Title	人口の発展潜在力
Sub Title	Measurements of the potential of population growth
Author	安川, 正彬
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1964
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.57, No.9 (1964. 9) ,p.681(1)- 705(25)
JaLC DOI	10.14991/001.19640901-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19640901-0001

新刊紹介

人口の発展潜在力

安川正彬

一、はしがき

経済発展にともなう人口の進化過程は、すでに人口学者のあいだで研究が進められ、西欧先進諸国の経験にもとづいて、人口進化のパターンがつくられている。『人口転換』(demographic transition) として知られる経験法則がそれである。

『人口転換』を模型的に説明すると、まず出生率・死亡率がともに高い水準で均衡している状態から、経済が発展にむかうある必要な刺激が加えられ、take-off を開始すると、死亡率は減少しはじめるが、出生率は以前とかわらず、これまでの

高い水準を維持しているので、人口は急速に増加しはじめ、やがて最高の人口成長率に達する。さらに経済が持続して発展を続けると、死亡率は可能な最低限に接近し、出生率はそのあとを追い、ラグをともなって急速に減退しはじめる。そこで人口成長率が緩慢になり、やがて人口の停滞とともに経済も停滞状態に突入する、というのである。(1)

西欧諸国が人口転換を経験したのは一九世紀末からのことで、新マルサス主義（産児制限）運動が展開されてからのことになるが、その頃から徐々に出生力の減退傾向は西欧諸国を席巻した。とくに第一次大戦以後、出生率の減退傾向は加速度を加え、人口は年々の死亡に対する出生の超過によって自然増加を保ってはいたが、実際には自己の単純再生産力すらも失いかけていたのである。この事実に直面して、人口潜在力（population potential）を如何に把捉するかの課題は当時の人口学者のあいだに関心をよびおこし、人口再生産力理論の焦点は、その測定方法に集中した。すなわち、出生力（年齢別特殊出生率）と死亡秩序（年齢別特殊死亡率）が同じでも、普通出生率と普通死亡率は人口の年齢分布によって支配されることを知ると、出生率・死亡率・年齢分布の三要因を標準化して、人口の発展潜在力を把捉する努力が払われたのである。一九二〇年代の後半になって、その成果はクチンスキー（Kuczynski, R. R.）の純再生産率の理論やダブリン＝ロトカ（Dublin, L.I.-Lotka, A.J.）の安定人口構造理論となってあらわれた。(2)

他方に経済の面では同じころに出生力の減退は一九三〇年代の不況に拍車をかけ、ついにケインズ『一般理論』（一九三六年）の出現をみるにいたった。このような事情にあった人口と経済の近密な関係は、ひきつづいて「長期停滞論」（ハンセン、一九三九年）をうみ、さらに一九五〇年代にいたり「経済成長理論」（ハロッド＝ロビンソン）に発展し、経済学は人口成長を要請した。そして長期停滞打開の政策的努力は、やがて低開発国の開発問題にまで進展するにいたったのである。

このような背景のもとにあった人口潜在力の測定方法に関する研究がどのように展開されてきたか、ここにその系譜をたどることにしよう。

（1）安川正彬「わが国一八九〇—一九二〇年の出生数と総出生率（General Fertility Rate）の推計——『人口転換』法則との関連によせて——」三田学会雑誌第五五巻第五号、一九六二年、一～四ページ参照。
（2）本稿、第三、四節参照。

二、出生率・死亡率の標準化

人口の自然増加は出生と死亡の差にもとめられるが、自然増加は同じでも、それが出生・死亡のともに高い水準によることもあれば、出生・死亡のともに低い水準によってもたらされることもある。さらに分解すると、出生は妊孕年齢（15～49歳）にある婦人の出生力（年齢別特殊出生率）に存しており、死亡は死亡秩序（年齢別特殊死亡率）に依存するが、これらの外に、いずれも人口の年齢分布に支配される。すなわち、妊孕年齢の婦人が多ければ出生は多くなるであろうし、老年者とか乳幼児が多ければ死亡は高くなるであろう。他の事情がひとしければこのことは正しい。こうした事実はまさに出生・死亡がともに年齢分布の如何に左右されることを物語っている。したがって、人口の発展潜在力を把捉するのに、年々の出生・死亡の差をもとめた自然増加は真相を隠してしまうので合理的でない。そこで適当な年齢分布によって出生率・死亡率を標準化してこそ潜在力としての真の人口増加力を知ることができる。標準人口となる年齢分布はこの理論が成立した過程を顧みるとき、つぎの三つに分けることができる。任意人口・静止人口・安定人口の三つの年齢分布がそれらである。(3)

（3）本稿、第四節参照。

1、任意標準化

出生率の標準化についてはニューショルム（Newsholme, A.）とスティブンスン（Stevenson, T.H.C.）が共同して発表した方法がある。(4) これを標準化出生率（standardized birth-rate）とよぶ。死亡率の標準化についてはニューショルムが単独で発表し

た。(5) これを標準化死亡率（standardized death-rate）とよぶ。

まず出生率の標準化をしめすと、出産に直接関係するのは妊孕年齢にある婦人であるから、出生については婦人人口をとりあつかう。

直接法

いま、これから標準化しようとする実際人口について、妊孕年齢にある婦人の出生力（年齢別特殊出生率）を f_x とする。つぎに標準人口について妊孕年齢にある婦人の年齢別人口を $\dot{F}_x$ とすれば、与えられた実際人口が標準人口の年齢分布をもつときに現われる出生総数は $\sum f_x\dot{F}_x$ にひとしい。ここで標準人口の総数（男女とも）を $\sum\dot{P}_x$ とすれば、あたえられた人口が標準人口の年齢分布をもつときに現われる普通出生率、すなわち標準化出生率はつぎのようにしめされる。

$$標準化出生率=\frac{\sum f_x\dot{F}_x}{\sum\dot{P}_x}$$

間接法

出生率の標準化をおこなうとき、統計資料の制約のために、実際人口について、年齢分布はわかっているが、出生力（年齢別特殊出生率）がえられない、ということがある。このようなときは、直接法で標準化することができないから、それに代わる間接法を用いる。

