Title	中立的技術進歩と経済成長 : C・ E・ S生産函数を中心として
Sub Title	Economic growth and technical progress. a summary
Author	高橋, 房二
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1965
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.58, No.8 (1965. 8) ,p.748(56)- 775(83)
JaLC DOI	10.14991/001.19650801-0056
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19650801-0056

中立的技術進歩と経済成長

──C・E・S・生産函数を中心として──

高橋房二

I　はしがき

本稿はC・E・S生産函数を中心として、中立的技術進歩のもとにおける均衡成長の問題を考察することを目的とするものである。ここで、C・E・S生産函数をとりあげるのは、周知のようにA・C・M・S（一、二二七―八頁）によって定式化されたC・E・S生産函数があらゆる代替弾力性値をもつ生産函数を包括的に表現したものであり、その意味において個別的立場は勿論、より一般的な立場で問題を考察することが可能であるからである。その個別的ケースとして、例えば代替弾力性が1であるダグラス生産函数の場合については、既にソロー的意味における中立的技術進歩を導入した体系に関して、黄金時代均衡の存在、及び均衡の安定条件が充たされることはスワン等（二、三三四―四三頁）の新古典派的立場による分析で明かである。(1) また、C・E・S生産函数それ自体を適用した場合に関しても、ピッチフォード（三、四九一―五〇〇頁）によってスワンの分析手法にしたがった均衡成長に関する理論的展開がなされている。その場合、ピッチフォードはC・E・S生産函数を代替弾力性 σ が $1<\sigma<\infty$ と $0<\sigma<1$ の二つの集合に分割し、それぞれの場合について黄金時代均衡の存在条件、及び均衡の安定条件を検討した。ここで、いまピッチフォードによる finding の要約を述べれば次の通りである。スワン、ソロー（四、六九―八二頁）、及びミード（五、八―三八頁）等の新古典派の立場によるダグラス生産函数の適用に対して、$1<\sigma<\infty$ と $0<\sigma<1$ の生産函数の適用においては体系のパラメータによって規定される黄金時代均衡の存在条件が介在し体系がその条件を充足する限り黄金時代均衡のもとで均衡成長が可能であり、またその存在条件が同時に均衡の安定条件となる。またそこで、もし体系がその条件を充たさない場合はコーナー型均衡のもとで体系は成長することが可能である。このようにして、完全代替生産函数にとどまらず、有限的に代替可能な生産函数においても一定条件のもとで安定的均衡成長経路が存在することが論証された。他方、カルドア（六、五九二―六一八頁）は企業者の利潤動機にもとずく投資函数と技術進歩函数を中心として黄金時代均衡の求心力のメカニズムを分析した。(2) しかし、カルドア成長モデルは福岡教授（七、九頁）等の指摘におけるように陰伏的に新古典モデルと同様な代替可能な生産函数が前提とされていることは明らかである。以上のように、黄金時代均衡への体系の収斂運動を分析する場合、そこで陽表的にせよ陰伏的にせよ有限的に代替可能な生産函数が前提とされねばならない。前述のピッチフォードの論文は分析視野の拡充、明示的な条件規定という意味で重要な貢献となるものである。しかし、そこでは技術進歩が捨象されている。本稿はこれらの諸貢献を基礎として、C・E・S生産函数にヒックス的意味における中立的技術進歩を導入し、それぞれ $-1<\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ の場合に関して、均衡成長の可能・不能・及び安定条件について第Ⅳ節で短期的考察を行ない、そしてまた第Ⅴ節において、それぞれに関する長期的考察を試みることにしたい。

II　諸前提

ここでまず、モデルに関する基本的前提について触れておこう。

〔仮 定 1〕

産出高Yは資本Kと労働Lの両要素の技術的結合によって生産され、そこで資本と労働はいずれも同質的であるものとする。

〔仮 定 2〕

上の生産の技術的関係は集計的生産函数

$$(1)\quad Y_t = F(K_t,\ L_t,\ t)$$

によって表わされる。そこで、(1)は一次同次性（規模に関する収益不変性）をもち、また一般的であり具体的な技術函数としてC・E・S生産函数（Stanford 生産函数）によって把捉されるものとする。

〔仮 定 3〕

要素の限界生産力は逓減的 $F_K'' < 0$ で、$F_L'' < 0$ であるものとする。よって、生産物等量曲線はある有限な曲率をもつ。

〔仮 定 4〕

技術進歩のパターンはヒックス的意味（或はソロー的意味）で中立的、すなわち資本労働比率一定の場合、要素の限界生産力は同率で上昇し（要素の限界代替率は不変に維持され）、生産函数はその技術的関係を不変に維持しつつ時間軸に関して shift up する。そこで、(1)は $Y_t = G_{(t)} \cdot f(K_t,\ L_t)$ であり、$G_{(t)}$ は g の率で指数的に上昇するものとする。

〔仮 定 5〕

技術進歩のタイプは disembodied type であり、事後的代替 ex post substitutability がゆるされるものとする。

〔仮 定 6〕

貯蓄率 s は時間を通じて不変であるものとする。

〔仮 定 7〕

労働供給は外生的に与えられ、n の率で指数的に成長するものとする。

〔仮 定 8〕

要素市場は競争的均衡におかれている。

「仮定2」、「仮定4」、及び「仮定5」、より中立的技術進歩を導入した場合、生産函数は、

$$(2)\quad Y_t = \gamma e^{gt}\left[\delta K_t^{-\rho} + (1-\delta)L_t^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

のように定式化される。ここで、「仮定3」より要素の限界生産力は逓減的であるので、代替パラメーター ρ は $-1 < \rho < \infty$ であり、そこで代替弾力性 σ は $0 < \sigma < \infty$ であって、両要素は有限的に代替可能であり、生産物等量曲線は正常な曲率をもつことになる。つぎに(2)より

$$(3)\quad \frac{\dot{f}_K'}{f_K'} = \frac{\dot{f}_L'}{f_L'} = g \qquad 及び \qquad (4)\quad \frac{\partial K}{\partial L} = \frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}$$

が導かれる。(3)（・は時間に関する微分を示す）。ここで(3)は資本労働比率を一定とした場合に成立する関係であるが、両要素の限界生産力の増加率が均等であり、それらが技術進歩率 g に等しい関係を示すものである。また、(4)より資本労働比率が一定であるとすれば、要素の限界代替率は不変に維持されることになる。以上の関係より(2)はヒックス（八、一二一・一二二頁）、及びソロー（九、三一六頁）の新古典派的な技術進歩に関する中立性公準を充足することは自ら明らかである。そしてこのような新古典派による概念規定においては、技術進歩が中立的であることによって生産物等量曲線はその曲率を変化することなく時間軸に関して shift up し、また資本労働比率が一定ならば、（$\rho=0$ の場合はこの条件は必要でない）、上述のC・E・S生産函数において要素の分配率は不変に維持される。

つぎに、分配パラメーター δ は $0 < \delta < 1$ であると仮定される。

最後に定数 γ はここでは単純化のために1であるとしよう。

したがって、以下において対象とされる生産函数は

$$(2_a)\quad Y_t=e^{gt}\left[\delta K_t^{-\rho}+(1-\delta)L_t^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

