| | |
|---|---|
| Title | 所謂立地型の識別について |
| Sub Title | Identification of locational pattern |
| Author | 高橋, 潤二郎 |
| Publisher | 慶應義塾経済学会 |
| Publication year | 1966 |
| Jtitle | 三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.59, No.1 (1966. 1) ,p.78(78)- 93(93) |
| JaLC DOI | 10.14991/001.19660101-0078 |
| Abstract | |
| Notes | 研究ノート |
| Genre | Journal Article |
| URL | https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19660101-0078 |

研究ノート

# 所謂立地型の識別について

高橋潤二郎

本稿はいわゆる立地型 locational pattern の識別問題を扱っている。その中心的課題はいうまでもなく理論的な立地型の規定にあるが、同時に、現実に観察された立地型をこの理論型との関連に於てどの様に判別するか、又、現実の観測が標本調査に依存する場合には、あたえられた標本値から母集団の母数をどの様に推計するか、通常の表現にしたがえば、立地型に関する統計的仮説検定と推計の問題をも含んでいる。

一般に、立地とは位置の選択、決定、適応等を意味すると同時に、この様な行動によって確定された位置そのものを意味しているが、ここで言う立地型とは、この後者、即ち確定された位置の集合の空間的分布の型(パターン)に他ならない。この様な立地型について論ずるには、少くとも次の二要素の特性を明確に限定することが必要である。その一つは立地の行われる場、即ち地理的ないし空間的範囲とその特性の限定であり、第二に、その範囲内で特定の位置を占拠する対象ないし個体の特性に関する限定とである。これらの限定によって、われわれは具体的な立地型、或いはその複合体である現実の地理的分布から非常に抽象化された思考実験ともいうべき操作によって導出された点分布の如き立地型に至る広範囲なパターンを取扱うことが可能となるのである。以下でしばしばもちいられる立地空間ないし立地域、そして、立地単位ないし個体はこれら二つの要素に対応するものである。このうち立地単位は通常の統計学上の用語にしたがえば変量 variate を構成するものであり、その位置的変数としてとり得る範囲が立地空間であるとも考えてよい。この限りで、その立地型が一種の立地単位を含む場合、多数の種類の立地単位を含む場合を区別する必要があろう。本稿では、この前者、即ち一種類の立地単位の立地型のみを扱うが、前述の如く、ここで定義した立地型は位置の集合としてのそれであり、立地単位は位置的変数としてのみ扱われるから、結局ここではいわゆる点分布として知られる立地型を扱うことになる。

一般に、立地型ないしその具体的な複合体としての地理的分布は、その型ないし分布を構成する単位の種類、行動様式、その型ないし分布のみられる立地空間ないし地理的範囲の諸特性等いくつかの因子に依存している。この限りで、現実の立地型を分析説明するということは、これら諸因子を識別し、これらの相互作用ないし依存関係を理解することに他ならない。いま、これら諸因子によって構成される全体系を、それが立地型を制御規制する意味で立地体系と呼ぶことにしよう。この立地体系はいうまでもなく抽象概念であり、この未知の体系をオペレーショナルに表現したのがいわゆる模型、この場合は、立地模型に他ならない。体系の一般的類型化にしたがってわれわれは立地模型を決定的と確率的の二模型に類型化することができる。[1] 前者は、決定的体系(ディターミニスティク)、即ち同一の初期条件の投入によって常に同一の空間的分布を導出する体系に対応するものであり、後者は確率的体系(ストカスティク)、即ち初期条件の如何にかかわらず或る確率法則によって規定されるような分布を導出する体系に対応するものに他ならない。本稿ではこの二模型の導出する理論的立地型として、夫々定形分布とランダム分布をあげ、両者についてその特性を述べるが、現実に多数の立地型がこれら両体系の純粋作用の結果ではなく、むしろ何らかのかたちでの混合であるという見地から、定形分布にランダムな攪乱を加味した模型をも検討する。

現在広範囲に認められている理論的立地型としては、これら定形分布、ランダム分布の他に集塊分布があげられる。一般に種々な空間的分布を識別区分する基本的特性値として密度D、即ち総立地個体数と総面積の比をあげることができるが、この密度を一定とし、立地域を同一面積の単位域に区劃し、単位域当り平均立地度数を前記三分布について夫々 $\bar{x}_u$、$\bar{x}_r$、$\bar{x}_c$ とするならば、一般に、$\bar{x}_u < \bar{x}_r < \bar{x}_c$ が成立するものとされている。この様な平均度数は単位域の形状、面積に依存するが、このことは分布を構成する立地点間の距離を々の分布を特性づける値としてとれば回避される。即ち、いま分布を構成する立地点について、隣接点間の距離を $r$ として、この平均隣接単位間の距離を三分布について夫々 $\bar{r}_u$、$\bar{r}_r$、$\bar{r}_c$ とすれば、一般に、$\bar{r}_u > \bar{r}_r > \bar{r}_c$ が成立するものと考えられる。定形分布について $r$ は定数であり、平均距離が最大となるとき各立地点は $\{p, q\} = \{3, 6\}$ の正則タイル張りを構成する各面の頂点と同様な空間的配置をとるであろう。ランダム分布に於ては立地点の配列は全くランダムであり、したがって、$r$ は確率変数として扱われ、通常二次元のポアソン分布によってあたえられる。集塊分布は $r$ がこれら分布より小さい。換言すれば、立地点が可能なかぎり相互に接近している場合であるが、「可能なかぎり……接近している」という表現は必ずしも明瞭ではない。たとえば、少くとも理論的には、すべての個体が平面上の一点に位置している場合が考えられるわけであり、これらの個体はオペレーショナルな意味では、立地型としては識別不可能であり、平均密度も無意味な概念になってしまう。この意味で Dacy は各個体の位置は別々であるが、その隣接点間の距離が非常に小さい一定値 $\varepsilon$ をとる分布を集群分布 Clumped pattern と呼んでいる。[2] この限りで集群は集塊のオペレーショナルな定義と考えてさしつかえない。