標準人口についての記号は、妊孕期間にある婦人の年齢別特殊出生率を $\dot{f}_x$、同期間にある婦人人口を $\dot{F}_x$、年齢別人口（男女とも）を $\dot{P}_x$ とする。まず、標準人口の普通出生率（標準出生率 standard birth-rate）はつぎのようにしめされる。

$$標準出生率=\frac{\sum\dot{f}_x\dot{F}_x}{\sum\dot{P}_x}$$

つぎに実際人口が、標準人口の出生力をもつと仮定したときの普通出生率を指標出生率（index birth-rate）とする。

$$指標出生率=\frac{\sum\dot{f}_xF_x}{\sum P_x}$$

そこで、実際人口の普通出生率（crude birth-rate）を標準化するのに、ここに算出した標準出生率と指標出生率の比率を標準化係数（standardizing factor）とし、これによって補正する。すなわち、

$$標準化出生率=(実際人口の普通出生率)\times(標準化係数)$$

$$ここで、\quad 標準化係数=(標準出生率)/(指標出生率)$$

つぎに死亡率の標準化について述べよう。これも出生率と考え方は同じであって、直接法と間接法の別があるが、死亡は出生のときのように婦人にかぎる必要はないから簡単である。

直接法

いま実際人口の死亡秩序（年齢別特殊死亡率）を m_x とする。まえの記号の約束をそのまま使えば、実際人口が標準人口の年齢分布をもったときの死亡総数は $\sum m_x\dot{P}_x$ である。これを標準人口の総数 $\sum\dot{P}_x$ で割れば、死亡率が標準化される。

$$標準化死亡率=\frac{\sum m_x\dot{P}_x}{\sum\dot{P}_x}$$

間接法

出生率標準化のときと同様に、統計資料の制約があるため、実際人口の年齢分布はえられるが、死亡秩序（年齢別特殊死亡率）が不明のときに使われる。

いま標準人口の年齢別特殊死亡率を $\dot{m}_x$ とすれば、標準人口の普通死亡率（標準死亡率 standard death-rate）はつぎのよう

にしめされる。

$$標準死亡率=\frac{\sum m_x\dot{P}_x}{\sum\dot{P}_x}$$

つぎに実際人口が、標準人口の死亡秩序をもつと仮定したときの普通死亡率を指標死亡率（index death-rate）とする。

$$指標死亡率=\frac{\sum \dot{m}_x P_x}{\sum P_x}$$

そこで、実際人口の普通死亡率を標準化するのに、ここに算出した標準死亡率と指標死亡率の比率を標準化係数とし、これによって補正する。すなわち、

標準化死亡率＝（実際人口の普通死亡率）×（標準化係数）

ここで、　標準化係数＝（標準死亡率）/（指標死亡率）

これらの標準化法の基本は、統計学における加重平均の考え方にひとしい。わかりやすい例として死亡率の標準化をとりあげてみよう。死亡率の標準化とは、年齢別死亡率の平均をもとめるのに、ウェイトとなる年齢分布に、実際人口が選ばれれば、そのとき現実の普通死亡率が計算される。またもし、任意の標準人口が選ばれれば、そのとき標準化死亡率がもとめられるわけである。出生率の標準化についても、この考え方は全く同じである。出生率・死亡率の標準化の直接法とはこの加重平均の考え方がそのまま使われている。

間接法とは標準化係数を媒介として、実際人口の普通出生率（または普通死亡率）を標準化する点に特徴がある。直接法に代わる便法であって、ひとたび標準化係数が算定されると、実際人口の年齢分布に激変がなければ、近似的正確さをもって数年間の使用に耐えられる。

この人口標準化の方法には標準人口の選択が自由であるから、特定の人口と比較対照する標準化の外には客観性がない。このことが、この方法に関する理論的欠陥である。

（4） A. Newsholme and T.H.C. Stevenson, An Improved Method of Calculating Birth-rates, 1905.

（5） A. Newsholme, The Elements of Vital Statistics, new ed., 1923.

2　静止人口の標準化

以上の標準化法では標準人口を任意に選んだが、これを静止人口にもとめれば、そのとき、人口の標準化に客観性をあたえることができる。ここで、静止人口とは実際人口の死亡秩序（年齢別特殊死亡率）があたえられたとき、その死亡秩序にしたがい、0歳人口が年齢の推移とともに減少して、やがて死滅するまでの経過をたどる年齢分布をもった人口をいう。静止人口の組立てに使われる死亡秩序 m_x は年の中央時の死亡率として年齢別に計算されるが、死亡が年初（一月一日）に一時に発生するものと仮定し、そのときの死亡秩序 q_x をもとにして、0歳人口（一〇万人と仮定）が年齢とともに減少していく経過をまとめれば、その統計表が外ならぬ生命表である。そこで標準人口として静止人口を選定するとき、死亡率の標準化については生命表の年齢分布によって合理的に標準化することができる。