であり、生産函数の特性指標 ρ に関して $-1<\rho<0$ の場合と $0<\rho<\infty$ の場合についてそれぞれ成長分析が行われる。

つぎに、「仮定7」より労働供給 L_t は n の率で指数的に成長するものとされるので、

$$(5)\quad \frac{\dot{L}_t}{L_t}=n \quad 或いは \quad (6)\quad L_t=L_0e^{nt}$$

である。

III　モデルにおける基礎的関係

ここでまず、モデルの基本的な性格について予備的考察を行なうことにしよう。均衡成長を問題とするうえにおいて、第一に産出高、及び資本の成長率の基本的関係、ないしその相互関係が明らかにされねばならない。そこで、中立的技術進歩を導入したC・E・S生産函数(2_a)に関して、その両辺を対数にとり、時間に関して微分すれば、(8)が導かれる。

$$(7)\quad \log Y_t=gt-\frac{1}{\rho}\log\left[\delta K_t^{-\rho}+(1-\delta)L_t^{-\rho}\right]$$

$$(8)\quad \frac{\dot{Y}_t}{Y_t}=g-\frac{1}{\rho}\,\frac{-\rho\,\delta K_t^{-\rho-1}\dot{K}_t-\rho(1-\delta)L_t^{-\rho-1}\dot{L}_t}{\delta K_t^{-\rho}+(1-\delta)L_t^{-\rho}}$$

$$=g+\frac{1}{1+\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho}}\frac{\dot{K}_t}{K_t}$$

$$+\frac{1}{1+\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\rho}}\frac{\dot{L}_t}{L_t}$$

ここで、$\dfrac{1}{1+\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho}}$ は以下の展開によって明らかなように資本の分配率に一致する。

(4)より

$$(4_a)\quad \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho}=\frac{\delta}{1-\delta}\,\frac{\partial K_t}{\partial L_t}\Big/\frac{K_t}{L_t}$$

よって、

$$(9)\quad \frac{1}{1+\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho}}=\frac{1}{1+\frac{\partial K_t}{\partial L_t}\Big/\frac{K_t}{L_t}}$$

そこで、$\dfrac{\partial K_t}{\partial L_t}=\dfrac{\partial Y_t}{\partial L_t}\Big/\dfrac{\partial Y_t}{\partial K_t}$ であるので

$$(9_a)\quad =\frac{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}K_t}{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}K_t+\frac{\partial Y_t}{\partial L_t}L_t}=\frac{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}K_t}{Y_t}$$

したがって、前述の一次同次性と要素市場の競争均衡のもとにおいて資本の分配率を示すことになる。これと全く同様にして、$\dfrac{1}{1+\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\rho}}$ は上の条件のもとで労働の分配率 $\dfrac{\frac{\partial Y_t}{\partial L_t}L_t}{Y_t}$ を示すことになる。また、$\dfrac{\partial Y_t}{\partial K_t}=\dfrac{\partial Y_t}{\partial t}\Big/\dfrac{\partial K_t}{\partial t}$，$\dfrac{\partial Y_t}{\partial L_t}=\dfrac{\partial Y_t}{\partial t}\Big/\dfrac{\partial L_t}{\partial t}$ を考慮すれば、$\dfrac{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}K_t}{Y_t}$、及び $\dfrac{\frac{\partial Y_t}{\partial L_t}L_t}{Y_t}$ はそれぞれ資本の偏生産弾力性 $\left(\dfrac{d\log Y_t}{d\log K_t}\right)$、及び労働の偏生産弾力性 $\left(\dfrac{d\log Y_t}{d\log L_t}\right)$ を示すことになる。このように、$\dfrac{1}{1+\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho}}\left(\dfrac{1}{1+\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\rho}}\right)$ は資本の分配率（労働の分配率）を

示すものであり、択一的に資本の偏生産弾力性（労働の偏生産弾力性）を示すものとして理解されるが、いまそれぞれを η_{K_t}、及び η_{L_t} で示すことにしよう。

よって、(8)は

$$(8_a)\quad \frac{\dot{Y}}{Y}=g+\eta_K\frac{\dot{K}}{K}+\eta_L\frac{\dot{L}}{L}$$

ここで、$\eta_L=1-\eta_K$ であり、また「仮定7」より $\frac{\dot{L}}{L}=n$ であるので (8_a) は

$$(8_b)\quad \frac{\dot{Y}}{Y}=g+\eta_K\frac{\dot{K}}{K}+n(1-\eta_K)$$

である。ソロー（九、三一三頁）は中立的技術進歩と一次同次性を仮定して、生産函数 $Y_t=A_{(t)}\cdot F(K_t, L_t)$ より

$$(10)\quad \left(\frac{\dot{Y}}{L}\right)\Big/\left(\frac{Y}{L}\right)=\frac{\dot{A}}{A}+W_k\left(\frac{\dot{K}}{L}\right)\Big/\left(\frac{K}{L}\right)$$ （ここで W_k は資本の分配率）

を導出するが、(8_b) はこれと全く consistent であることは云うまでもない。

(8_b) において η_K は、もし $\rho=0$（ダグラス生産函数）ならば $\eta_K=\delta$ であり constant であるが、$-1<\rho<0$、及び $0<\rho<\infty$ の場合は可変的である。よって、この η_K の変動の態様を把捉することがこれらの場合の産出高成長率の運動を理解するうえに不可欠となるのである。そこで、この η_K の変域、及び η_K の変動の説明要因について検討しよう。

すでに述べられた関係により

$$(11)\quad \eta_{K_t}=\frac{1}{1+\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho}}$$

であるので、$0<\rho<\infty$ の場合においては K/L を 0 に近づけると $\lim_{\frac{K}{L}\to 0}\eta_K=1$ であり、また K/L を ∞ に近づけるならば $\lim_{\frac{K}{L}\to\infty}\eta_K=0$ である。全く同様にして、

$-1<\rho<0$ の場合は $\lim_{\frac{K}{L}\to 0}\eta_K=0$ であり、また $\lim_{\frac{K}{L}\to\infty}\eta_K=1$ である。したがって、η_K の動きは $-1<\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ との場合全く逆となるが、η_K の変域は $0\leqq\eta_K\leqq 1$ であることは自ら明らかであり、η_L に関しても同様である。

上述のように、η_K は $-1<\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ の場合、資本労働比率によって一意的に規定されるが、つぎに他の関連要因について触れてみよう。

$$(12)\quad \eta_K=\frac{\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}K_t}{Y_t}$$ であるので、

(2_a) より導かれる。

$$(13)\quad \frac{Y_t}{K_t}=e^{gt}\left[\delta+(1-\delta)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$(14)\quad \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}=\delta e^{gt}\left[\delta+(1-\delta)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}$$

(12) に代入し、変形すれば

$$(15)\quad \eta_{K_t}=\delta\left(\frac{Y_t}{K_t}\right)^{\rho}e^{-\rho gt}$$

が得られる。

したがって、η_K は資本の生産性と技術進歩の函数として示される。また一方、

$$(16)\quad \frac{S_t}{Y_t}=\frac{I_t}{Y_t}$$

$$(16_a)\quad =\frac{K_t}{Y_t}\cdot\frac{\dot{K}_t}{K_t}$$

であり、「仮定6」より $\frac{S_t}{Y_t}=s$ であるので

(17) $$\frac{Y_t}{K_t}=\frac{1}{s}\frac{\dot{K}_t}{K_t}$$

或は (17$_a$) $$\frac{\dot{K}_t}{K_t}=s\frac{Y_t}{K_t}$$

である。ここで、$\dot{K}/K$ は Y/K と比例関係におかれる。

よって、(15) は択一的に

(18) $$\eta_{Kt}=\delta\left(\frac{1}{s}\frac{\dot{K}_t}{K_t}\right)^{\rho}e^{-\rho gt}$$

したがって、η_K は資本の成長率と技術進歩の函数としても示される。

つぎに、η_K の相対的変動率に関して(11)の関係より導くならば次の通りとなる。

(11)の両辺を対数にとり、時間に関して微分すれば

(19) $$\log\eta_{Kt}=-\log\left\{1+\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\rho}\right\}$$

(20) $$\frac{\dot{\eta}_{Kt}}{\eta_{Kt}}=-\rho\frac{1}{1+\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\rho}}\frac{(\dot{K_t/L_t})}{(K_t/L_t)}$$

ここで、$\frac{1}{1+\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{-\rho}}=\eta_{Lt}$ であるので

(20$_a$) $$\frac{\dot{\eta}_{Kt}}{\eta_{Kt}}=-\rho\eta_{Lt}\frac{(\dot{K_t/L_t})}{(K_t/L_t)}$$