いま平均密度Dを一定とし、平均立地度数、平均距離について三分布の特性を比較したが、Dが各分布について相違する場合、上記の

比較が成立しないことは明白であり、この限りで、現実の分布の考察についてDは基本的な特性値であり、この変化を加味した比較検討が行われねばならない。又、三分布比較の規準としてあげられた単位域当り立地度数と隣接点間距離は、実は立地型の計測方法として一般に認められているいわゆる方形区劃法と隣接単位法にもとづいて導出されたものである。これらはともに元来植物生態学に於ける標本調査方法として開発されたものであるが、前者は対象分布のみられる平面をいくつかの同面積の小正方形（クオドラート）に区劃し、これを単位域として各クオドラート毎にその中に存在する個体数を調査し、これを基礎にして個体の空間的分布の特性を計測するものであり、後者はその名称の示す様に、あたえられた平面の任意の点ないしそこに分布する個体のうち一つを基点としてとり、この基点とそれに最も近接している個体との距離を計測して、これにもとづいて分布測定をはかるものである。

### ランダム分布

理論的な立地型の一つであるいわゆる空間的なランダム分布を導出する確率法則として、現在広範囲に認められているのは、ポアソン分布である。いうまでもなく、ポアソン分布は二項分布 $B(n, p)$ の極限、即ち $n$ が非常に大きくかつ $p$ が非常に小さい場合について成立する確率分布であり、二項分布が一般に何らかの現象を $n$ 回観察するとき、Aという事象（或いは排反事象A'）が $x$ 回（$n-x$）起る確率をあらわす、いわゆるベルヌーイの試行について成立する分布であることを考えれば、このことは直観的に理解され得るものであろう。

いま、一次元の立地空間、即ち立地線をとり、これを非常に多くの数 $n$ 個に分割し、各区間の長さを $1/n$ とする。この単位区間に特定の個体をランダムに配置する作業を行ってみよう。この場合一つの区間はランダムに配置される個体を全く含まないか、或いは少くとも一個を含むかのいずれかである。この二つの可能性を、夫々立地、非立地と呼び、前者の生ずる確率を立地確率と呼び $p$ であらわすことにしよう。ここで、㈠立地確率は区間の長さが同一であるからすべての区間について一定であり、㈡任意の区間の立地確率は他の区間のそれとは相互に独立であるという二条件を課するならば、この試行、即ち立地試行はベルヌーイの試行と同じものと考えられる。即ち、$n$ 回の試行の結果、立地線上に、$x$ 個のランダムな個体の配置ないし立地点を得る確率は $B(x; n, p)$ であたえられる。前述の如く、一つの単位区間は数個のランダムな立地点を含む可能性をもつが、これは $n$ を非常に大きくすることによって回避される。即ち $n\to\infty$ の場合、確率は $B(x; n, p)$ の極限であたえられる。$np$ は単調増加であり、もし $np\to\lambda$ ならば、$B(x; n, p)\sim B(x; n, \lambda/n)\to p(x; \lambda)$ となり、あたえられた立地線にランダムな立地点がちょうど $x$ 個含まれる確率はポアソン分布

$$p(x; \lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

であたえられる。母数 $\lambda$ はいうまでもなく立地線上に於ける立地点の度数を決定する役割をもち、$\lambda$ が大きくなれば立地点のない確率 $p(0; \lambda)=e^{-\lambda}$ は小さくなる。

いま、立地空間として線分を想定して、この立地線上の立地点の分布を考えたが、このことは立地空間として平面を想定した場合についても同様にあてはまる。即ち、いま一つの立地平面を考え、これを同一面積 $1/n$ をもった単位区域に分割し、前と同様な立地試行を行ってみよう。この場合、㈠任意の単位域の立地確率はその面積のみに依存し、その形状に依存しないとすればすべての区域について立地確率は一定であり、㈡任意の区域の立地確率は相互に独立であるという二条件を課し、そして、同一の単位域内に二個以上の立地点の含まれる可能性を排除するために $n$ を非常に大きくすれば、$n$ 回の立地試行の結果、この立地平面にちょうど $x$ 個の立地点の含まれる確率は前と同様な過程を経て、

$$p(x; \lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

によってあたえられる。（ただし $n\to\infty$）

以上は立地線、立地平面を夫々 unit interval, unit area として考えた場合であるが、立地線に距離 $t$、立地平面に面積 $s$ を導入した場合も基本的には同じであって、夫々

$$p(x; \lambda t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!}$$

$$p(x; \lambda s)=e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^x}{x!}$$

であたえられる。[3] ただし、この場合、試行回数は $nt$, $ns$ に最も近い整数である。

観察された現実の立地型が、前述の如きランダム分布をとるか否かの判定のための作業過程としていくつかあるが、そのうち主要なものは、前に指摘した正方区劃法と隣接単位法による二過程である。本来、これらの方法は、ライン法、ポイント法とともに、植物生態学に於ける一般的標本調査法として発展してきたものであり、これらの方法が単にランダム分布の判定のみに用いられるというわけではない。特に、前者正方区劃法はあらゆる空間的分布の統計的調査研究のための基本的用具であることは広範に認められているところである。これに対して、後者は、それを一部として含むいわゆる間隔法 (Distance or Spacing Method) が主として空間的分布の密度、分散を測定する方法として開発されてきており、とりわけ、つい最近までは専らランダム分布の計測にその主点がおかれてきたことから言って、ランダム分布との関係に於て、立地型を考察する上で特色ある役割をになっていることは事実であるが、これとてもランダム分布の判定のみにあるのではなく、その役割がより一般的であることはあきらかであろう。

#### ㈠ 正方区劃法

正方区劃法は対象となる立地域をいくつかの小正方形に区劃し、これを標本抽出ないし理論的考察の単位域とするものである。いま任意の立地域に有限個の個体が立地している（或いは有限の点が分布している）としよう。この立地域を同一面積をもつN個の小正方形に区劃し、各正方単位域に立地する個体数ないし立地点数を観測するとして、$x$ 個の立地点数を含む単位域数を $n_x$ とすれば、

$$n_0+n_1+n_2+\cdots\cdots=\mathrm{N}$$

となる。N個の単位域に含まれる立地点の総数Tは、

$$0n_0+n_1+2n_2+\cdots\cdots=\mathrm{T}$$

であり、T/Nは単位域当り平均立地点数、換言すれば平均立地度数である。Nが非常に大であれば、大数の法則によって、ちょうど$x$個の立地点を含む単位域数は、

$$n_x \approx \mathrm{N}p(x;\ \lambda s)=\mathrm{N}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^x}{x!}$$