いま実際人口の死亡秩序を m_x、それによって計算された静止人口の年齢別人口を L_x とすれば、静止人口による死亡率の標準化はつぎの式でしめされる。これを純粋死亡率（bereinigte Sterbeziffer）とよぶ。

$$純粋死亡率=\frac{\sum m_x L_x}{\sum L_x}$$

ここで $\sum m_x L_x=\sum q_x l_x$（年齢別死亡数を d_x とすれば、$m_x=d_x/L_x$, $q_x=d_x/l_x$ であるから）である。分母については、原理として静止人口の L_x は生命表の l_x におきかえることが可能であるから、右の式は静止人口と生命表の性質（出生数＝死亡総数）を利

用して、つぎのように変形することができる。

$$純粋死亡率=\frac{\sum q_x l_x}{\sum l_x}=\frac{l_0}{\sum l_x}\quad〔なぜなら、\sum q_x l_x=\sum d_x,\ \sum d_x=l_0〕$$

この手法を出生率にも応用すれば純粋出生率（bereinigte Geburtenziffer）がえられる。いま、出産に直接関係するのは婦人であるから、生命表の婦人の生存数をl'_xとし、妊孕年齢婦人の出生力をf_xとすれば、静止人口による出生率の標準化である純粋出生率はつぎのようにしめすことができる。

$$純粋出生率=\frac{\sum f_x l'_x}{\sum l_x}$$

三、人口の再生産

人口の再生産とはつぎのように考えられる。現実の人口は絶えず新陳代謝しているが、いまここにどれだけの出生があれば、現在の人口がつぎの世代に充分おきかえられるか、という世代の交替をそれは意味している。換言すれば、現在の出生力と死亡秩序がそのまま持続するとき、つぎの世代に人口が増加するか減少するかを比較することである。もしつぎの世代に人口が増加すれば拡大再生産であるし、減少すれば縮小再生産である。

ここに〝現在の出生力と死亡秩序がそのまま持続するとき〟という仮定の意味は〝ある同時出生集団（cohort）がたどる人生行路が、現在の０歳から一〇〇歳までの出生力と死亡秩序のままにしたがうと仮定すれば〟ということである。したがって、人口がつぎの世代に増減する実際の姿を測るのではなく、人口がつぎの世代に増加しうる（あるいは減少するかもしれない）潜在力 potential を測るのである。

さて、ここで人口再生産の実際についての検討からはじめよう。人口再生産の実際はつぎの三段階に分けられる。合計特殊出生率（total fertility rate, T.F.R.）、粗再生産率（gross reproduction rate, G.R.R.）、純再生産率（net reproduction rate, N.R.R.）の三つがそれらである。(6) まず、合計特殊出生率とは年齢別特殊出生率（出生力）の合計$\sum f^x$である。これは一〇〇〇人の婦人と、彼女らが生涯に（実際には妊孕期間に）生む子供の数との比率をしめす。つぎに、再生産の問題は一〇〇〇人の婦人が生涯に生む女児数を知ることによって満たされるから、合計特殊出生率を出生性比（日本では通常女一〇〇対男一〇五）によって按分し、一〇〇〇人の婦人と、彼女らが生涯に生む女児数との比率をとれば、これが粗再生産率$\sum f'^x$である。(7) さらに、母が生んだ年齢に達するまで子供が生き残って、はじめて新しい世代に置き換わるのであるから、一〇〇〇人の婦人が妊孕期間の各年齢で女児を生む年齢別特殊出生率f'_xに、当該各年齢までの生残率l_x/l_0を乗じて合計すれば$\left(\sum f'_x\cdot\frac{l'_x}{l_0}\right)$、これこそがクチンスキイ（kuczynski, R.R.）の純再生産率$R=\frac{\sum f'_x l'_x}{l_0}$である。(8)

この式で、$\sum f_x l'_x$は生命表の年齢分布を仮定した出生数であり、l_0は同じ仮定のもとでの死亡総数である。したがって一世代について死亡を補うだけの出生力があれば出生数は死亡数に等しい（$\sum f_x l'_x=l_0$）から純再生産率の値は$R=1$である。同様に$\sum f_x l'_x \gtrless l_0$にしたがって$R>1$のとき拡大再生産をしめし、$R<1$のとき縮小再生産を意味する。(9)

（6）ここで訳語のことに触れたい。三つの人口再生産率のうち、はじめの二つについて本節で用いた術語は通常のものではない。とくにＧＲＲは、ここで粗再生産率と訳したが、通常は総再生産率が使われている。これは一九三〇年代に人口再生産率の概念が導入されたときに使われた訳語がそのまま踏襲されてきたからとおもうが、こんにちのように学問の進展が、術語の数をふやし、それぞれの概念も明確に決められてくると、過去の訳語では新しい明確な定義に適さないばあいが生じよう。

いまここにとりあげた gross と net という言葉は、たとえば、こんにち、経済学用語で gross investment は粗投資、net investment は純投資と訳されている。投資概念に資本消費 capital consumption を加えるか否かによって、二つの投資が使いわけられている。総投資＝純投資＋資本消費　である。

経済学のこの概念とひとしく、人口学においても、NRRはこれまでどおり純再生産率が適切であるのに対して、GRRは粗再生産率がよい。なぜなら、生まれた女児が、彼女を生んでくれた母の年齢まで生き残る割合（生残率）を考慮するか否かによって、GRRとNRRとが区別されている。すなわち、

$$\mathrm{N.R.R.}=\sum\Big[\underbrace{f_x}_{\mathrm{G.R.R.}}\times\underbrace{\frac{l_x}{l_0}}_{\text{生残率}}\Big]$$

でしめされている。投資のばあいも、再生産率のばあいも、ある不純物がふくまれている概念には gross という文字があてられ、不純物を取り除いて純粋になったとき net という文字がつけられている。このとき gross は〝粗〟という訳語が適切であって、〝総〟という文字は gross の訳語としては適切でないとおもう。