η_{Lt} の変域は既に述べられたが、それが0でないならば（$-1<\rho<0$ の場合においては資本労働比率が∞でなく、そしてまた $0<\rho<\infty$ の場合においてそれが0でないことを意味する）η_K は $-1<\rho<0$ の場合、資本労働比率の増加（減少）によって増加（減少）し、そして $0<\rho<\infty$ の場合、その増加（減少）によって減少（増加）する。

ところで、(17$_a$)より資本の成長率は資本の生産性の函数である。そしてまた、η_K も資本の生産性の函数であるので、(8$_b$)で示される産出高成長率は同様に資本の生産性の函数となる。

(8$_b$) に (17$_a$) と (15) を代入すれば、

(21) $$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t}=g+\delta s\left(\frac{Y_t}{K_t}\right)^{\rho+1}e^{-\rho gt}+n\left\{1-\delta\left(\frac{Y_t}{K_t}\right)^{\rho}e^{-\rho gt}\right\}$$

このように、資本の成長率も産出高成長率もともに資本の生産性という共通の説明変数をもつことになるので、この資本の生産性を key variable として両者の関係を検討することが可能である。ところで、この資本の生産性は $-1<\rho<0$ の場合、(13)より資本労働比率を∞に近づけると

(22) $$\lim_{\frac{K_t}{L_t}\to\infty}\frac{Y_t}{K_t}=\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}$$

となり、これが t 時における資本の生産性の下限となる。また、$0<\rho<\infty$ の場合においては、資本労働比率を0に近づけると

(23) $$\lim_{\frac{K_t}{L_t}\to 0}\frac{Y_t}{K_t}=\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}$$

となり、これが t 時の資本の生産性の上限となる。このように、$\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}$ が $-1<\rho<0$（$0<\rho<\infty$）における $\mathrm{Sup.}\frac{Y_t}{K_t}\left(\mathrm{Inf.}\frac{Y_t}{K_t}\right)$ となる。さて、均衡成長

(24) $$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{K}}{K}$$

を可能ならしめる資本の生産性を $\frac{Y^{\circ}}{K}$（この決定は後ほど示される）とすれば、この $\frac{Y^{\circ}}{K}$ が $-1<\rho<0$ の場合はその下限値、$0<\rho<8$ の場合はその上限値の許容する範囲内に入るかどうかによって均衡成長の可能・不能が判別されることになる。これらの下限値・上限値は技術進歩の存在しない場合は(22)と(23)において $g=0$ であるので constant であり、時間と独立である。しかしながら、中立的技術進歩が行われる場合は t が∞となれば $\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}$ は∞となる。そこで、$0<\rho<8$ の場合、in the long run において $\frac{Y}{K}$ の上限が∞であることは in the short run におけるような $\frac{Y}{K}$ の constraint が事実上存在しないことになる。また、$0<\rho<8$ の場合、下限値が∞になることによって、その限り体系は存在不能となることになる。このように、それぞれ $\frac{Y}{K}$ の下限値・上限値が時間を通じて増大し、それにともなって体系の存在領域の拡張或は縮小をもたらし、またそれが均衡成長の可能・不能に影響を及ぼすことは中立的技術進歩における特長の一である。

また、技術進歩の存在しない場合、均衡成長率は constant (n) であるが、中立的技術進歩が存在する場合、それは(8b)より

$$(24_a)\quad \frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{K}}{K}=n+\frac{g}{1-\eta_K}\text{。}$$

（η_K については後述）で与えられ、そこで第Ⅳ節で述べられるように、η_K は時間を通じて変化するので、均衡成長率もそれに伴って変化する。これが、この種の中立的技術進歩における特質の二である。

Ⅳ　短期における体系の運動

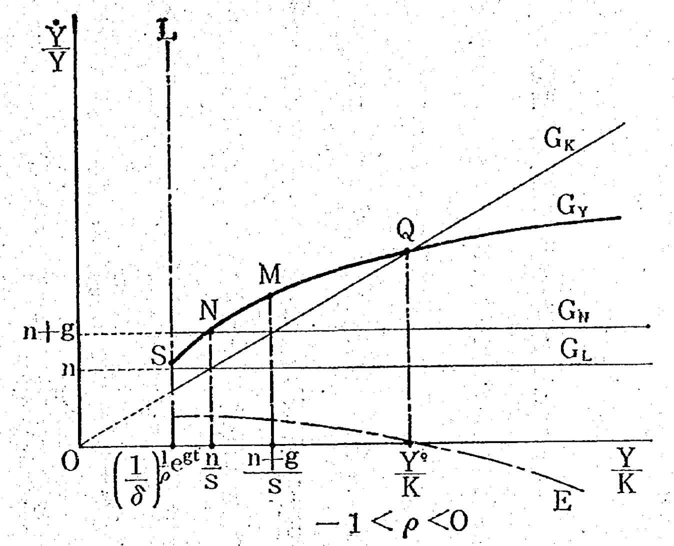
前節における基礎的考察をもとにして in the short run に関する均衡成長の可能・不能、及び安定条件の存在・不存在について $-1<\rho<0$ と $0<\rho<8$ の場合に分けて考察しよう。ピッチフォードは技術進歩が存在しない場合において、$\delta\left(\frac{s}{n}\right)^{\rho}<1$ ならば、黄金時代均衡 $(G_w=G_n)$ が存在し、そしてそこで産出高成長率、資本成長率、および労働の成長率は同率 (n) となり、またその場合における黄金時代均衡の存在条件が同時にその安定条件となる関係を分析した。そして、$\delta\left(\frac{s}{n}\right)^{\rho}>1$ ならば、黄金時代は存在せず、いわゆるコーナー型均衡が存在する関係を見出した。

ところで、中立的技術進歩が存在する場合において体系はいかなる関係におかれるであろうか。そこで、まず $-1<\rho<0$ の場合について、均衡成長に関する可能条件、および均衡点の性格とそれに対する体系の運動のパターンに関して考察しよう。そこで当然問題となるのは産出高成長率と資本の成長率との間の相互関係である。前述のように産出高成長率と資本の成長率のいずれも $\frac{Y}{K}$ の函数である。そこで、資本の成長率と $\frac{Y}{K}$ との関係を示す曲線——以下これを G_K 曲線とよぶ——は(17_a)よりsの勾配をもつ直線である。一方、産出高成長率と $\frac{Y}{K}$ との関係を示す曲線——以下において G_Y 曲線とよぶ——は上方に関して凸の曲線となる。というのは、(21)を $\frac{Y}{K}$ について偏微分し、第二次偏微係数を導くならば、

$$(25)\quad \frac{\partial^2 G_Y}{\partial\left(\frac{Y}{K}\right)^2}=\rho\delta\left(\frac{Y}{K}\right)^{\rho-1}e^{-\rho gt}\left\{s(\rho+1)-n(\rho-1)\left(\frac{Y}{K}\right)^{-1}\right\}\quad\left(\text{ここで、}G_Y=\frac{\dot{Y}}{Y}\right)$$

となり、(25)において $-1<\rho<0$ の場合、$\{\ \}$ 内の第一項は正、第二項は負であるので $\{\ \}$ は正であるが、$\rho\delta\left(\frac{Y}{K}\right)^{\rho-1}e^{-\rho gt}$ は負であるので、$\frac{\partial^2 G_Y}{\partial\left(\frac{Y}{K}\right)^2}<0$ となるからである。

第　1　図



ここで、これらの関係を図解的に示そう。第一図は t 時点における G_Y 曲線と G_K 曲線、それに労働の成長率を示す G_L 曲線とそれと技術進歩率の和を示す G_N 曲線を同時に書きこんだものである。そこでは、$\frac{Y}{K}$ が横軸で測られ、G_Y、G_K、G_L、及び G_N は縦軸で測られる。第一図において、$\frac{Y}{K}$ の下限点が t 時点で0と $\frac{n+g}{s}$ の間に位置するものとして描かれている。また、ここで G_Y 曲線と G_K 曲線に関しては前述の通りであるが、G_L 曲線は $\frac{Y}{K}$ と独立であるので、n の切片をもつ横軸に平行な半直線として与えられる。そして、G_N 曲線はハロッド（一一、八七頁）の自然成長率に対応するものであり、同