によって推計され、これを立地点の総数を示す前掲式に代入すれば、

$$\mathrm{T}\approx\mathrm{N}\{p(1;\ \lambda s)+2p(2;\ \lambda s)+3p(3;\ \lambda s)+\cdots\cdots\}$$

$$=\mathrm{N}\left(\frac{(\lambda s)^1}{1!}e^{-\lambda s}+2\frac{(\lambda s)^2}{2!}e^{-\lambda s}+e^{-\lambda s}3\frac{(\lambda s)^3}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\mathrm{N}e^{-\lambda s}\lambda s\left(1+\lambda s+\frac{(\lambda s)^2}{2!}+\cdots\cdots\right)$$

ただし、ティラー展開によって、

$$e^{\lambda s}=1+\lambda s+\frac{(\lambda s)^2}{2!}+\cdots\cdots$$

であるから、

$$\mathrm{T}\approx\mathrm{N}\lambda s e^{-\lambda s}e^{\lambda s}=\mathrm{N}\lambda s$$

となり、したがって、

$$\lambda s=\mathrm{T/N}$$

となる。T/Nは前述の如く単位域当り平均立地度数であり、これがポアソン分布の母数$\lambda s$の推定値となる。

表1は一般的な作業過程を示している。

表 1

| 単位域当り立地点数 | 単位域数 | 期待値 |
|---|---|---|
| $x$ | $n_x$ | $\mathrm{N}p(x;\ \lambda)$ |
| 0 | $n_0$ | $\mathrm{N}p(0;\mathrm{T/N})$ |
| 1 | $n_1$ | $\mathrm{N}p(1;\mathrm{T/N})$ |
| 2 | $n_2$ | $\mathrm{N}p(2;\mathrm{T/N})$ |
| ……… | | ……… |
| | N | |

$$\mathrm{T}=\sum xn_x$$

空間的分布にポアソン分布が適合する観測例として最も代表的な事例はJ. Neymanによるペトリ板上のバクトリアの分布であるといわれているが、W. Fellerによる第二次大戦中ロンドン南部に於ける被爆統計への適用も直観的に理解し易い好例であろう。対象域は面積$S=1/4\ \mathrm{km}^2$の小区域N=576に分割され、V号爆弾がちょうど$x$個落下した区域数$n_x$が調べられた。この場合被爆総数は$\mathrm{T}=\sum xn_x=537$ 平均は$\lambda s=\mathrm{T/N}=0.9323$であり、観察値はポアソン分布によって示される理論値と非常によく合っている。[4]（表2）

表 2

| $x$ | $n_x$ | $\mathrm{N}p(x;0.9323)$ |
|---|---|---|
| 0 | 229 | 226.74 |
| 1 | 211 | 211.39 |
| 2 | 93 | 98.54 |
| 3 | 35 | 30.62 |
| 4 | 7 | 7.14 |
| 5以上 | 1 | 1.57 |

植物生態学に於てBlackman (1935)、Ashby (1945)、等に始まり、Curtis & Mackintosh (1957)、沼田(1958)に至るまで植物の個体分布に関するポアソン分布の適合に関する議論はひんぱんに行われており、[5]地理学の分野に於ても地質学的研究としてR. L. Miller (1956)をあげることができる。

ポアソン分布の適合度検定として最も一般的なものは通常の自由度$(n-1)$の$\chi^2$検定であろう。ポアソン分布の一般式は$p(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$であり、前述の如く$\lambda=\bar{x}$、これを代入して、$e^{-\bar{x}}\frac{(\bar{x})^x}{x!}$、これに標本数$n$を乗じて夫々の$x$についての期待度数$n(\bar{x})^x/e^{\bar{x}}x!$を得る。観測度数、理論度数を$\chi^2$の一般式

$$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{F}_i-\mathrm{E(F)}]^2}{\mathrm{E(F)}}$$

にあてはめ、有意水準$\alpha$のもとに$\chi^2$と$\chi^2_\alpha$を比較すればよい。$\chi^2$検定法はポアソン分布適合度検定としては最も普及しているが、その通常の制約条件によって、度数が5以下となる級が存在する場合については用いられない。

R. A. Fisherが提案した離散指標Index of dispersionは、自由度$(n-1)$の$\chi^2$検定のために標本調査の場合、次の統計値を使用する。[6]

$$\frac{\sum_{i=0}^{k}[f_i(x_i-\bar{x})]^2}{\bar{x}}$$

ただし$x_i$は単位域当り立地点数$x_i=0,1,2,\cdots\cdots k$、$f_i$は$x_i$点を含む単位域数、$\mathrm{N}=\sum f_i$であり、$\bar{x}=\sum f_i x_i/\mathrm{N}$である。通常の計算のためには

$$\frac{\sum f_i x_i^2-\bar{x}\sum f_i x_i}{\bar{x}}$$

と簡便化される。いうまでもなく、この指標は$\chi^2$変数の代替値として利用されるわけであり、最近フィシャー自身が指摘している如く、[7]もし$x$が小さく級数が少い場合若干の問題がある。即ち、この様な場合ポアソン分布からの偏差の判定がしばしばその単位域立地数が5以下なる級の数値に依存することが予想され、したがって$\chi^2$検定と同様の意味でこの指標の適用にいささかの疑問が生ずるからに他ならない。

これらの他の適合度検定法としては、A. R. Claphamが使用したいわゆる相対分散relative variance, $w_2/w_1'$ ($w_2=\sigma^2$; $w_1'=\bar{x}$) 即ち分散平均比率がある[8]（これはBlackmanによって分散係数とも呼ばれている）。ポアソン分布については、$\lambda=\mathrm{E}(x)=\mathrm{Var}(x)$でこの比率は1、もし$w_2/w_1'>1$ならば立地型はランダム分布よりも離散の度合が大であり、$w_2/w_1'<1$ならば離散の度合がより少い。標本調査の場合、この指標は

$$\frac{\sum_{i=0}^{k}(x_i-\bar{x})^2}{\bar{x}(n-1)}$$

であたえられる（$n$は総立地点数）。この指標は直観的に理解され易く簡単であるし、更に離散の度合を前述の定形、ランダム、集塊の三理論型を区分する規準との関係に於て把えれば、これによって他の二分布についての考察も可能であるという意味で利点があるが、標本採集の単位域の規模によって結果が左右されるという難点をもっている。