さらに合計特殊出生率についてのべよう。妊孕年齢婦人の年齢別特殊出生率を合計したものを total fertility rate といい、これを合計特殊出生率と訳している。これは適切である。しかし、他にこれは〝粗再生産率〟とも訳されている。ここに〝粗〟という文字が当てられたのは、男女児混みの出生率が計算されているからである。人口の再生産とは出産に直接関係のある婦人が何人の女児によってつぎの世代に自らを置き換えるかを問題にするから、男児は〝不純物〟扱いされたのだろうが、この際の男児は不純物であるよりも、〝異質物〟と解するのが適当であろう。total fertility rate という術語には再生産という意味の語はどこにもふくまれていないのである。

(7) 三つの人口再生産率のうち、合計特殊出生率と粗再生産率の二つは人口増加の潜在力を測定するのに用いられるよりも、〝将来人口の推計〟に用いられて、はじめて真価を発揮する。ここでそのことに触れておこう。

将来人口推計の優れた方法としては、まず将来人口を説明する生命表を推算作成する仕事が第一である。基準人口の年齢分布はセンサスによって与えられるから、ここに推算した将来生命表から生残率の系列をセットすれば、現在人口が将来にむかって生き残っていく姿は確たる正確さをもって推計することが可能である。これと併せて、第二の仕事として毎年の出生数の推計が高度の正確さを保つことができれば、おそらく、この方法の適用可能な推計期間について結果の信頼度は非常に高い。この第二の仕事である毎年の出生数を推計する方法には、まず時系列による出生力の延長推算をおこない、それと、他から推計される妊孕年齢婦人の年齢分布とによって出生数の推計が可能になる。

推計期間の期末人口について、出生時の平均余命がいくらになるか、また合計特殊出生率がどれだけになるかを予測するのに、経済社会の発展の予想とともに、その目標にむかっての人口変化の動向を先進諸国の経験に照らして、わが国の社会的背景を加味して決めるのである。この二つの基本要因が決まれば、期末年次に達するまでの経過は、時点をひとしくする出生力を積み累ねれば、各時点の合計特殊出生率がもとめられる。またもし出生を女児にかぎれば粗再生産率がもとめられる。このような過程を経て近い将来の人口推計をおこなうのが今日の最もすぐれた方法であろう。

(8) R. R. Kuczynski, The Balance of Births and Deaths, Western and Northen Europe, Vol. 1, 1928; Fertility and Reproduction, Methods of Measuring the Balance of Births and Deaths, 1932.; The Measurement of Population Growth, London, 1935.

(9) 純再生産率が第四節で述べる安定増加率と比較されるとき、解釈のうえで学者間にひとつの混乱が生じた。それは純再生産率をとり扱うときの年齢分布が生命表に依存するため、静止人口を仮定しているという解釈である。純再生産率は $R=\frac{\sum f_x l_x}{l_0}$ でしめされるから、前節で論じた純粋出生率と純粋死亡率との比率によってあらわされる。純粋出生率と純粋死亡率はともに静止人口によって標準化したから、両者の比率をとった純再生産率も基礎に静止人口が仮定されている。

このように論理を進めるとつぎのような解釈がなされる。すなわち、現実の出生率・死亡率を標準化するとき、死亡率については、実際の死亡秩序から組立てられた静止人口を標準人口に選ぶのは、そこに矛盾はないが（純粋死亡率）、出生率については現実の出生力と静止人口とは何んの関係もない。したがって出生率について、静止人口による標準化は（純粋出生率）、静止人口を任意に選んだということであっても、現実の出生力から組立てられた年齢分布ではないから、そこには客観性がない。それどころか、純再生産率によって人口の発展潜在力を測ろうとするのは、静止と仮定した人口の潜在力を測るのであるから、これは明らかに論理に矛盾する、というのである。以上については、森田優三『人口増加の分析』（一九四四年）一七二—四ページ参照。

純再生産率が世代間の比較を無視して一時点での横断面の標準化を試みているのであれば、確かに矛盾した論理であるといわなければならないが、純再生産率は一世代にわたる人口の増減について、その潜在力を測るのであるから、同時出生集団がその後にたどる人生が現在の死亡秩序にしたがうと仮定しても、そこに論理として矛盾はない。したがって純再生産率のもつ意味をこのように一世代にわたる潜在力と解釈するかぎり論理的に欠陥はない。

純再生産率の解釈について、世代間の潜在力と静止人口を仮定した潜在力との区別を明確にしたのは、邦文文献では、館稔『人口分析の方法』（一九六三年）が初めてであろう。

四、安定人口の構造

人口の標準化に選ばれる標準人口は、現実の出生力と死亡秩序が持続するとき、そこに組立てられる人口であることが望ましい。前節で述べたように、現実の死亡秩序のみがこの条件を満たすとき、そこに静止人口が導かれた。しかし、静止人口は現実の出生力とは何んの関係もない。このことが静止人口による標準化の理論的欠陥であった。この問題を解決したのはロトカ（Lotka, A. J.）である。われわれはここで彼の安定人口の命題に眼をむけなければならない。ロトカはシャープ（Sharpe, F.R.）の協力をえて安定人口の命題を論証し[10]、のちにダブリンの援けをえてこれを解き、実際への応用を試みた[11]。

安定人口に関するロトカの命題とは、移住のない閉鎖人口のもとで、実際の出生力と死亡秩序がともにそのまま持続するとき、はじめの年齢分布のゆがみが消えて安定した年齢分布をもつにいたる。そのとき普通出生率・普通死亡率も安定し、したがって自然増加率も安定する。これを安定人口という。安定人口は自然増加率が安定するのであるから、静止人口と異なり、一定の増加率をもって増加する人口である。