様に Y/K と独立であるので、$n+g$ の切片をもつ横軸に平行な半直線として示される。

つぎに、t 時点における G_Y 曲線に関して、第一図との関連において検討しよう。Y/K が下限点に位置する場合、⒂に $\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}$ を代入することによって、或はそこでは K/L が ∞ であるので⑾の関係によって、η_K は1であることは明らかである。よって、(8_b) より $\frac{\dot{Y}}{Y}=g+\frac{\dot{K}}{K}$ となり、第一図においてこれはS点に対応する。つぎに、Y/K が n/s の点においては $\frac{\dot{K}}{K}=\frac{\dot{L}}{L}=n$ であり、(8_b) は $\frac{\dot{Y}}{Y}=g+n\eta_K+n(1-\eta_K)=g+n$ となる。したがって、G_Y 曲線はN点を通過することになる。Y/K が $\frac{n+g}{s}$ の点では、$\frac{\dot{K}}{K}=g+n$ であり、$G_K=G_N$ であるので、(8_b) は $\frac{\dot{Y}}{Y}=g+(g+n)\eta_K+n(1-\eta_K)=n+g(1+\eta_K)$ (ここで $0<\eta_K<1$) となり、これはM点に対応する。[(4)] また、Q点では $\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{K}}{K}=n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}$ であり、そこで同点において、均衡成長率がえられることになる。最後に、Y/K が ∞ となれば、K/L は0となり、⒂或は⑾の関係より $\eta_K=0$ となる。したがって、(8_b) より $\frac{\dot{Y}}{Y}=g+n$ である。このように、G_Y 曲線はその下限点においては $G_Y=g+G_K$ であるので、G_K 曲線の上方に位置し、そしてまた Y/K が ∞ となれば $G_Y=g+n$ であるので、G_K 曲線の下方に位置する。したがって、G_Y 曲線は G_K 曲線を左方から右方に切ることになる。その交点が前述のQ点に他ならない。そして、このQ点において均衡成長率が成立するが、ここで均衡成長の可能条件を検討しよう。いま、Q点における Y/K を Y°/K と表せば、Y°/K は下限値以上に位置せねばならない。よって、

$$(26)\quad \frac{Y^{\circ}}{K}>\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}\quad 或は\quad (26_a)\quad \frac{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}{s}<\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}$$

(ここで、η_K° はQ点における η_K)

という関係が必要である。そこで、(17)より

$$(27)\quad \frac{Y^{\circ}}{K}=\frac{n+\dfrac{g}{1-\delta\left(\frac{Y^{\circ}}{K}\right)^{\rho}e^{-\rho gt}}}{s}$$

であるので、Y°/K は t が与えられることによって(27)の関係より与えられる。(26)の関係は択一的になる。(15)より、$\delta\left(\frac{Y^{\circ}}{K}\right)^{\rho}e^{-\rho gt}$ は η_K° に他ならないので、これは

$$(28)\quad \delta\left(\frac{Y^{\circ}}{K}\right)^{\rho}e^{-\rho gt}<1$$

$$(28_a)\quad \eta_K^{\circ}<1$$

と表わせよう。そこで、(26_a) で示される均衡成長の可能条件より、$\frac{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}{s}>\frac{n+g}{s}$ であるので、$\frac{Y^{\circ}}{K}$ は $\frac{n+g}{s}$ よりも大であり、それによってQ点はM点の右方に位置することは明らかである。以上の関係によって、均衡成長の可能条件は、(27)より t が与えられことによって決まる $\frac{Y^{\circ}}{K}$ が $\frac{g+n}{s}<\frac{Y^{\circ}}{K}$ となるという関係によって表わすことも出来よう。ところで、均衡点Qはもし生産函数がダグラス函数 $(\rho=0)$ であるならば、η_K は時間を通じて一定であるので、定点であり、長期均衡点となるものである。そしてそこで黄金時代均衡が究極的に達成される。しかしながら、$-1<\rho<0$ においても、また後にとりあげられる $0<\rho<8$ においてもQ点は時間を通じて同一位置にとどまらない。なぜならば、Q点においては第一図で明らかなように、$\frac{(\dot{K/L})}{(K/L)}>0$ であるので、(20_a) より $-1<\rho<0$ の場合 $\frac{\dot{\eta}_K}{\eta_K}>0$ であり、η_K は増加するので均衡成長率は増加するからである。このようにQ点は時間を通じて移動するので長期均衡点でない。これは後に述べられるように、G_Y 曲線が時間を通じてその勾配を変化し、またその下限点が右方に移動することに伴って生ずるものである。そしてその場合、G_Y 曲線は Y/K の下限点が n/s 以下ならばN点を軸点として上方に shift し、またそれが n/s 以上においても同様に shift するからに他ならない。前述のように、Q 点は均衡成長率が成立する点であるが、それが一時（或は移動）均衡点であるにせよ、体系はQ点に収束する傾向をもつだろうか。そこで、このQ点における G_Y 曲線の勾配を求めれば、㉑を Y/K について偏微分して

(29) $\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}s=(\rho+1)\delta\left(\frac{Y}{K}\right)^{\rho}e^{-\rho g t}-n\delta\left(\frac{Y}{K}\right)^{\rho-1}e^{-\rho g t}$ (15) より

(29$_a$) $=\eta_K\left\{s(\rho+1)-n\rho\frac{Y}{K}\right\}$

Q点においては $\frac{Y^{\circ}}{K}=\frac{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}{s}$ であるので

(30) $\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}=\eta_K^{\circ}\left\{s(\rho+1)-n\rho\frac{1}{\frac{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}{s}}\right\}$

(30$_a$) $=s\eta_K^{\circ}\left(\rho+1-\frac{\rho}{1+\frac{1}{n}\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}\right)$

(30$_a$) において、$0<\eta_K^{\circ}<1$ であるので、$\frac{1}{n}\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}>0$ であり、よって $|\rho|>\left|\frac{\rho}{1+\frac{1}{n}\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}\right|$ である。したがって、$-1<\rho<0$ においては（ ）内は1以下となり、以上の関係によって $\left(\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}\right)_{\frac{Y}{K}=\frac{Y^{\circ}}{K}}<s$ となる。

また、G_K 曲線の勾配は (17$_a$) より s である。よって、Q点においては $\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}<\frac{dG_K}{d\frac{Y}{K}}$ であることが明らかである。したがって、$\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}<\frac{Y}{K}<\frac{Y^{\circ}}{K}$ ならば、$G_Y>G_K$ であり Y/K は増加し、そして $\frac{Y}{K}>\frac{Y^{\circ}}{K}$ であるならば、$G_Y<G_K$ であって Y/K は減少し、一時均衡点に収束する傾向をもつことになる。この関係を択一的に次のように表わすことが出来る。いま、G_Y の G_K に対する乖離をEとすれば、E曲線は第一図で示されるように Y/K 軸に関して負の傾斜をもつ。すなわち、$\frac{\partial E}{\partial \frac{Y}{K}}<0$ であって、このような関係のもとでは、Y/K のパラメーター機能を通して E を 0 ならしめるように G_Y は G_K に調整される。このようなメカニズムを通じて一時均衡点の両側において収斂作用が働らくものと考えられよう。そしてまた、均衡成長の可能条件として(28)で示されるように $\eta_K^{\circ}<1$ で与えられるが、これは同時に $-1<\rho<0$ における場合、体系が一時均衡点へ収束する条件となることが明らかである。