F. C. Evansは標本域の大きさの変化にもとづく度数分布の変容

について詳述し、一般に標本域の規模の増大はそのうちにより多数の立地点を含む区域数を増大し、逆にそのうちに点を含まない区域数を減少させ、したがって、単位域の規模の増大はそのうちに1個ないし全く立地点を含まない域数を増大すると考えられるが、同時に起る単位域総数の減少によって、この級の相対的頻度は増大し、かつ度数分布の上限をのばす効果をもつと指摘している。[9] この点について、前述のミラーはそのペンシルヴァニア期の泥板岩中に含まれた Lystrocanthus の背椎骨の分布に関する計測について考察しているが、平均密度 $D=163/5516=0.0295$ は各規模について勿論一定であるが、単位域当り平均立地度数 $\bar{x}$ と分散平均比率 $s^2/\bar{x}$ は規模の拡大とともに減少しており、その度数分布の形も明瞭にちがっている。[10]（表3）

表 3

| 特殊値 ＼ 方形区割規模 | 16×16 | 8×8 | 4×4 | 2×2 |
|---|---|---|---|---|
| 単位当り平均立地度数 | 6.608 | 1.633 | 0.484 | 0.118 |
| 分数・平均比 | 2.515 | 1.822 | 1.236 | 1.091 |
| | D=0.0295 | | | |

方形区割法に於ける単位域の最適規模の問題は、従来多くの論議を呼び、いまだ完全な解答を見出さない、この分野に於ける基本的な未解決問題であるが、これらについては、また稿をあらためて考察することにしたい。

(二) 隣接単位法

前述の如く隣接単位法は主として植物生態学の研究者によって開発されたもので、その主要な貢献は、Skellam (1952), Moore (1954), 森下 (1954, 1956, 1959)、Clark & Evans (1954, 1955, 1956) Thompson (1956) Dacy (1960) 等によってなされた。[11] 隣接単位間の距離を考察するための立地空間としては通常直交する二軸 (X, Y) の正象限が想定され、ここに $(x, y)$ でその位置が示される有限個の個体の分布が考察される。この場合、任意に選ばれた単位域内の立地確率がすべての単位域について一定であり、かつ相互に独立であるならば、前述の如くこれら立地点の分布がランダム分布を構成することはいうまでもない。隣接単位法はこの様にしてあたえられたランダム分布を対象として隣接点間の距離を規準にしてポアソン分布の母数を推定しようというものに他ならない。ランダム分布に於ける単位域当り平均立地度数の理論値を導出するに用いられた隣接単位法には、森下のいわゆる最短距離法をはじめいくつかあるが、結局、それは、

(一) 分角法 angle or region method

(二) 順位法 order or *n*th neighbor method

の二つにわけられる。前者は平面上にランダムに分布している立地点のうち任意の一点を中心に平面をK個の等分角に区割し、これを単位域として、中心点と夫々の単位域内での最近接点との距離 $r$ と計測しこの確率密度を求めることによって、母数推計を行うものに他ならない（森下の最短距離法は順序法の特殊ケース、即ち $n=1$ の場合である）、最近、森下、デーシーは夫々この両者を結合したより一般的な方法を開発したが、[12] これらについては夫々の論文を参照することとして、ここでは特に Clark & Evans の隣接点間の対照関係を中心にして述べてみたい。

クラークとエヴァンスは、対照関係について「自然のポピュレーション では、多くの個体は相互に＜対照的＞なかたちで関係づけられている。即ち、多くの場合、二個の個体は他のいずれに対してよりも相互に近接している」と述べているが、[13] 彼等の研究は対象域に含まれる全個体のうちこの対照関係の成立する個体の割合を求め、これを個体の空間的分布の測定に応用したものであり、更に、森下の二次元に於ける隣接点間距離の確率分布密度を得て、この対照関係を $n$ 番目の隣接点まで拡張し、対象分布を構成する個体のいわゆる群化 grouping を行ったものである。

いま、これを考察するために対照関係の一般的定義を次の如くあたえよう。即ち、前述の如き立地平面を想定し、この平面上の任意の点 $I_i$ をとり、この点に最も近い隣接点を $I_j$ とし、この関係を $I_i \to I_j$ とあらわす。又、$I_j$ が $I_i$ に対する最も近い隣接点であるならば、$I_j \to I_i$ とあらわす。もし、$I_i \rightleftarrows I_j$ ならば二点は対照関係をもつという。いま任意の点を基点 $I_0$ として、その周辺に分布する各点を $I_0$ への近接順位にしたがって、$I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots$ とするならば、この関係は $n$ 番目の隣接点 $I_n$ まで拡張することができる。即ち、もし $I_0 \rightleftarrows I_n$ が成立するならば、$I_n$ は $I_1, I_2, \ldots\ldots I_{n-1}$ を除いた他のいかなる点よりも $I_0$ に近接しているわけである。クラークとエヴァンスのいわゆる群は、この様な基点 $I_0$ と対照関係にあるような諸点の系列に他ならない。

さて、その上にランダムに個体が位置を占めている立地平面を想定しよう。この場合、任意の単位域に $x$ 個の個体が含まれる確率は、前述の如く $e^{-x}(\lambda s)^x/x!$ である。任意の立地点とそれに対照関係にある点をとり、$I_0$、$I_1$ とする。いま、この隣接距離を $r$ とすれば、両点は相互に半截する二つの円（半径 $r$）の中心とみなすことができる。いま $I_0$ を中心とする円を、等分角によって $k$ 個の扇形区割に分割する。いま単位域当り立地度数を $\rho$ とするならば、扇形区割当り平均度数は $\rho k^{-1}\pi r^2$ となる。これはいうまでもなく $\lambda s$ であるから、前掲の一般式に代入すれば、面積 $k^{-1}\pi r^2$ の扇形区割にちょうど $x$ の立地点を見出す確率は、