ここで安定人口の構造を表わす関係式を誘導しよう。いま時点t、年齢x、総人口P、年齢分布係数C_x、出生数B、x歳生残率l_x（ただし$l_0=1$）として安定人口の性質をまとめてみよう。まずこれらの記号にしたがって、年齢分布係数はつぎのようにしめされる。

(1) $$C_x=\frac{B_{t-x}}{P_t}l_x$$

安定人口は一定の増加率rをもって幾何級数的に増加するから、時点tとそれよりx年前との人口の間には複利法則にしたがって$P_t=P_{t-x}e^{rx}$という関係が成りたつから、つぎの関係式が導かれる。

(2) $$B_{t-x}=bP_{t-x}=bP_te^{-rx}$$ 〔ただし、bは安定人口出生率〕

(1)式と(2)式から安定人口の年齢分布をしめすつぎの公式がえられる。

(3) $$C_x=be^{-rx}l_x\text{……(i)}$$

この式は時間の要素tをふくんでいないから、C_xは時間にかかわりなく一定である。またこの公式を年齢のすべてにわたって積分すれば、C_xの総和は1にひとしいから、つぎの公式がえられる。

$$\int_0^\omega C_xdx=1=b\int_0^\omega e^{-rx}l_xdx$$

(4) $$\frac{1}{b}=\int_0^\omega e^{-rx}l_xdx\text{……(ii)}$$

(i)(ii)式で未知数は増加率r、出生率bと年齢分布係数C_xであるから、これらの未知数を決定するにはもう一つの方程式が必要である。

出生時の性比はほぼ恒常であるから、(i)(ii)式の誘導は男女別にも適用することができる。いま二式ともすべて婦人人口についての記号とし、(i)式の両辺にP_t^fを乗ずれば、時点tの年齢別婦人人口は$C_xP_t^f=bP_t^fe^{-rx}l_x$である。さらに年齢別に婦人の女児出生率を$f_x^f$とすれば、安定人口における時点$t$の女児出生数$B_t^f$はつぎの式でしめされる。

(5) $$P_t\int_0^\omega C_xf_xdx=B_t=bP_t\int_0^\omega e^{-rx}l_xf_xdx$$

ここで、$B_t=bP_t$であるから、これからつぎの重要な方程式が導かれる。

(6) $$1=\int_0^\omega e^{-rx}l_xf_xdx\text{……(iii)}$$

(iii)式からは単独に安定増加率 r がもとめられる。その結果と(ii)式から安定出生率 b が決まる。さらに r b の値から(i)式によって安定年齢分布係数 C_x が決められる。したがって公式(i)(ii)(iii)によって安定人口の性質のすべてが規定されるので、ロトカはこれら三つの公式を安定人口の人口学的函数[12]（demographic functions）と名づけた。[13]

人口の発展潜在力を把握するのに、安定人口による標準化は最も合理的である。それは実際人口の出生力と死亡秩序が持続するとき、はじめの年齢分布のゆがみが消えた極限人口として安定人口がなりたつから、標準人口として年齢分布が出生と死亡のいずれにも矛盾がないからである。

ここで安定増加率と純再生産率との関係を考察しよう。安定増加率をしめす(iii)式の e^{-rx} をテイラーの公式で展開するとつぎのようになる。

$$(7)\qquad 1=\int_0^{\omega} e^{-rx} l_x f_x\,dx=\int_0^{\omega} l_x f_x\left(1-rx+\frac{r^2x^2}{2}-\frac{r^3x^3}{6}+\cdots\cdots\right)dx$$

安定増加率 r が極めて小さければ、この式の第3項以下を省略しても差支えない。

$$1=\int_0^{\omega} l_x f_x(1-rx)\,dx=\int_0^{\omega} l_x f_x\,dx-r\int_0^{\omega} x l_x f_x\,dx$$

ここで、

$$R_0=\int_0^{\omega} l_x f_x\,dx$$

$$R_1=\int_0^{\omega} x l_x f_x\,dx$$

とおけば、つぎのようにしめされる。

$$1=R_0\left(1-r\frac{R_1}{R_0}\right)$$

となる。r は極めて小さいのであるから、この式はさらにつぎのように変形することができる。

$$R_0=1+r\frac{R_1}{R_0}$$

したがって、

$$(8)\qquad \therefore\ R_0=(1+r)^{\frac{R_1}{R_0}}$$

$$(9)\qquad r=\sqrt[\frac{R_1}{R_0}]{R_0}-1$$

この $\frac{R_1}{R_0}$ は出生時の母の平均年齢をしめしている。したがってこれは一世代の長さを平均的にあらわしたことを意味する。R_0 は純再生産率であるから、安定増加率 r と純再生産率の間にはつぎの関係が成りたつ。すなわち、純再生産率は一世代を期間とした増加率であり、安定増加率は年々の増加率であるから、純再生産率は安定増加率をほぼ一世代（$\frac{R_1}{R_0}$ 年間）にわたって複利計算したものに相当する。

しかし、ここで、

$$\frac{R_1}{R_0}=\frac{\int_0^{\omega} x l_x f_x\,dx}{\int_0^{\omega} l_x f_x\,dx}$$

は出生時の母の平均年齢をしめすことをのべたが、これは母の年齢 x を女児出生数 $l_x f_x$ で加重した平均であるから、年齢分布 l_x は静止人口のそれであり、したがって $\frac{R_1}{R_0}$ は静止人口における母の平均年齢をしめしている。これは(7)式で第3項