以上によって、$-1<\rho<0$ における一時均衡点、及びそれをめぐる体系の運動について検討したが、既に述べられたように一時均衡点Qは G_Y 曲線の時間を通じての shift と下限点の右方への移動にともなって移動する。ここで、それがいかなる関係によって行われるかを検討しよう。(15)より、η_K は所与の Y/K のもとで時間を通じて増加し、それにともなって(29$_a$)より $\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}$ も同様に増加するので、G_Y 曲線の勾配は次第に大となる。また、G_Y 曲線は下限点が n/s 以下ならば、N点を通過し、そして下限点が n/s 以上であっても G_Y 曲線を左方に延長すればN点を通過することになる。そして、下限点では $G_Y=G_K+g$ であり、Y/K が ∞ のところで $G_Y=n+g$ である。第二図は時点 t_0 で第一図で示されるように G_Y 曲線がおかれるものとして、それが時点 t_1 でいかに shift するかを上述の関係にしたがって描いたものである。そこでは下限点が時点 t_0 において n/s 以下であり、それが時点 t_1 でそれ以上になるものとし、後者においても $\eta_K^{\circ}<1$ が成立するものとして描かれている。

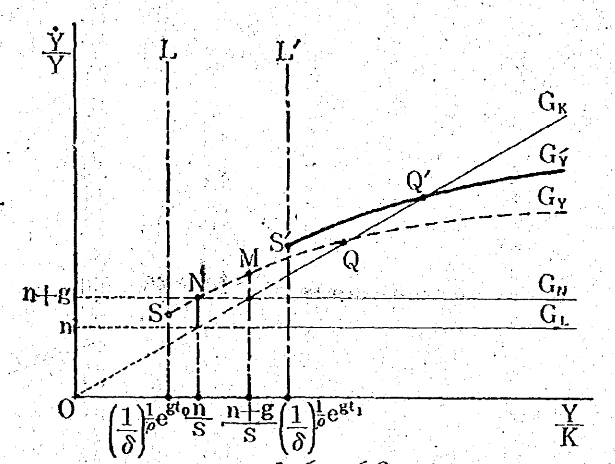
第二図で示されるように、G_Y 曲線は t_1 時点において G'_Y 曲線のように shift するであろう。そこで、t_0 時点における一時均衡点Qは t_1 時点において Q' 点に移動することになる。このように一時均衡点Qは G_K 曲線にそって上方に移動するので、均衡成長率もそれに伴って増加することになる。そして、この過程は $\eta_K^{\circ}<1$ であるかぎり持続されるであろう。このようにして新しく生ずる均衡点の性格は前述の Q 点の場合と同様である。

つぎに、$0<\rho<\infty$ の場合に関して、同様に均衡成長の可能・不能の条件、及び均衡点の性格と均衡点に対する体系の運動のパターンについて以下検討を試みることにしよう。

そこで、まず t 時点における G_Y 曲線の形状を検討するために、G_Y の $\frac{Y}{K}$ に関する偏微係数を表わす (29_a) を中心として考察することにする。(29_a) に関して、第III節で述べた関係によって、η_K は $\frac{Y}{K}$ が0ならば0であるが、そこで $\frac{Y}{K}$ が上限点である場合は1である。よって、$0<\frac{Y_t}{K_t}<\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}$ においては $1>\eta_K>0$ である。したがって、｛ ｝内が負、0、及び正であるかによって、$\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}$ は負、0、及び正となる。択一的にこれは次のように示される。

$$(31)\quad \frac{Y}{K}\gtreqless\frac{\rho}{\rho+1}\frac{n}{s}\ \text{ならば}\ \frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}\gtreqless 0\quad \text{（符号同順）}$$

第 2 図



$-1<\rho<0$

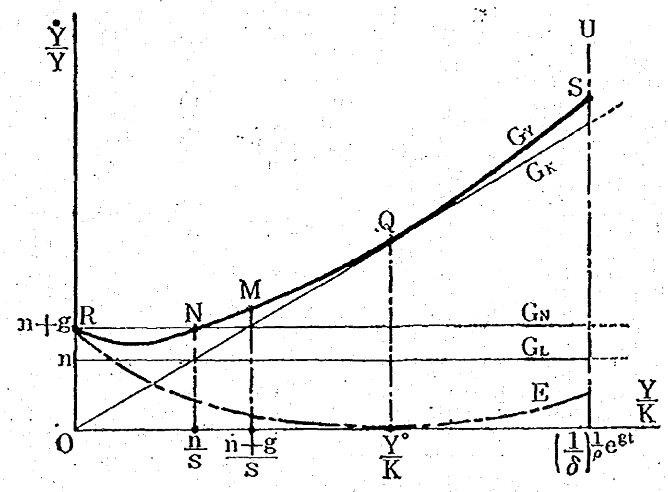
以上の考察によって、G_Y 曲線は上方に凹の曲線であることが明らかである。つぎに、図解的に G_Y 曲線、G_K 曲線、及び G_N 曲線と G_L 曲線の相互関係を示そう。

第三図は第一図と同様にして描かれたものである。ここで、G_K 曲線、G_L 曲線、及び G_N 曲線に関しては前述の通りである。また、ここで $\frac{Y}{K}$ の上限点が第三図におけるように $\frac{n+g}{s}$ の右方に位置し、均衡点が存在するものとする。そこで G_Y 曲線は、$\frac{Y}{K}$ が0ならば(15)より $\eta_K=0$ であるので、$\frac{\dot{Y}}{Y}=g+n$ であり、R点を通過する。つぎに、$\frac{Y}{K}$ が $\frac{n}{s}$ の点においては $-1<\rho<0$ の場合と同様にして $\frac{\dot{K}}{K}=n$ であるので、$\frac{\dot{Y}}{Y}=g+n$ であり、G_Y 曲線はN点を通過する。このように、R点とN点においては $\frac{\dot{Y}}{Y}$ は同値であり、そして両点は G_N 曲線上に位置することになる。前述の $\frac{Y}{K}=\frac{\rho}{\rho+1}\frac{n}{s}$ の点は $\frac{\rho}{\rho+1}<1$ であるので、$\frac{Y}{K}$ が0と $\frac{n}{s}$ の場合の中間に位置する。この $\frac{Y}{K}$ が $\frac{\rho}{\rho+1}\frac{n}{s}$ の点で G_Y 曲線は (29_a) より $\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}=0$ であるのでその勾配が0となり、$\frac{Y}{K}$ が $\frac{\rho}{\rho+1}\frac{n}{s}$ 以下のところでは勾配が負であり、$\frac{Y}{K}$ が $\frac{\rho}{\rho+1}\frac{n}{s}$ 以上ではそれが正となるのである。つぎに、$\frac{Y}{K}$ が $\frac{n+g}{s}$ の点においては、$\frac{\dot{Y}}{Y}=n+g(1+\eta_K)$ $(0<\eta_K<1)$ となり、M点で示される。Q点においては $\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{K}}{K}=n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}$ が成立する。ここでQ点は後に述べられるように一時、或いは移動均衡点である。そこでQ点における $\frac{\dot{Y}}{Y}$ はM点のそれよりも大である。なぜならば、両点における $\frac{\dot{Y}}{Y}$ の差をとると

$$(32)\quad \frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}-g(1+\eta_K)=g\left\{\frac{(\eta_K^{\circ}-\eta_K)+\eta_K^{\circ}\eta_K}{1-\eta_K^{\circ}}\right\}$$

となり、ここで(15)より $\frac{Y}{K}$ が大なる方が η_K は大であるので、$\eta_K^{\circ}>\eta_K$ となり、したがって(32)は正となるからである。最後に、$\frac{Y}{K}$ が上限点 $\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}\right)$ のところでは、η_K は1であるので、$\frac{\dot{Y}}{Y}=g+\frac{\dot{K}}{K}$ となり、その場合 $\frac{\dot{Y}}{Y}$ はS点のように示されることになる。

第 3 図



ここで、$0<\rho<\infty$ の場合における均衡成長の可能条件について検討しよう。第三図は唯一の均衡点Qが存在するものとして描かれたものである。この場合において、均衡点Qが存在するためには、まずQ点における $\frac{Y^{\circ}}{K}$ はその上限点以下に位置せねばならない。したがって、

$$(33)\quad \frac{Y^{\circ}}{K}<\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}\quad \text{或は}\quad (33_a)\quad \frac{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}{s}<\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}$$