$$p(x;\ \lambda s)=e^{-\rho k^{-1}\pi r^2}\frac{(\rho k^{-1}\pi r^2)^x}{x!}$$

同様に、この区割が一点も含まない確率は

$$p(0;\ \lambda s)=e^{-\rho k^{-1}\pi r^2}$$

又、1個以上の立地点を含む確率は、$1-e^{-\rho k^{-1}\pi r^2}$ である。この確率は $r$ にしたがって変化するから、これを $p(r)$ とあらわし $r$ について微分すれば、

$$\frac{dp(r)}{d(r)}=e^{-\rho k^{-1}\pi r^2}\,2\rho k^{-1}\pi r$$

或いは

$$dp(r)=2\rho k^{-1}\pi r\,e^{-\rho k^{-1}\pi r^2}\,dr$$

となる。$I_1$ が $I_0$ の最も近い隣接点であるということは、$I_1$ を中心とする円内にその他の点が含まれないことを意味するから、その確率は、

$$pr(I_0 \leftarrow I_1)=2\rho\pi r\,e^{-\rho\pi r^2}\,dr$$

である。さらに $I_1$ が $I_0$ の最も近い隣接点であることを所与とし

て、$I_0$が$I_1$の最も近い隣接点であるということは、中心点$I_0$をもつ円と重複しない$I_1$の円の部分に他の立地点が存在しないことを意味するが、この部分の面積は、$r^2(\pi/3+\sqrt{3}/2)$であるから、前と同様に $\lambda s=\rho r^2(\pi/3+\sqrt{3}/2)$ とすれば、

$$pr[(I_0\to I_1)\mid(I_0\leftarrow I_1)]=e^{-\rho r^2(\pi/3+\sqrt{3}/2)}$$

となる。$I_1$が$I_0$の隣接点であり、$I_0$が$I_1$の隣接点である確率$pr[I_0 \overset{\rightarrow}{\leftarrow} I_1]$は、通常の確率算法にしたがって両者の確率の積であらわされる。この結合確率を$r$について積分すれば、あたえられた対象分布を構成する立地点のうち、隣接点間に対象関係の成立する割合Pが得られる。

$$P=\int_0^\infty 2\rho\pi r\, e^{-\rho\pi r^2}\, e^{-\rho r^2(\pi/3+\sqrt{3}/2)}\,dr$$

$$=\int_0^\infty 2\rho\pi r\, e^{-\rho r^2(4\pi/3+\sqrt{3}/2)}\,dr$$

$$=e^{-\rho r^2(4\pi/3+\sqrt{3}/2)}\,\frac{\pi}{4\pi/3+\sqrt{3}/2}\Bigg|_0^\infty$$

$$=\frac{6}{8\pi+3\sqrt{3}}=0.6215$$

クラークとエヴァンスは、この対照関係の成立する割合に関する理論値を検討するために、一〇〇〇個の点よりなるランダム分布をつくり、その計測を行ったが、その実験値として 0.602 を得た。

クラークは、更に森下による二次元の立地空間に於ける$n$番目の隣接点までの距離$r$の確率分布にもとづき、これを$k$次元に拡張し、$n$番目の隣接点までの対照関係の成立する割合を示す一般式として、

$${}_kP_n=\left[\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)-\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)^{(k-1)/2}dx}\right]^n$$

を得た[14]（記号はクラークにしたがう）。一見手におえない感じであるが、立地平面を考える場合、$k=2$

$${}_2P_n=\left[\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{\Gamma(2)}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx}\right]^n$$

ただし、

$$\Gamma(3/2)=1/2\sqrt{\pi},\ \Gamma(2)=1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

であるから、

$${}_2P_n=\left[\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)}\right]^n$$

$$=\left(\frac{6\pi}{8\pi+3\frac{3}{2}}\right)^n$$

となり、したがって、第一番目の隣接点については $6\pi/8\pi+3\sqrt{3}=0.6215$、これはいうまでもなく前述の割合と一致する。第二番目の隣接点については $(6\pi/8\pi+3\sqrt{3})^2=0.3863$ となる。





表4はクラークの二次元を対象にした原表に、ミラーとカーンが一次元、三次元のそれを附加したものであるが、いうまでもなく、現実に観察された立地型がランダム分布であるか否かの判別はここに示された期待比と観察比を比較することによってなされる。一般的な作業過程としては表5の通りである。先ず対象分布のうち、任意の個体をとり、これを$I_0$とし、その$I_1$, $I_2$……各隣接点につき対照関係を調べ、各組合せについて、成立するものには1、成立しないものは0をあたえ、次に二番目の基点をランダムに選び同様な過程を経て基礎表を作成、次いで各行を総和し、これを総標本数Nで除して観察比を算出する。観察比が理論比に比較して小である場合、この分布はランダム分布に比してより離散的であり、観察比が理論比に比較して大である場合分布はより集塊的と言えるであろう。

表 4

| $n$番目の隣接点 | 一次元 | 二次元 | 三次元 |
|---|---|---|---|
| 1 | .6665 | .6215 | .5926 |
| 2 | .4444 | .3863 | .3512 |
| 3 | .2963 | .2401 | .2081 |
| 4 | .1975 | .1492 | .1233 |
| 5 | .1317 | .0927 | .0731 |
| 6 | .0878 | .0576 | .0433 |
| 7 | .0585 | .0358 | .0257 |
| 8 | .0390 | .0223 | .0152 |
| 9 | .260 | .0138 | .0092 |
| 10 | .0173 | .0086 | .0053 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Miller, Kahn; Statistical Analysis in the Geological Sciences, 1962.

