Title	ゴールドバーガー著 エコノメトリックセオリー
Sub Title	S. Goldberger; Econometric theory
Author	佐藤, 保
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1965
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.58, No.4 (1965. 4) ,p.332(90)- 337(95)
JaLC DOI	10.14991/001.19650401-0090
Abstract	
Notes	書評
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19650401-0090

ゴールドバーガー著

『エコノメトリックセオリー』

(S. Goldberger; Econometric Theory)

佐　藤　　保

計量経済学の標準的教科書といわれるべきものもいくつか出版された。代表的なものとして、チントナー(エコノメトリックス)、クライン(テキストオブエコノメトリックス・エコノメトリックス入門)バラバニス(エコノメトリックス入門)ジョンストン(エコノメトリックスメソッド)等をあげることができよう。それぞれ特徴のあるものであるが、計量経済学として述べるべきことの中心は、経済分析の統計的手法としての特徴である同時推定方式である。しかしその力点は多少違う。クラインは彼自身がとりあつかった計量分析及び一般的な経済理論を述べる前提として統計的方法を述べることになるから、同時推定の説明は前半で終って、後半は主として経済問題を論じることになる。クラインの二冊の書物を読むことは計量経済分析の基礎的知識を身につけるには最もよいであろう。チントナーは時系列分析に多くの頁をさいているが、その特徴は説明と共に数多くの例題をあげている点で、この種類の書物はとかく理論や方法を述べることに重点をおきがちで、実際上の応用という実例を示すのが少いため読者にわかりにくくなっているが、豊富な実例は理解を助ける上に大きく役立っている。バラバニスは、計量経済学の問題や、数理統計学をできるだけ常識的なことばをもって示すことを目的として書かれたとしている。結果は必ずしもわかりやすいとはいえないが意図したところはそこにあった。ジョンストンとゴールドバーガーの書物は最近出版されたもので、ほぼ類似した内容をもつものである。近年の計量経済学の書物では行列及びその記号をもって式を展開することが多く行われているが、初歩的な読者には難解な感じをあたえるため、クライン、チントナー、バラバニス等は必要な限りこれを使って、むしろなるべく使わずに説明を行うとしている。ジョンストンも最初理解を助けるために二変数の場合をとりあつかい、これと行列の説明で全体の三分の一を使っている。ゴールドバーガーの場合は最初から行列を積極的に使い、まず序論のあと行列の説明に一章を設けている。そしてそのあと、すぐに行列を使ってゆくのではじめての読者には頁をめくった際難解であるとの印象をあたえるかもしれない。いろいろな仮説の推定や検定を行うためには数理統計の知識が必要であるが、計量経済学と名のつく書物の中で、これをどの程度あつかうかも問題のあるところである。詳しいほどよいのは当然であるが、数理統計自身はその専門の書物もあることであるし、限られた頁数の中で全部をとりあつかうことは不可能であるから、必要最小限度にとどめるのが普通である。事実それでさしつかえないので、証明等も専門の書物をみればよいともいえる。他の著者達がそうしているのに対してゴールドバーガーはできるだけ一冊の書物の中で統計的な知識をも盛りこもうとしている。特に統計的推論の基礎概念という一章を設けている。そしてこの章に百頁以上を使っており、クラインの四十頁に比しても倍以上で、特に漸近分布の理論や確率過程にもふれており、これらは以下の計量分析に重要であるが、通常の入門コースでははぶかれているものである。そこで本論に入る前の予備として一五〇頁をついやすことになる。序論、行列の基礎概念、統計的推論、基礎概念をへて第四章から本論に入るわけであるが、その論議の進め方は経済分析の中心である回帰分析の拡充という形式で示される。第四章は古典的な線型回帰、第五章、線型回帰の拡充、第六章、確率的な独立変数をもつ線型回帰、第七章、同時線型関係の体系となっており、いずれの章にも線型という文字が入っている。計量経済学の方法的発展を、単純な最小自乗法による回帰係数の推定から徐々に条件をゆるめて、それが経済分析にしばしばあらわれる形における回帰係数の推定はどう行われればよいかを示そうとしてゆくのである。内容的にはクライン、チントナー、ジョンストン等でもあつかっていることであるが、一貫して回帰の拡張という観点から論議を進めている点で一番良くまとまっていると言えるかもしれない。クライン的なものよりも計量分析の方法に興味のある読者にとっては、一冊で数理統計の知識をももちうる点とあいまってよい教科書を得たといってよいであろう。以下若干本文の内容にふれておこう。第四章は古典的な線型回帰をとりあつかう。古典的な線型回帰のモデルは次の構成をもっている。