以下を省略したことに起因している。そこで、もとの体系にもどし、安定人口における母の平均年齢Aをもとめるとつぎのように展開される。

$$\text{(10)}\qquad A=\int_0^w xe^{-rx}l_xf_xdx\Big/\int_0^w e^{-rx}l_xf_xdx$$

この分母の値は(iii)式によって1にひとしいが、分母子ともに e^{-rx} を展開して割算すると、

$$\text{(11)}\qquad A=\alpha+\beta r+\gamma r^2+\delta r^3+\cdots\cdots$$

ここに

$$\alpha=\frac{R_1}{R_0}$$

$$\beta=\alpha^2-\frac{R_2}{R_0}$$

$$\gamma=\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha\frac{R_2}{R_0}+\frac{1}{2}\frac{R_3}{R_0}$$

$$\delta=\alpha^4-2\alpha^2\frac{R_2}{R_0}-\frac{2}{3}\alpha\frac{R_3}{R_0}+\frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_0}-\frac{1}{6}\frac{R_4}{R_0}$$

［ただし、一般に $R_n=\int_0^w x^n l_xf_xdx$ をあらわす］

となる。(11)式で第3項以下は極めて小さい値になるから省略して差支えない。ここで $\alpha=\frac{R_1}{R_0}$ であったから、静止人口における母の平均年齢 α と、安定人口における母の平均年齢（$A=\alpha+\beta r$）とを知ることができた。

さてこれからロトカが誘導した安定人口の世代間隔（一世代の長さ）をもとめることにしよう。

いま(iii)式というのは、安定人口の性質があたえられて、したがって、r が安定増加率をしめすとき1にひとしいが、r の他の値に対して(iii)式は1にひとしくないから、(iii)式の値を一般化して y とし、r の函数として微分するとつぎのように展開される。

$$\text{(12)}\qquad y=\int_0^w e^{-rx}l_xf_xdx$$

$$\text{(13)}\qquad \frac{dy}{dr}=-\int_0^w xe^{-rx}l_xf_xdx.$$

$$=-A\int_0^w e^{-rx}l_xf_xdx$$

$$=-Ay$$

そこで、これを積分する。

$$\text{(14)}\qquad y=y_0e^{-\int Adr}$$

ここで y_0 は $r=0$ なるときの y の値であるから、

$$\text{(15)}\qquad y_0=\int_0^w l_xf_xdx$$

である。これは純再生産率であるから R_0 であらわす。そして、ここでの操作は(iii)式が1にひとしくなる r をみつけることにあるから、$y=1$ とすれば、(14)式はつぎのように変形される。

$$1=R_0e^{-\int Adr}$$

$$\text{(16)}\qquad R_0=e^{\int Adr}$$

したがって、ここで $\int A dr$ の値を決めなければならないが、⑾式より（第3項以下省略）

$$A=\alpha+\beta r \qquad \therefore \int A dr=\alpha r+\frac{1}{2}\beta r^2$$

が導かれる。これと⒃式からつぎの式が誘導される。

⒄ $$R_0=e^{r(\alpha+\frac{1}{2}\beta r)}$$

⒅ $$\frac{1}{2}\beta r^2+\alpha r-l_n R_0=0 \quad \text{[ただし、} l_n \text{は自然対数]}$$

⒆ $$r=\frac{1}{\beta}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\beta l_n R_0}\right)$$

これらの三式⒄⒅⒆がロトカの誘導式である。また⒄式より安定人口の世代間隔はつぎの式でしめされる。

⒇ $$T=\alpha+\frac{1}{2}\beta r$$

したがって純再生産率と安定増加率の関係は、正しくはつぎのようにしめされる。

$$R_0=(1+r)^T \quad \text{または} \quad r=\sqrt[T]{R_0}-1 \quad \left[\text{ただし、} T=\alpha+\frac{1}{2}\beta r\right]$$

なお、ここで誘導した安定人口の世代間隔Tは、すでにしめした静止人口による母の平均年齢 α と、安定人口による母の平均年齢（$A=\alpha+\beta r$）の二つの平均にひとしい$\left(T=\alpha+\frac{1}{2}\beta r\right)$。

以上のように、(iii)式から安定増加率 r がもとめられるから、この r と(ii)式とから安定出生率 b を算定することができる。そして、人口学的函数の三つの式から、

$$b=\frac{\int_0^w e^{-rx} l_x f_x dx}{\int_0^w e^{-rx} l_x dx}$$

$$b=\frac{\int_0^w C_x f_x dx}{\int_0^w C_x dx}$$

と変形されるから、これから明らかなように、b は安定人口の年齢分布で出生力 f_x を標準化した出生率である。安定死亡率はこれを d とすれば、$d=b-r$ によってもとめることができる。この d は当然に安定人口の年齢分布によって標準化された死亡率である。また(i)(ii)式を解いて安定人口の年齢分布 C_x が導出される。(14)

（10） F. R. Sharpe and A. J. Lotka, "A problem in age-distribution", Philosophical Magazin, Vol. 21, 1911.
（11） L. I. Dublin and A. J. Lotka, "On the true rate of natural increase as exemplified by the population of the United States, 1920", Journal of the American Statistical Association, Vol. XX, No. 150, Sept., 1925.
（12） 静止人口の構造はロトカの人口学的函数を $r=0$ とおくことによってすべてが表現される。

(i) $C_x=bl_x$ (ii) $\frac{1}{b}=\int_0^w l_x dx$ (iii) $1=\int_0^w l_x f_x dx$

（13） A. J. Lotka, Elements of Physical Biology, Baltimore, 1925.
（14） ロトカの命題の証明は森田優三、前掲書、一八四―一九〇ページを参照せよ。