以上、理論的な立地型としていわゆるランダム分布についてその特性、母数の推計、ランダム性の仮説検定について述べてきた。方形区劃法、隣接単位法のいずれをとる場合にも夫々観察値と理論値との比較によってあたえられた分布がランダム分布であるか否かを判定することが可能であることを示してきたが、しかしながら、これらの検定は観測された立地型が非ランダムな場合、その諸特性について積極的なインフォーメーションをあたえるかというと必ずしもそうではない。換言すれば、これらの検定は、あたえられた分布が他の二つの理論的立地型である定形分布、集塊分布のいずれであるかを判定するものではない。更に、ランダム分布についての議論は、現実にあたえられた分布が何らかの確率法則によってはじきだされたものであるという経験的・理論的に十分な根拠がある場合についてのみ有効であって、立地型を規定する体系が確率的でないと考えられる場合、この様な方法によってランダム性

表 5

| | | 隣接点 | | |
|---|---|---|---|---|
| ランダムに選択された基点 | $I_0$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$……$I_i$…… |
| | 1 | | $[I_0 \rightleftarrows I_i]$ のとき | |
| | 2 | | 1; でないとき | |
| | ⋮ | | は 0 | |
| | $n$ | | | |
| N個の標本による観察比 | | $\frac{\sum[I_0 \rightleftarrows I_i]}{N}$ | | ………… |
| ランダム分布に於る理論値 | | 0.6215 | 0.3863 | ………… |

を検討することは無意味だと言ってよかろう。特に、われわれの扱う人口、工場、学校その他の諸施設、都市等の社会的現象の空間的分布についてランダム分布を想定することは必ずしも有効ではない。確率的な模型よりも、決定的な模型を想定する必要があるわけであり、この意味で次に決定的模型の導出する定形分布について、その特性を述べることにする。

## 定形分布

前節まで純粋な確率体系を想定して、これによって導出される立地型について考察してきたが、その主要な特徴は、そこに於ける立地型がいわゆる確率過程によって導出され、その結果としてランダム分布を構成することであった。これに対して、純粋な決定的体系を想定する場合、初期条件の決定によって立地型は一意的に確定されることになるが、その様な決定的体系としてはワルラス流の一般均衡体系を考えるのが妥当であろう。即ち、いま単一種の立地単位$n$個を考え、これらがあたえられた立地平面の中で位置的変数としてのみ動くと考えよう。各単位の立地平面に於ける位置を$\bar{x}_i$であらわすならば、われわれの体系は、

$$f_i(\bar{x}_1\cdots\cdots\bar{x}_n;\ \alpha_1\cdots\cdots\alpha_m)=0\quad(i=1\cdots\cdots n)$$

として示すことができるであろう。$\alpha$はパラメーターであり、各立地単位の位置は初期条件をあたえることにより一意的に決定される筈である。

現在、理論的な立地型である定形分布を規定する立地模型として、広範囲に認められている中心地理論、とりわけその経済学的な基礎を構成するレッシュの市場圏モデルの基本的骨組はいうまでもなくワルラス流の一般均衡体系であり、その限りで、これは経済的諸前提のもとに於ける立地型に関する決定模型として代表的存在である。

レッシュはその議論を展開する基本的前提として、

㈠ 交通手段資源の一様分布
㈡ 同一の需要曲線をもつ消費者の一様分布
㈢ 技術と生産機会の一様分布
㈣ 経済外的要因の排除

をもついわゆる同質平原を想定したが、結局その立地模型は単一の立地単位を考察する場合次の如く示すことができる。

㈠ 変数（既知）

$d=f(\pi)$ 財に対する個人需要

$\pi_i=\phi(D_i)$ 財の工場価格

$k_i=\kappa(D_i)$ 財の平均生産費用

$S_i=D_i(\pi_i-K_i)$ 利潤

立地点$i$に於ける

$s$ 消費者の単位面積当り密度

$r$ 運賃率

G 総市場圏面積

㈡ 変数（未知）

$\pi_i$ 立地点$i$に於ける財の工場価格

$G_i$ 立地点$i$に於ける市場圏





図 1

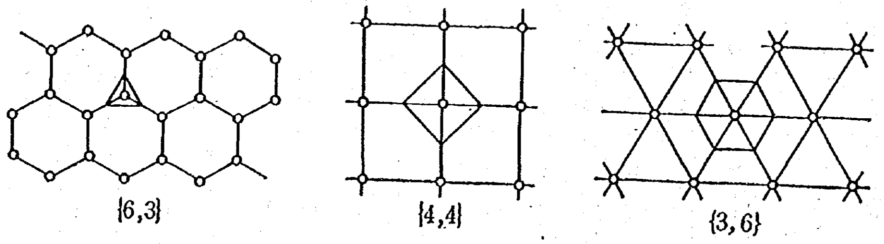
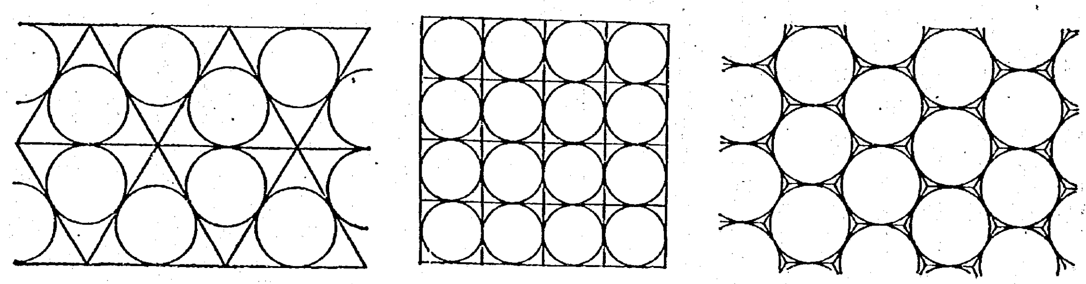



図 2



I 立地点数

$x_i\ y_i$ 立地点の位置（座標）

$\alpha_i,\ \beta_i,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_i$ 市場圏の境界に関する制約式

㈢ 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=0;\quad \frac{\partial S}{\partial y_i}=0$$

$$G_1+G_2+\cdots\cdots G_i=G$$

$$\phi(D_i)=\kappa(D_i)$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial G_i}=\frac{\partial K_i}{\partial G_i}$$

$$\alpha_i=\pi_i+r_i[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pi_{i-1}+r_{i-1}[(x-x_{i-1})^2+(y-y_{i-1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

レッシュはこの模型が方程式数と未知数の個数が一致するから求める変数について一意的な解を求めることができると結論している[15]が、ここでは一応この結論を認めることにして、この様にして規定される市場圏の配置について、その図形的特性を述べてみたい。

一般に理論的な立地型としての定形分布を十分に考察するためには二次元に於ける結晶学の諸法則に関する知識が必要である。これは幾何学的な用語を用いるならば、われわれの興味をひく定形分布が二次元の無限対称変換群であるからに他ならない。立地型の分析に於ては、基本的には平面に於ける個体の分布、いいかえれば立地点の分布が主要な考察の対象となるが、これは同時に、平面を間隙なくしかも重複することなくおおう多角形の配置（タイル張り）を考え、各多角形の頂点の分布を考察することに他ならないのである。定形分布はこのうち合同な正多角形で平面をすき間なく埋めつくし