(1)　$Y=X\beta+\varepsilon$

(2)　$E\varepsilon=0$

(3)　$E\varepsilon\varepsilon'=\sigma^2 I$

(4)　X は T 行 (1+K) 列の行列でくりかえされる標本で固定されている。

(5)　X の階数$=1+K\leqq T$

YはT行一列のベクトル、βはK行一列のベクトル、εはT行一列のベクトルを示している。すなわち標本の大きさはT個で、独立変数の数はK個、である。ただし常数項はすべてが1という値をとる独立変数であると考えているので、(1+K)個の変数があるかのようにとりあつかわれるのである。εは攪乱項である。

$$y_t=\beta_0x_{t0}+\beta_1x_{t1}+\cdots\cdots+\beta_Kx_{tK}+\varepsilon_t\quad(t=1,\cdots\cdots,T)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{10} & \cdots\cdots & x_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{T0} & \cdots\cdots & x_{TK} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

と書けばよくわかるであろう。

ここで考えられている仮定は、(1)各々の攪乱項の期待値は0である。(2)すべてのtに対して、$E\varepsilon_t^2=\sigma^2$ 攪乱項の分散はすべて等しいということで、同時に、$E\varepsilon_s\varepsilon_t=0$　$s\neq t$ ということを含み、攪乱項には自己相関がないと仮定されている。(3)としてXは確率変数でなく(nonstochastic) Xとεとは独立である。(4)独立変数の間には完全な線型の関係はない。これは推定の上の前提条件であるから仮定としては(1)から(3)迄であると考えられる。

現実の資料から最小自乗法によって得られるβの推定量bは、

$$b=(X'X)^{-1}X'Y$$

（X'はXの転置行列、（ ）$^{-1}$ は逆行列を示す）

によってあたえられる。そしてβの最小線型不偏推定量であることが示される。bの分散共分散行列は、

$$\textstyle\sum_{bb}=\sigma^2(X'X)^{-1}$$

によって示される。σ^2を推定するために、

$$E\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}=\sigma^2(T-K-1)$$

を使って $\sum\hat{\varepsilon}_t^2=ssE$ と書けば、

$$s^2=\frac{ssE}{T-K-1}$$

s^2は古典的線型回帰モデルにおけるσ^2の不偏推定量となる。Σ_{bb}に対する不偏推定量として、

$$S_{bb}=s^2(X'X)^{-1}$$

があたえられる。最小自乗法はεの分布について仮定をおかないが、更にεは正規分布をすると仮定する。こうすることによってβの信頼区間や検定を行うことができる。

$$E\varepsilon=0\quad E\varepsilon\varepsilon'=\sigma^2I$$

の仮定はそのままで、εは平均0、分散σ^2の多変数正規分布に従う（これを spherical nomal という）。εの分布を正規分布と考えることによってβとσ^2の最尤推定量を考えることができるが、古典的正規線型回帰モデルにおいてβの最尤推定量は最小自乗推定量bである。σ^2の最尤推定量は $^{ssE}/_T$ となるから不偏推定量ではない。次に若干の特殊な回帰について考えてゆく。単純な

$$y=\alpha+\beta x$$

という形の他にいろいろな形式が考えられるが経済分析で最もしばしば用いられるのは、

$$y=\beta_0x^{\beta_1}\varepsilon$$

という形で、対数をとれば、

$$\log y=\log\beta_0+\beta_1\log x+\log\varepsilon$$

で線型となり、$\log\varepsilon$ についてこれまでなされてきた仮定が設けられればよい。次に独立変数がダミー変数である場合、ダミー変数は要因が質的な場合の変数のことで、例えば結婚しているかどうか、職業別、学歴別、人種別、地域別等によって区別がなされる場合、多くは1又は0という値を入れることによって通常の変数と同様に処理することができる。