という関係が存在しなければならないことになる。(33)の関係は択一的に

(34) $\delta\left(\frac{Y^{\circ}}{K}\right)^{\rho} e^{-g\rho t} < 1$

で示される。ここで、$\delta\left(\frac{Y^{\circ}}{K}\right)^{\rho} e^{-g\rho t}$ は η_K° であるので、(34) は (34a) $\eta_K^{\circ} < 1$ と表わすことも出来る。したがって、$\frac{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}{s} > \frac{n+g}{s}$ であり、そこで $\frac{Y^{\circ}}{K}$ は $\frac{n+g}{s}$ と上限点の間に位置することが明らかである。

つぎに、Q点では $G_Y=G_K$ であるが、同時にその点において G_Y 曲線と G_K 曲線のそれぞれの勾配が一致する。よって、$\left(\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}\right)_{\frac{Y}{K}=\frac{Y^{\circ}}{K}} = \frac{dG_K}{d\frac{Y}{K}}$ とならねばならない。そこで、(29a) で与えられる $\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}$ に $\frac{Y^{\circ}}{K}=\frac{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}{s}$ を代入したものと s を等置すれば、

(35) $\eta_K^{\circ}\left\{s(\rho+1)-\frac{sn\rho}{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}\right\}=s$

(35)の両辺を s で除し、変形すれば、

(35a) $\frac{(1-\eta_K^{\circ})^2}{(\rho+1)\eta_K^{\circ}-1}=\frac{g}{n}$

(35a) において、$\frac{g}{n}>0$ であるので、左辺が正となる条件は明らかに、$(\rho+1)\eta_K^{\circ}-1>0$、或は $(\rho+1)\eta_K^{\circ}>1$ である。よって

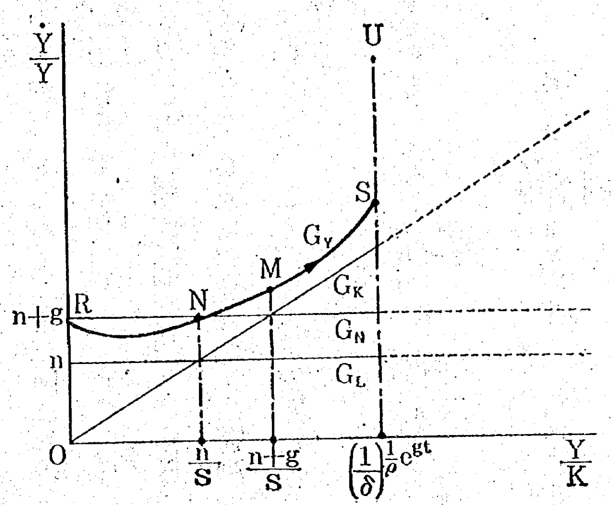
(36) $\eta_K^{\circ}>\frac{1}{\rho+1}$

でなければならない。η_K° は前述のように $\eta_K^{\circ}<1$ であるので、$0>\rho>-1$ の場合は (35a) の関係は存在せず、$0<\rho<\infty$ の場合に関してのみ成立するものである。よって η_K° が $t<\infty$ に関して

(37) $\frac{1}{\rho+1}<\eta_K^{\circ}<1$

となる場合に均衡点Qが存在可能となるであろう。以上の説明におけるように、Q点が存在するためには $\frac{Y^{\circ}}{K}$ が $\frac{n+g}{s}$ と上限点の間に位置する必要があるが、上限点が $\frac{n+g}{s}$ 以下の場合は均衡点が存在しえないことは自明であり、また第四図で示されるように、単に上限点が $\frac{n+g}{s}$ を上廻るという条件のもとで均衡点が存在するものとは限らない。しかしながら、これらの場合においてもそこで時間の経過にともなって上限点が右方に移動し、また同時に後に述べられるように G_Y 曲線の勾配は低下するので、充分時間が経過したのち、第三図と同様に均衡点が存在可能となる。

第 4 図



第四図においては、$G_Y>G_K$ であるので、$\frac{Y}{K}$ は上限点へ、そして体系は矢印で示されるように G_Y 線にそって s 点に向って運動する傾向をもつであろう。つぎに、ここで G_Y 曲線が in the short run において時間的にいかに shift するかを述べよう。$\frac{Y}{K}$ を所与とすれば、(15) より η_K は時間を通じて低下するので、(29a) より G_Y 曲線の勾配 $\left(\frac{\partial G_Y}{\partial \frac{Y}{K}}\right)$ もそれに伴って低下する。また、上限点が $\frac{n}{s}$ の右方にあるものとすれば、G_Y 曲線はこのような時間の経過と独立に必ずR点とN点を通過する。そして、上限点では $G_Y=G_K+g$ である。以上の関係によって、第四図の G_Y 曲線は時間の経過に伴ってその勾配を低下しつつ右方に shift することになる。そこで、s′点は G_K 曲線と平行に移動する。そしてある時点において、第三図のように G_Y 曲線は G_K 曲線と一点で切するように

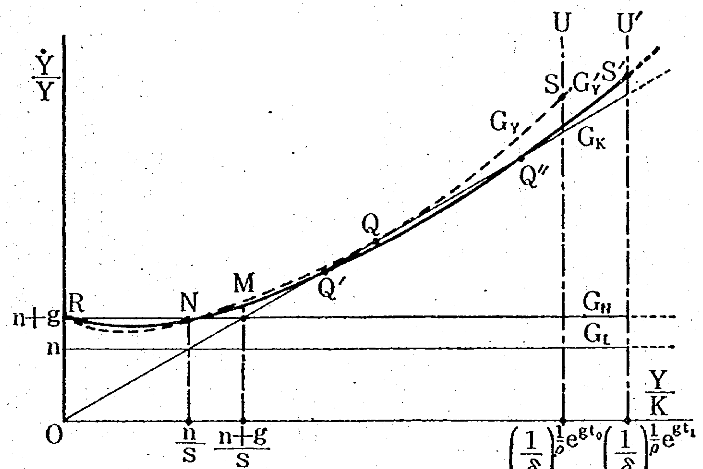
なる。いま、その時点を t° とし、それがいかに与えられるかを述べよう。G_Y 曲線と G_K 曲線が一点で切する場合は (35$_a$) の関係が成立するので、(35$_a$) より η_K° が導かれ、それを $\frac{Y^{\circ}}{K}=\frac{n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}{s}$ に代入して Y°/K が得られる。この両者を (15) に代入すれば、そこで t° が得られることになる。(5) したがって、第四図のように均衡点が存在しない場合は $t^{\circ}>t$ において生ずるものである。ところで、第三図における均衡点Qは同一位置にとどまらないことは明らかである。それは、第三図より $\frac{(\dot{K}/L)}{(K/L)}>0$ であり、(20$_a$) によって $\frac{\dot{\eta}_K}{\eta_K}<0$ であるので、η_K は低下し (24$_a$) より均衡成長率も低下するからである。これは前述のように G_Y 曲線が時間を通じて shift することに随伴する。そこでQ点は一時（或は移動）均衡点である。ここで、問題となるのはこのQ点に対する体系の運動の態様である。第三図で明らかなように、Q点における前述のE曲線は Y/K 軸に対して凸となる。この関係は半安定 semi stability として知られているものであり、$\frac{\partial^2 E}{\partial \frac{Y^2}{K}}>0$ となるものである。そこで、(38) で与えられる $\frac{\partial^2 E}{\partial \frac{Y^2}{K}}$ に $\frac{Y^{\circ}}{K}=n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}$ を代入すれば

$$(38)\quad \frac{\partial^2 E}{\partial \frac{Y^2}{K}}=\rho\delta\left(\frac{Y^{\circ}}{K}\right)^{\rho-1}e^{-g\rho t}\left\{s(\rho+1)-\frac{\rho-1}{\left(\frac{Y^{\circ}}{K}\right)}\right\}$$

$$(39)\quad \frac{\partial^2 E}{\partial \frac{Y^2}{K}}=s\rho\delta\left(n+\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}\right)^{\rho-1}e^{-g\rho t}\left\{(\rho+1)-\frac{\rho-1}{1+\frac{1}{n}\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}\right\}$$

