The Theory of Production," Econometrica, Vol. 12, July-October 1944.

〔7〕 L. Klein, "A Textbook of Econometrics," Row, Peterson and Co., 1953.（宮沢・中村訳）

〔8〕 Marc. Nerlove, "Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Functions," North-Holland Publishing Co.—Amsterdam, 1965.

〔9〕 Irving Hoch, "Simultaneous Equation Bias in the Context of the Cobb-Douglas Production Function," Econometrica, Vol. 26, 1958.

〔10〕 Michel. J. J. Verhulst, "The Pure Theory of Production Applied to the French Gas Industry," Econometrica, Vol. 16, 1948.

〔11〕 Yair Mundlak, "Estimation of Production and Behavioral Functions from a Combination of Cross-Section and time-Series Data," Measurement in Economics, edited by Yehuda Grunfeld, Stanford Univ. Press, 1963.