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\cdots\cdots+\beta_Kx_K+\varepsilon$$

x_iがダミー変数の場合も通常の最小自乗法が用いられる。ダミー変数は要因を分類することになるので、この回帰から、

$$\beta_1=\beta_2=\cdots\cdots=\beta_K=0$$

という仮説、すなわちyの期待値がxと共に変化しない、分類が不適当であるという仮説を検定することは、通常の分散分析でK個に分類して、この分類が適当かどうかを検定する（あるいはK個の平均値が等しいかどうかという検定といってもよい）ことと全く同じことになる。ここに分散分析と回帰との関連をみることができる。ここまでは通常の最小自乗法で処理されたがその仮定をはずしてゆく、再述すればこれまでの仮定は、

$$E\varepsilon\varepsilon'=\sigma^2I$$

$$E\varepsilon_t^2=\sigma^2\quad（すべての\ t\ に対して）$$

$$E\varepsilon_s\varepsilon_t=0\quad（すべての\ s\neq t\ のとき）$$

これを一般化してIをΩで置きかえる。すなわち$E\varepsilon_t^2$はすべてのtに対して等しいとは限らない、分散の不均一性と、$E\varepsilon_s\varepsilon_t=0$ とは限らない、εの相互依存性とを導入するのである。

$$Y=X\beta+\varepsilon$$

$$E\varepsilon=0$$

$$E\varepsilon\varepsilon'=\sigma^2\Omega\quad（Ω は正値定符号）$$

X は T行（1+K）列の行列でくりかえされる標本で固定される。

X の階数は $1+K\leqq T$

このときβの最良線型推定量$\tilde{b}$は

$$\tilde{b}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$$

で示され、その分散共分散行列は

$$\textstyle\sum_{\tilde{b}\tilde{b}}=\sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

で示されるが$\tilde{b}$は一般化された最小自乗推定量でもある。それは、

$$S=(Y-X\beta)'\Omega'(Y-X\beta)$$

を最小にするようにβの推定量を求めることで通常の最小自乗法ではΩはない。

$$\tilde{Y}=X\tilde{b}\quad\tilde{\varepsilon}=Y-\tilde{Y}$$

$$\tilde{s}^2=\frac{\tilde{\varepsilon}'\Omega^{-1}\tilde{\varepsilon}}{T-K-1}\qquad S_{\tilde{b}\tilde{b}}=\tilde{s}^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

となることは単純な最小自乗法と類似しているが、ここでΩがわからなければ計算をすることができない。しかし本来Ωは未知のものであるから、何等かの仮定がおかれなければならない。また不均一性と相互依存性を同時に考慮することは非常に困難になるので、どちらか一方について考える。不均一性について、$E\varepsilon_t^2=\sigma^2k_t$ とすればk_tの値がわかっていれば、

$$\Omega^{-1}=\begin{pmatrix}1/k_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1/k_T\end{pmatrix}$$

となって

$$\tilde{\varepsilon}'\Omega^{-1}\tilde{\varepsilon}=\sum(\tilde{\varepsilon}_t^2/k_t)$$

として計算することができる。相互依存性については一次の自己回帰

$$\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t\qquad|\rho|<1$$

$$E\varepsilon_t=0\quad E\varepsilon_t^2=\sigma^2\quad E\varepsilon_t\varepsilon_s=\sigma^2\rho^{|t-s|}$$

$$Eu_t=0\quad Eu_t^2=\sigma_u^2\quad Eu_su_t=0\quad s\neq t$$

という仮定をおけば、

$$E\varepsilon=0\quad E\varepsilon\varepsilon'=\sigma^2\Omega=\sigma^2\begin{pmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{T-1}\\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2}\\ \vdots & & & & \vdots\\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