(39) において、$0<\eta_K^{\circ}<1$ であるので、$\frac{1}{n}\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}>0$。よって、$\rho+1>\frac{\rho-1}{1+\frac{1}{n}\frac{g}{1-\eta_K^{\circ}}}$ であり、$\{\ \}$ は正であり、したがって、$0<\rho<\infty$ においては明らかに $\frac{\partial^2 E}{\partial \frac{Y^2}{K}}>0$ となる。よって、$\frac{Y}{K}<\frac{Y^{\circ}}{K}$ ならば $G_Y>G_K$ となり、Y/K は増加しQ点に収束する傾向をもつが、$\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{gt}>\frac{Y}{K}>\frac{Y^{\circ}}{K}$ ならば、$G_Y>G_K$ であって Y/K は同様に増加するので、体系はS点に向って運動する傾向をもつであろう。

第 5 図



$0<\rho<\infty$

以上によって、一時均衡点Qが存在する場合について検討したが、前述のように G_Y 曲線は時間的に shift し、また上限点も同時にそれにともなって右方に移動するので、一時均衡点、及びそれをめぐる体系の運動のパターンも当然変化する。そこで、第三図で示された G_Y 曲線の時間的な shift について述べよう。

既に説明されたように、G_Y 曲線の勾配は時間を通じて低下し、また G_Y 曲線はこのような時間の経過と独立に、必ずR点とN点の両点を通過する。そして、上限点においては、$G_Y=G_K+g$ である。第五図は時点 t° において第三図で示されるように G_Y 曲線がおかれるが、それが時点 $t_1(>t^{\circ})$ でいかに shift するかを上述の関係にもとづいて描いたものである。

第五図で示されるように、G_Y 曲線は t_1 時点において G_Y' 曲線のように shift するであろう。そこで、G_Y' 曲線は G_K 曲線と二点で交わることになるので、いまその左方に位置する均衡点をQ′点、右方のそれをQ″点としよう。Q′点においては、G_Y' 曲線の勾配は G_K 曲線のそれよりも小さい――よって、E 曲線は Y/K 軸に関して負の傾斜をもつ――ので、Q′点の両側で安定的であり、その付近で体系はQ′点に収束する傾向をもつ。そして、Q′点は時間の経過にともなって G_Y' 曲線がさらに shift down する結果、G_K 曲線に沿っ

て左方に移動するので、Q点と同様に一時均衡点である。このようにして、一時均衡点Q′が時間を通じて移動する結果、均衡成長率は前述のように持続的に低下することになる。他方、Q″点ではG_Y'曲線の勾配はG_K曲線のそれより大である——よって、E曲線はY/K軸に関して正の傾斜をもつ——のでその右方において不安定的であり、そこで体系がQ″点の左方にあれば、Q′点に向って収束し、また体系がQ″点の右方に位置すれば、前述のように、そこで体系はG_Y曲線にそいS′点に向って運動する傾向をもつであろう。上述の関係によって、G_Y曲線の場合よりもG_Y'曲線に関してその安定範囲は拡大されることになり、Q″点は時間を通じて右方へ移動するので、安定範囲はそれにともなって一層拡大されてゆくことになるであろう。

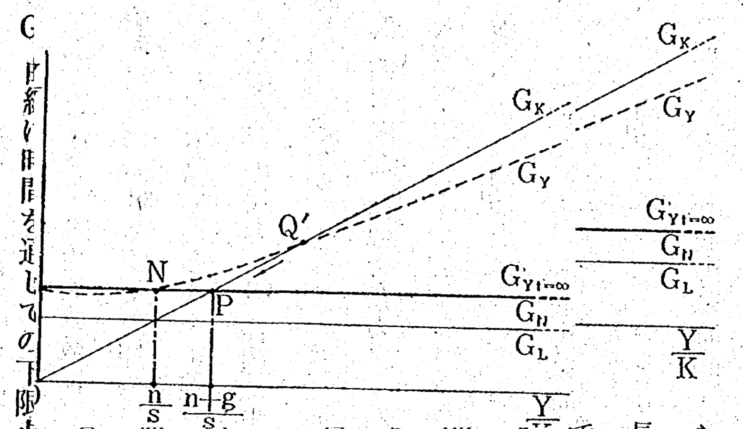
V　長期における体系の運動

すでに述べられたように、G_Y曲線は $-1<\rho<0$ の場合においても、$0<\rho<\infty$ の場合においても時間を通じて shift するが、in the long run で体系はいかなる関係におかれるだろうか。ρが0の場合にはG_Y曲線は時間と独立であり同一位置にとどまる。すなわち、gの切片をもち、δsの勾配をもつ定曲線である。そしてこのG_Y曲線は原点を通過し、sの勾配をもつG_K曲線と安定的交わりをもつことになり、このようにしてえられる交点は安定的な定均衡点であるので、体系がある任意の位置から出発した場合、究極的に均衡点に収斂することになり、そこで黄金時代均衡が実現されることが知られている。

ところで、$0<\rho<\infty$ の場合は第Ⅳ節で述べたように、G_Y曲線は時間を通じてR点とN点の二定点で支持されながら持続的に shift down する。そこで、第五図におけるように、初期に一時均衡点Qが与えられるとして、時間の経過とともに shift down するG_Y曲線と不変のG_K曲線との安定的交わりによって生ずる一時均衡点としてG_K曲線に沿って左方に移動するので、それにともなって均衡成長率は不断に低下する。思うに、この過程は時間が∞となるまで進行するであろう。tが∞となれば、G_Y曲線は第六図で示されるようにG_N曲線と一致するようになり、Q′点は究極的にG_N曲線上の一点Pに到達することになる。なぜならば、$t\to\infty$となれば、(15)よりそれぞれのY/Kに関してη_Kは0となり、また(29$_a$)よりG_Y曲線の勾配は0となるからである。そして、$\eta_K=0$となることによって、(24$_a$)より $\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{K}}{K}=n+g$ となるからである。このようにして、in the long run においては、産出高と資本は労働の成長率と技術進歩率の和に等しい率で成長することになる。そこで、P点は長期均衡点であり、また黄金時代均衡を示すことは自明である。と同時に、P点において前述のようにη_Kは0であり、また利潤率も0である。したがって、資本（労働）の偏生産弾力性は0（1）であり、一次同次性のもとで資本（労働）の分配率は0（1）である。すなわち、生産物の増加はすべて労働の増加によってもたらされ、またそこで賃金が生産物のすべてを吸収するということを意味する。この状態はロビンソン（二二、八二・八三頁）が云うところの経済的至福の状態 state of economic bliss を表わすものである。(6) そして、$0<\rho<\infty$ の場合、$t\to\infty$ で上限点は∞となり、したがって体系は何らの制約を受けない。

第 6 図

第 6 図



long run において体系がいかなる関係におかれるかを検討しよう。第Ⅳ節で述べたように、G[illegible]曲線は時間を通じて[illegible]下限点の右方への移動に伴って、その勾配を増加させながら上方に shift する。そこで、一時均衡点はG_K曲線にそって上方に移動し、均衡成長率もそれに伴って増加する。これに伴って、前述のように。η_Kは時間を通じて次第に増加するが、それは1以上になり得ないものである。η_Kが1に近づくにつれて均衡成長率は(24$_a$)の第二項が

発散的に増大することによって∞に近づくことになる。以上の考察によって明らかなように、$-1<\rho<0$ の場合には $0\leqq\rho<\infty$ におけるような長期均衡点は存在しない。そこでは、体系は発散的であり、η_K が1になれば均衡成長は不能となる。また、第Ⅳ節で述べたように下限点が∞となることによって体系そのものが存在不能となる。