た場合に他ならない。いま正$p$角形を各頂点のまわりに$q$個配置したタイル張りをシュレーフリの記号〔$p$, $q$〕であらわす。図1にはその三例〔6, 3〕、〔4, 4〕、〔3, 6〕をあげたが、図中の太線の多角形は頂点に集まる$q$本の辺の中点を結んでできる頂点図形で正$q$角形である。タイル張りを構成する各多角形と頂点図形が正多角形となる場合、このタイル張りは一般に正則と呼ばれるが、この限りで、定形分布は正則のタイル張りの各頂点を立地点として構成される立地型と考えることが出来る。一般に〔$p$, $q$〕と〔$q$, $p$〕は双対図形であるが、図中の〔6, 3〕と〔3, 6〕は双対である。$p$、$q$の可能な値は、

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\pi=\frac{2\pi}{q}$$

の制約条件をみたすものとしてあたえられる。即ち、

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2},\quad (p-2)(q-2)=4$$

4の因数分解は三組しかあり得ないから、前述の三種のタイル張りが生ずるわけである。レッシュはその市場圏の空間的配列に関する論議に於てこの三つのパターンを需要量との関係に於て検討しているが、レッシュの市場圏は立地平面上に於ては一定の半径をもつ円として基本的に定義されるから、純粋に幾何学的な問題として考えるならば、それは二次元に於ける等円のパッキングの問題に他ならない。図2は前掲の正則タイル張りを基本にして各正多角形の内接円の配列を示したものであるが、〔6, 3〕の場合が他に比して「経済的」であることは直観的にも明らかであろう。一般に正則なタイル張り〔$p$, $q$〕を構成する正$p$角形の面積とその内接円の面積との比を平面に於ける円のパッキングの密度$d$とすれば、$d\leqq 1$、パッキングが稠密になればなる程$d$は1に近づくことは明らかであろう。いま正$p$角形の辺長を$2l$とすれば、この内接円の半径は$r=l\cot\pi/p$で正$p$角形の面積は$plr$であるから、

$$d=\frac{\pi r^2}{plr}=\frac{\pi}{p}\cdot\frac{r}{l}=\frac{\pi}{p}\cot\frac{\pi}{p}=\frac{\pi}{p}\Big/\tan\frac{\pi}{p}$$

となる。この値は$p$の増加函数で、$p\to+\infty$で1に収束する。しかし、ここでの正$p$角形は正則タイル張りを構成するから$r$のとり得る値は前述の如く3, 4, 6であり、したがって$p$の「最良の」値は6であり、即ち最も密度の高い正則なパッキングは〔6, 3〕の正多角形の内接円であることになる。この場合の密度は、

$$\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\sqrt{3}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=0.9069$$

である。[16]

この様な定形分布、とりわけ六角形分布についてはランダム分布についてと同様に方形区劃法ではいうまでもなく、隣接単位法（厳密にいえば修正法）によっても夫々単位域当り平均立地度数と隣接点間距離を導出することが出来る。たとえば森下は最近どの様な空間分布の個体群に対してでも適用し得る間隔法として新たな密度推定法を提案したが、その方法によって、人為的な正則六角形分布について計測を行った結果、理論値（平均立地度数）0.22672に対し、推定値0.20666を得たし、[17]又、Dacyはそのいわゆるregion methodによって矢張人為的な正則六角形分布について各点からその六つの隣接点までの距離を$1.0750^{-d}$と規定している。[18]

いうまでもなく現実の立地型が定形分布をとるか否かの識別は、この理論型との比較に於てなされるわけである。

しかしながら、ここで指摘しておくべきことは、この定形分布はあくまでも理論型であって、現実に観察される多くの立地型が完全な意味で定形分布をとることは予想し難いことであろう。しかし同時に、前述のレッシュの理論ないしそれに一つの基礎を置く中心地理論はわれわれにある種の地理的分布について厳格な決定的モデルのあることを示している。いうまでもなく、この問題に関する一つの解法は、通常の計量経済学でとられる様に、前述の決定的体系にランダムな攪乱因子を導入することであろう。即ち、相互に独立である$n$個の変数を含む$n$個の連立方程式体系を、

$$f_i(x_1\cdots\cdots x_n;\ \alpha_1\cdots\cdots\alpha_m)=u_i\quad i=1\cdots\cdots n$$

とすることによってこの問題を処理することができるであろう。

いま、この空間的分布に関するランダムな攪乱ないし誤差を定義するために、定形分布を決定的な体系によって規定される立地型とランダムな攪乱を考慮した立地型の二つに区分し、夫々の分布を構成する$n$個の点の配列集合を夫々S、Pとしよう。各点の位置をSについて、$(x_i y_i)$、Pについて$(u_i v_i)$とすれば、Pの任意の一点IはSのそれに対応する一点と期待値$E(x)$, $E(y)$をともなった確率変数$x$と$y$の函数として規定することができる。

$$(u_i v_i)=f[(x_i y_i);\ x,\ y]\quad i=1,\ 2\cdots\cdots n$$

ただし$[E(x)]^2+[E(y)]^2=R^2$であり、Rは平均確率誤差距離である。この誤差はいうまでもなく任意の値をとり得る確率変数である。即ち、もしRが立地平面の面積と立地点間の平均距離と比較して非常に大であれば立地型は拡散し定形分布は失われ、いわゆる点分布に於ける「分角維持」の特性を認める限りランダム分布に近似するであろうし、又、Rの値が相対的に小であれば、立地型のとり得る空間的範囲は局限され、かつ相対的にそのパターンは決定的定形分布に近づくであろう。後者の場合、即ちRが十分に小さい相対的値をとる限り、われわれはPないし現実に観察した立地型が理論的立地型に近似していることを視覚的に識別し得るのである。この意味で、われわれの基本的な作業は種々な理論的定形分布について、いくつかのRの値をとり確率誤差を算定し、それに基いて確率誤差（を加味した）分布Pを構成し、これらPの母数を規定することによって現実に観察される立地型と決定的立地型とを比較検討する媒介とすることである。