となり、

$$\Omega^{-1}=(1-\rho^2)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & (1+\rho^2) & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & (1+\rho^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1+\rho^2) & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

となって、ρがわかっていればβの最良線型不偏推定量bを求めることができる。$\rho=1$とすれば更に簡単になる。古典的最小自乗法による推定量はこのような場合でもなお不偏ではあるが、もはや最小の分散をもつものではなくなることは直観的にも想像されよう。しかしρやk_tは未知のものであるから推定や仮定をおかなければならない。自己回帰については、まず古典的最小自乗法によって残差の一次の自己回帰の係数を求めて$\hat{\rho}$としてこれを代入する。しかしこうすることによって、

$$\Omega_*=\begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho} & \cdots & \hat{\rho}^{T-1} \\ \hat{\rho} & 1 & \cdots & \hat{\rho}^{T-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \hat{\rho}^{T-1} & \hat{\rho}^{T-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_*=(X'\Omega_*^{-1}X)^{-1}X'\Omega_*^{-1}Y$$

はβの最良線型不偏推定量ではなくなるが、相互依存性は考慮したことになる。

$$E\varepsilon_t^2=\sigma^2k_t \qquad k_t=(Ey_t)^2$$

とすれば、

$$E\varepsilon_t^2=\sigma^2E(y_t)^2$$

$$\Omega_*=\begin{pmatrix} \hat{y}_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{y}_T^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_*=(X'\Omega_*^{-1}X)^{-1}X'\Omega_*^{-1}Y$$

$\hat{y}$は古典的最小自乗法によって得られるものを用いる。$\tilde{b}_*$はβの最良線型不偏推定量とはならないが不均一性を考慮したことになる。このように実際には古典的最小自乗法による推定値を用いなくてはならないところに推定値の性質に若干の問題を生じることになる。

独立変数が質的変数と同様に従属変数も質的変数を考えることができる。例えば自分の家をもっているか、いないか、一年以内に自動車を買ったかどうか、等を考えることができる。すなわちyは事象が起れば1、起らなければ0という値をとる二項変数と考えることができる。

$$Y=X\beta+\varepsilon \qquad E\varepsilon=0$$

とおくことによって古典的最小自乗法を用いることができるが、$E\varepsilon_t^2$は、

$$E\varepsilon_t^2=Ey_t(1-Ey_t) \qquad Ey_t=X'_t\beta$$

であるから攪乱項は不均一である。そこでまず古典的最小自乗法によって$\hat{y}_t=E\hat{y}_t$を求め、これを用いて攪乱項の分散共分散行列Ω_*の対角要素として$\hat{y}_t(1-\hat{y}_t)$を用いることによって計算できる。しかしなおやっかいなことは$\hat{y}_t$は本来0と1との間になければならないが、推定値として1以上、あるいは0以下の値が生じることが

ある。そこでこれをさけるために特殊な工夫が必要となるが、ここではその考え方は示されているが計算方法の詳細は示されていない。次に外部からの情報によって、回帰係数の一部の値がわかっている時や、一部の不偏推定値がわかっている時はそれらの情報を利用して残りの係数を求めれば、情報を利用しなかったときの推定量に比べて有効度の高いものをうる。しかしこの一般化された最小自乗法を用いる場合でも外部情報をいかにして得るかという問題があり、これは古典的最小自乗法に頼るという結果になる。従って最小自乗法を拡張しようとするときは、何等かの仮定がおかれるわけで、この当否についてもあらかじめ考えておかなければならないわけである。論議は更にXが確率変数の場合から同時推定へと進んでゆくが、全体の紙数の関係もあってか、チントナー等に比べると例題の数が少なく、この点やや初学者にとりつきにくい感じをあたえるので、もう少し各章節に実例がほしかったところである。