Ⅵ　結　び

以上、C・E・S生産函数にソロー的意味における中立的技術進歩を導入した場合における均衡成長の可能・不能、及び可能な場合における安定条件についてそれぞれ $-1<\rho<0$ と $0<\rho<\infty$ の場合に関して短期的・長期的考察を行なった。

ここで、本稿でえられた結論の要約を述べるならば次の通りである。

$-1<\rho<0$ の場合、G_Y 曲線は上方に凸であり、その下限点において G_Y は G_K を g だけ上廻り、また $\frac{Y}{K}=\infty$ において G_K は∞であるが、G_Y は $g+n$ であり、またその下限点は時間 t によって与えられる。下限点が0と∞の間のいずれにあっても G_Y 曲線は G_K 曲線を左方より右方に切ることになり、よって均衡点が存在する。そこで、(27) より t によって決定される Y°/K が下限点以上になることが、均衡成長の可能条件であり、これは択一的に $\eta_K^{\circ}<1$ として示される。そして、$\eta_K^{\circ}<1$ の場合、その均衡点において (29_a) より G_Y 曲線の勾配は G_K 曲線のそれを下廻ることになり、均衡点は両側安定的な性格をもつ。しかしながら、G_Y 曲線は時間を通じて、その下限点が右方に移動し、また同時に G_Y 曲線そのものが陽表的に、或いは陰伏的にN点を軸点として上方に shift するので、上述の均衡点も G_K 曲線にそって上方に移動する。よって上述の均衡点は一時均衡点、或いは移動均衡点であって、均衡成長率は持続的に上昇する傾向をもつ。

つぎに、$0<\rho<\infty$ の場合、G_Y 曲線は上方に凹であり、Y/K が0のところで G_Y は G_K を $n+g$ だけ上廻り、上限点では G_Y は G_K を g だけ上廻る。したがって、G_Y 曲線は必ずしも G_K 曲線との交点をもつものと限らない。しかし、時間が経過するにつれて上限点は右方に移動し、G_Y 曲線そのものが下方に shift するので、ある時点で G_Y 曲線は G_K 曲線と一点で接するようになる。その時点 t° は第Ⅳ節で述べられた関係によって決定されるが、$t<t^{\circ}$ である場合には、いかなる意味における均衡点も存在しない。$t=t^{\circ}$ において均衡点がはじめて生ずるが、その場合、$\eta_K^{\circ}<1$ である。この均衡点Qは左方安定的であり、体系がQ点の左方（右方）に位置すれば、体系は G_Y 曲線にそってQ点に収束する（S点に向って運動する）傾向をもつ。この均衡点Qも一時均衡点、或いは移動均衡点であって、$t>t^{\circ}$ の場合、G_Y 曲線はR点とN点を必ず通過するが、前述のように下限点の右方への移動と G_Y 曲線の下方への shift によって、G_K 曲線と Q' 点、及び Q'' 点の二点で交わることになる。この中、Q' 点は両側安定的であり、G_K 曲線にそって下方に移動するので、均衡成長率は持続的に低下する。Q'' 点は不安定的であって、その右方に体系が位置すれば、S点に向って乖離する傾向をもつ。

最後に、in the long run に関しては、$0<\rho<\infty$ の場合、一時、或は移動均衡点 Q' は究極的にP点に到達するので、産出高成長率と資本成長率は労働の成長率と技術進歩率の和と均等することになる。この長期均衡点Pにおいて体系は黄金時代均衡となり、そして同時にロビンソンの云う経済的至福の状態となる。一方、$-1<\rho<0$ の場合は上のような長期均衡点は存在せず、一時或いは移動均衡点Qは発散的に運動し、究極的には均衡成長が不能となる。

注 (1)　スワン・ソロー（四）は中立的技術進歩における均衡成長の存在を指摘しているが、より明確にはミード（五）・福岡教授（七）により分析されている。前者は生産函数 $Y=F(K, L, t)$ が完全代替的であると仮定し、後者はより明示的にダグラス生産函数にもとづいて、それぞれ黄金時代均衡と収斂機構が考察された。

(2)　同じく黄金時代均衡の求心力を分析する場合において、カルドア体系と新古典派体系における顕著な相違はロビンソンが Essays in the Theory of Economic Growth (p. 118) で指摘するように、前者においては資本係数が利潤率の増加函数と仮定されるのに対して、後者においては資本係数は利潤率の減少函数であるという点である。

（3） 拙稿（一〇、六二頁）によって述べられるように、(4)は(2)よりえられる

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=\gamma(1-\delta)e^{-\rho\sigma t}\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)^{\rho+1}\cdots\cdots〔1〕$$

と

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\gamma\delta e^{-\rho\sigma t}\left(\frac{Y_t}{K_t}\right)^{\rho+1}\cdots\cdots〔2〕$$

とを辺々相除することによって導かれる。また、$\frac{\partial K}{\partial L}=\frac{F_{L_t}'}{F_{K_t}'}$ であるので(4)より

$$\frac{\dot{F}_{L_t}'}{F_{L_t}'}-\frac{\dot{F}_{K_t}'}{F_{K_t}'}=(\rho+1)\frac{(\dot{K/L})}{(K/L)}\cdots\cdots〔3〕$$

である。そして、

$$\frac{(\dot{Y/L})}{(Y/L)}=g+\eta_K\frac{(\dot{K/L})}{(K/L)}\cdots\cdots〔5〕$$

である。いま、$\frac{(\dot{K/L})}{(K/L)}=0$ とおけば〔3〕より、

$$\frac{\dot{F}_{L_t}'}{F_{L_t}'}=\frac{\dot{F}_{K_t}'}{F_{K_t}'}\cdots\cdots〔3〕'$$

〔5〕と〔4〕より

$$\frac{\dot{F}_{L_t}'}{F_{L_t}'}=g$$

よって(3)がえられる。

（4） Y/K の下限点では $\eta_K=1$ であり、Y/K の増加に伴って(15)より η_K は低下し、Y/K が ∞ になれば $\eta_K=0$ となる。ここで、$\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}e^{\sigma t}<\frac{n+g}{s}<\infty$ とされるので、$\frac{Y}{K}=\frac{n+g}{s}$ においては $0<\eta_K<1$ である。よって、M点はN点よりも高い位置に存在する。

（5） 上で述べられた関係によって、$t°$ は任意に与えられるものでなく、体系における $\delta\cdot n\cdot s$、及び g の各パラメーターによって決定されるものである。

（6） ロビンソンはこの状態を停滞的であるとみるよりは至福の状態とみる。というのはこの状態は消費が所与の技術的諸条件のもとで永久に維持可能な極大水準にあるからである。

参考文献

（1） K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow, "Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency" Rev. Econ. Stat., Aug. 1961.
（2） T. W. Swan, "Economic Growth and Capital Accumulation" Econ. Rec., 1956.
（3） J. D. Pitchford, "Growth and the Elasticity of Factor Substitution" Econ. Rec., Dec. 1960.
（4） R. M. Solow, "A Contribution to the Theory of Economic Growth" Qua. Jour. Econ. Feb. 1956.
（5） J. E. Meade, A Neo Classical Theory of Economic Growth, 1961.
（6） N. Kaldor, "A Model of Economic Growth" Econ. Jour., Dec. 1957.
（7） 福岡正夫 経済成長と技術進歩 経済理論調査報告 昭和三八年八月。
（8） J. R. Hicks, The Theory of Wages. 内田忠寿邦訳「賃金論」。
（9） R. M. Solow, "Technical Change and the Aggregate Production Function" Rev. Econ. Stat., Aug. 1957.
（10） 高橋房二 生産函数と技術進歩に関する一考察 三田商学研究 第七巻二号。
（11） R. F. Harrod, Towards a Dynamic Economics 鈴木諒一、高橋長太郎邦訳「動態経済学序説」。
（12） J. Robinson, The Accumulation of Capital 杉山清邦訳「資本蓄積論」。