いま、定形分布として代表的な正則六角形分布について考察するならば前述の議論によって、

$$P=f(x,\ y|S)$$

であり、われわれの作業は、

$$R^2=[E(x)]^2+[E(y)]^2$$

であるRのとり得るいくつかの値についてPの特性を検討することに他ならない。

このための準備として、確率誤差をつくりだす前提として確率誤差の濃度 Intensity に関する指標をきめておく必要があろう。これ

は各Pに於ける密度と測定単位の相違を標準化するためであるが、この標準化指標は次の如く定義される。

$$D=\frac{R}{1.0750^{-d_0}}$$

いうまでもなく、これは密度$d_0$をもつ正則六角形分布の各隣接点間の距離と平均誤差距離の比率であって、これを前掲のRに代入することによって函数関係がSの密度、又SとRに関する測定単位に依存して変化することを回避するためである。確率誤差指標Dをもって、Sから得られたPをP〔D〕とする。たとえば、P〔0.5〕は各点が決定的立地点からはずれた距離が平均して正則六角形分布に於ける隣接点間の距離の半分であるような定形誤差分布をいう。

これだけの準備のもとに、Pに含まれる任意の立地点$(u_i\ v_i)$のSのそれに対応する点$(x_i\ y_i)$からの偏差は、$(x_i\ y_i)$からの方向と距離によって規定されるから、これらを夫々$\omega_i$ $\rho_i$とすれば、密度$d_0$を有し$n$個の立地点より構成される正六角形分布に関する確率誤差の導出は以下の手続きによってなされるだろう。

㈠ 立地点Iについて$\omega_i$ $(0<\omega_i<360)$をランダムに選ぶ、$\omega_i$を自然数とすれば乱数表をもちいてなされる。

㈡ 立地点Iについてガウス偏差$g_i$をとり、$\rho_i=|g_i|D$とする。

㈢ $(u_i\ v_i)$を角度$\omega_i$と距離$\rho_i$であたえられる位置に配置する。

表6はデーシーがこの様な手順によって五個のDについて立地誤差型を構成したものである[19]が、容易にみられるように、P〔.05〕からDの値の大きくなるにしたがって、正六角形分布のランダム分布への移行がみられる。P〔.8〕とP〔1〕について一つの例外を除いては、ランダム分布との識別は統計的には不可能である。

表 6 正形分布に関する隣接点間距離

| 区割 | 定形分布 | P〔D〕 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.0 | 0.05 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | ランダム分布 |
| 1 | 1.0750 | 1.0142 | 0.8143 | 0.6056 | 0.5240 | 0.5190 | 0.5035 | 0.5000 |
| 2 | 1.0750 | 1.0373 | 0.9220 | 0.8941 | 0.8199 | 0.7686 | 0.7708 | 0.7863 |
| 3 | 1.0750 | 1.0603 | 1.0635 | 1.0732 | 1.0520 | 0.9797 | 1.0620 | 1.0403 |
| 4 | 1.0750 | 1.0834 | 1.1853 | 1.2594 | 1.2906 | 1.2875 | 1.3067 | 1.3034 |
| 5 | 1.0750 | 1.1064 | 1.3497 | 1.4779 | 1.5453 | 1.6044 | 1.5345 | 1.6175 |
| 6 | 1.0750 | 1.1295 | 1.7656 | 1.8238 | 1.9025 | 2.1075 | 1.9070 | 2.1010 |

Dacy and Tung; The Identification of Randomness in point pattern, Journal of Regional Science, 4—1, 1962.

この表は観察された立地型が理論型として正六角形分布を有していると想定される場合、その立地型の識別、即ち観察型が特定のDをもつP〔D〕とどの程度まで近似しているか、仮説検定のために用いられるわけであるが、Dacy は Brush によってなされたウィスコンシン州南西部に於ける中心地の配置に関する調査資料にこれを応用し、この配置が理論的な正六角形分布からへだたっており、立地型としてはP〔.4〕に対応するものと結論している。

以上、理論的立地型としてランダム分布、定形分布について述べてきたが、もう一つの理論型集塊分布については別の機会に述べることとしたい。

参考文献


(1) Chorafas, Dimitris N., Systems and Simulation, 1965.
(2) Dacy, Michael F. & Tung Tze-hsiung, The Identification of Randomness in point pattern; Jour. of Regional Science 4—1, 1962, 83—96.
(3) W・フェラー、河田亀夫監訳、確率論とその応用 上、一九五七。
(4) W・フェラー、前掲書、二一二頁。
(5) 沼田真編、植物生態学 生態学大系第一巻、一九五一。
(6) R・A・フィシャー、渋谷、竹内訳、統計的方法と科学的推論、一九六二。
(7) Fisher R. A., Significance of deviation from expectation in a Poisson series, Biometrics, 6, 1962: 17—24.
(8) Clapham, A. R., Overdispersion in grassland communities and the use of statistical methods in plant ecology. Jour. Ecology 24, 1936: 232—251.
(9) Evans, F. C., The Influence of size of quadrat on the distributional pattern of plant populations, Contr. Lab. Vert. Biol. No. 54, 1952.
(10) Millar R. L. & Kahn J. S., Statistical Analysis in the Geological Sciences, 1962.
(11) 森下正明 どのような空間分布の個体群に対しても適用できる間隔法利用密度確定法 生理生態七—二、一九五七、一三四—一四四。
Dacy, M. F., A Note on the Derivation of Nearest Distances, Jour. Regional Science, 2, 1960, 81—87.
(12) 森下前掲論文。
Dacy op. cit.
(13) Clark, P. J. & Evans F. C., Distance to nearest neighbor as a measure of spatial relationships in populations, Ecology 35, 1954, 445—453 —— & —— On some aspects of spatial pattern in biological populations. Science, 121, 1955, 397—398.
(14) Clark, P. J. Grouping in spatial distributions, Science 123, 1956 373—374.
(15) Lösch, A., The Economics of Location, 1954.
Isard W., Location and Space-Economy, 1956.
江沢譲爾 産業立地論と地域分析、一九六二。
(16) Coxeter, H. S. M., Introduction to Geometry 1961.
(17) 森下 前掲論文。
(18) Dacy, op. cit.
(19) Dacy & Tung, op. cit.