付録　安定増加率の簡便計算 ――コールの方法――

安定増加率 r の計算法はロトカの第3公式（iii)式）を展開し、純再生産率 R_0 との関係をもとめた⒆式からもとめるのであるが、結果には近似的正確さで許し、計算の煩雑さを考慮するとき⑼式からもとめることができる。そして計算はかなり

簡単になる。(9)式と(19)式のちがいは安定増加率 r と純再生産率 R_0 の関係式、

$$r = \sqrt[T]{R_0} - 1$$

の r の値、すなわち一世代の長さに何を選ぶかによって異なる。(19)式は安定人口の一世代の長さ $T=\alpha+\frac{1}{2}\beta r$ を用いたものであり、(9)式は静止人口の一世代の長さ $\alpha=R_1/R_0$ を用いたものである。技術的には、ロトカの第3公式(iii)の e^{-rx} を展開したとき、第3項までとるか（(19)式のばあい）、第2項で打ち切るか（(9)式のばあい）によるちがいである。二つの世代の長さを比較してわかるように、安定増加率 r の値の大小が二つの計算値のちがいの大小に影響する。すなわち、r の値が極めて小さいとき二つの計算結果の近似度は高いが、r が大きくなると双方の計算結果の開きは顕著になる。

そこでコール（Coale, A.J.）は(18)式のような二次方程式を解かないで、r をもとめるのに極めて近似度の高い簡便計算法を考案した。ここにそれを紹介しよう。[15]

まず基本的にはつぎの二つの関係式を展開することからはじめられる。

$$\begin{cases} \text{(iii)} \quad 1=\int_0^{\omega} e^{-rx} l_x f_x dx \\ \text{(21)} \quad R_0 = e^{rT} \qquad \text{〔T は安定人口の平均世代間隔〕} \end{cases}$$

(21)式より、

$$r = \frac{\log_e R_0}{T} \tag{22}$$

がえられる。Tは約29年の平均値をもつことが知られているので、(22)式にそれを用い、そのときの r を r_1 とする。

$$r_1 = \frac{\log_e R_0}{29} \tag{23}$$

もし $\Delta r = r_1 - r$ が0でなければ、(iii)式はつぎのようにしめされる。

$$\int_0^{\omega} e^{-r_1 x} l_x f_x dx = 1+\delta \tag{24}$$

ここで、

$$\begin{cases} y=\int_0^{\omega} e^{-rx} l_x f_x dx & (12) \\ \dfrac{dy}{dr} = -\int_0^{\omega} x e^{-rx} l_x f_x dx & (13) \\ \quad = -Ay & \text{〔ただし、A は(10)式〕} \end{cases}$$

ところで $r=r_0$〔ここで、r_0 は(iii)式の実根〕のとき、$y=1$ から、

$$\left(\frac{dy}{dr}\right)_{r=r_0} = -A \tag{25}$$

したがって(25)式より、

$$\frac{\Delta y}{\Delta r} = -A$$

$$\therefore \quad \delta = -A\Delta r \qquad \text{〔ただし、}\Delta y=\delta\text{〕} \tag{26}$$

(26)式より、

$$r = r_1 + \frac{\delta}{A} \tag{27}$$

がえられる。Aは安定人口の出生時の母の平均年齢であるから、ここに仮定した29年に若干の誤差を考慮した値である。出生時の平均年齢Aは r の値の如何によって平均世代間隔Tから離れる。しかし、その違いは最大限0,6年ぐらいのものである。

そこで29年はまたAのよき近似値である。そして(27)式のAをもとめるのに、Tとrの相対誤差が$\frac{\Delta T}{T} \doteqdot -\frac{\Delta r}{r}$である関係を考慮すると、$A=29-\frac{\delta}{r_1}$が導かれる。そこで(27)式はつぎの(28)式に変形される。

$$r=r_1+\frac{\delta}{29-\frac{\delta}{r_1}} \tag{28}$$

(23)(28)の二つの式によって安定増加率rを計算した結果は、厳密な(19)式による結果に極めてよく近似する。そして計算の簡略さは無類である。安定増加率rが導かれるときの基本となる理論的問題を網羅しているために近似度が高いのは当然である。また、ここに用いた29という数学にかわって、他の数字でも原理としては差支えないが、実際に計算を経験してみると、計算誤差をできるだけ小さくするためには経験的にすでにえられている安定人口の平均世代間隔に近い数値を選ぶのがよい。その意味では任意の数字でよいとはいえないだろう。コール氏の経験で、アメリカでは29年を選んだわけだが、日本の場合でも経験的に同じ29年がよい。

ここに計算例をしめそう。安定増加率rの値が大きいほど簡便法の真価が明示しやすい。その意味で、ここに日本のものよりもアメリカの資料で適当なものが手許にあるのでそれを紹介しよう。以下の計算例はプリンストン大学人口研究所(office of Population Research, Princeton University)に用意されているワークシートからまとめたものである。[16]

(15) Ansley J. Coale, "A New Method for Calculating Lotka's r—the Intrinsic Rate of Growth in a Stable Population," *Population Studies*, Vol. XI, No. 1, July 1957.

(16) 日本の資料での計算例は水島治夫『生命表の研究』(一九六三年)一六五—六ページをみよ。

I. Computation of Mean Length of Generation and Intrinsic Rate of Natural Increase: 1949~51, (Non-Whites)

Age of Females α	Central Age $\alpha+2.5=x$ (1)	Total Birth to Surviv. of 1000 Live Born (2)	Female Birth to Surviv. of 1000 Live Born = (2)×.49464 (3)	(1)・(3)/1000 (4)
15~19	17.5	746.3·	369.1·	6.45925·
20~24	22.5	1061.3·	525.0·	11.81250·
25~29	27.5	749.4·	370.7·	10.19425·
30~34	32.5	472.7·	233.8·	7.59850·
35~39	37.5	257.5·	127.4·	4.77750·
40~44	42.5	82.1·	40.6·	1.72550·
45~49	47.5	7.9·	3.9·	.18525·
		3377.2·	$R_0=1.6705\cdot$	$R_1=42.75275\cdot$

$R_1 \div R_0=25.5928\cdot=\text{Approx. } \tau$;

$r \text{ approx.}=\sqrt[\tau]{R_0}-1$;

$r \text{ approx.}=\sqrt[25.5928\cdot]{1.6705\cdot}-1$;

$\log 1.6705=.2228465\cdot$

$.2228465 \div 25.5928=.0087074\cdot$;

Anty log $.0087074=1.02025\cdot$;

$1.02025\cdot-1=.02025\cdot=r$

Approx. r in ‰ $=\underline{20.25}$

II. Computation of r by Using Formula Shown on Worksheets.

$$r=\frac{R_1/R_0-\sqrt{(R_1/R_0)^2-2[R_2/R_0-(R_1/R_0)^2]\times l_nR_0}}{(R_2/R_0)-(R_1/R_0)^2}; \qquad [l_n=\log_e]$$

$R_0=1.6705\cdot$ $\quad R_1 \div R_0=25.5928\cdot$; $\quad (R_1 \div R_0)^2=654.9914\cdot$;

$l_nR_0=.513123\cdot$;

$R_1=42.75275\cdot$

R_2=Sum by accumul. col. (4)×col. (1) on the worksheet.

$R_2=1167.4006\cdot$ $\qquad R_2 \div R_0=698.8330\cdot$

$$r=\frac{25.5928\cdot-\sqrt{654.9914\cdot-2(698.8330\cdot-654.9914\cdot)\times.513123\cdot}}{698.8330\cdot-654.9914\cdot=43.8416\cdot}$$

$$=(25.5928\cdot-\underbrace{\sqrt{654.9914\cdot-44.9923\cdot}}_{\sqrt{609.9991\cdot}=24.6982\cdot}) \div 43.8416\cdot=.8946\cdot \div 43.8416=.02041\cdot$$

r in ‰ $=\underline{20.41\cdot}$

III. Computation of r by Method of Prof. A. Coale;

$r = r_1 + \delta$ ·/. $(29 - \delta/r_1)$; where $r_1 = l_n R_0$ ·/. 29

r_1 = .513123· ·/. 29 = .017694·;

(1) x	(2) r_1x	(3) e^{-r_1x}	(4) (col. (3) on the worksheet.)	(5) (3)×(4)·/. 100
17.5	.3096·	.73374·	369.1·	
22.5	.3981·	.67159·	525.0·	
27.5	.4866·	.61471·	370.7·	Sum
32.5	.5751·	.56265·	233.8·	by
37.5	.6635·	.51505·	127.4·	Accumul.
42.5	.7520·	.47142·	40.6·	
47.5	.8405·	.43149·	3.9·	
			R_0 = 1.6705·	1.069269·

(δ = .069269; = 1.069269 − 1)

δ ·/. r_1 = 69.269· ·/. 17.694· = 3.915·;

29 − 3.915· = 25.085·

r = 17.694· + 69.269· ·/. 25.085· = 17.694· + 2.761· = 20.455·

IV. Method for Checking r;

1) Take Method I for Nonwhites, where r = 20.25·;

(1) x = Central Age of Fem.	(2) $r \times x$ .02025·×x	(3) e^{-rx}	(4) (col. (3) on the worksheet.)	(5) (3)×(4) (Should≅1.000)
17.5	.3544·	.70159·	.3691·	
22.5	.4556·	.63407·	.5250·	
27.5	.5569·	.57298·	.3707·	Sum
32.5	.6581·	.51783·	.2338·	by
37.5	.7594·	.46795·	.1274·	Accumul.
42.5	.8606·	.42291·	.0406·	
47.5	.9619·	.38217·	.0039·	
				1.00359·
				Δ = .00359·

2) Take Method II by Lotka's Formula, where r = 20.41·;

(1) x	(2) $r \times x$ .02041·×x	(3) e^{-rx}	(4) (col. (3) on the worksheet.)	(5) (3)×(4) (Should≅1.000)
17.5	.3572·	.70159·	.3691·	
22.5	.4556·	.63407·	.5250·	
27.5	.5569·	.57298·	.3707·	Sum
32.5	.6581·	.51783·	.2338·	by
37.5	.7594·	.46795·	.1274·	Accumul.
42.5	.8606·	.42291·	.0406·	
47.5	.9619·	.38217·	.0039·	
				.99963·
				Δ = −.00037·

3) Take A. Coale's Method III on the W.:ksheet, Where r = 20.455·;

(1) x	(2) $r \times x$ .020455·×x	(3) e^{-rx}	(4) (col. (3) on the worksh.)	(5) (3)×(4) (Should≅1.000)
17.5	.3580·	.69907·	.3691·	
22.5	.4602·	.63116·	.5250·	
27.5	.5625·	.56978·	.3707·	Sum
32.5	.6648·	.51438·	.2338·	by
37.5	.7671·	.46436·	.1274·	Accumul.
42.5	.8693·	.41924·	.0406·	
47.5	.9716·	.37848·	.0039·	
				.99852·
				Δ = −.00148·