Title	マルコフ連鎖としての立地過程
Sub Title	Locational process as a Markov chain
Author	高橋, 潤二郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1964
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.57, No.7/8 (1964. 8) ,p.560(40)- 577(57)
JaLC DOI	10.14991/001.19640801-0040
Abstract	
Notes	小島栄次教授追悼特集 論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19640801-0040

マルコフ連鎖としての立地過程

高橋潤二郎

（一）

いかなる立地問題も一定の地理的状況[1]のもとで提起され考察される。勿論、この地理的状況は自然そのものから成り立っているわけではなく、それと過去に於ける無数の立地行為の結果を組合せたものに他ならない。現実に於ける地理的状況は複雑なものであるから、立地行為に関する多くの理論的究明に於ては、あらかじめ特定の理論的状況を想定し、その中での立地行為を分析究明するという方法がとられている。チューネン、ウェーバー以降、著名な立地論者は、その多くが、夫々の分析に相応しい所で夫々独自の理論的空間―立地空間―を想定し、その中に於ける立地行為を分析してきた。いうまでもなく、この立地空間はモデルないし理論構成の場であるから現実の地理的空間に比して著しく単純化されている。即ち、分析のために必要と思われる一連の諸条件以外については複雑な現実の地理的状況を捨象してある。この立地空間は分析の目的、特に抽象化のレヴェルに従っていろいろに設定され得るであろう。立地論に於て抽象化は通常現実の地理的差異を捨象すること、換言すれば、種々な地点の同質化を意味するから、立地論に於ける分析の場である立地空間はあらかじめ分析のために重要であると思われる一連の諸条件以外については同質的であると想定されるのが普通である。只、この立地空間の一つの特徴は、これら一連の諸条件が通常既存の立地事実との関係に於てあたえられいることであろう。即ち、立地空間を規定する諸条件はその空間に既に位置を占めているいくつかの現象ないし活動の存在を仮定し、この結果としてあたえられると考えられるものが多いようである。これは、あらゆる現象をその地表上に占有している場所（点ないしエーリア）との関係に於て考察しようとする立地論の基本的立場から言って、至極当然なこととも考えられるが、同時に、すべての立地論的議論に於て暗々裡に仮想されている一つの前提にもとづくものである。その前提とは、すべての立地行為は常に一定の既存の立地事実によって影響される、或いは少なくとも、既存の立地事実を考慮してなされるということである。

いまこの点をあきらかにするために、完全に同質的な平面にある立地単位が位置を占める場合を仮想してみよう。この場合、平面上のいかなる点も相互に完全に同質的であり、したがって、位置選択に先立って考慮さるべき条件は何もないからその立地は平面上のいずれの点をとってもよい。極めて恣意的に行われるであろう。しかし、一度この立地が決定されたならば、この立地事実は次の立地単位の決定に何らかの形で影響をあたえるに相違ない。勿論、この影響は第一の単位と第二の単位との関係によって様々な形をとって現われるであろう。或る場合、第二の決定は第一の立地事実によってさしたる影響を受けないかも知れないし、又、受けるかも知れない。それは極めて不確定である。しかし、少なくとも、後者は前者の存在を自己が当面する条件の一部として認めざるを得ない。同様に、第二の単位の立地決定は、第一のそれとともに特定の立地パターンを形成することを通じて、第三の単位に対して条件となる。更に、第三の立地決定は第一、第二の決定と結合して第四の単位の条件に、第四の決定は同様にして第五の条件にと、この過程は継続され、結局、すべての立地決定はそれ以前の立地決定ないし、その結果形成された立地パターンに依存することになる。勿論、現実に於て、われわれはこのような過程の始点を求めることはできないし、又、ある立地の他の立地に及ぼす効果を測定することもなかなかに困難である。

しかし、少くとも理論的空間に関する限り、われわれはこのようなかたちでこの過程を把えることが出来るのであり、又多くの立地論はこのような過程の存在を前提としてその議論を展開していることを認識することが必要であろう。

ここで二つの基本的な概念を定義しておこう。即ち、本稿に於て、立地効果とはある立地単位の決定が既存の立地パターンの変化を通じて他の単位の決定にあたえるすべての影響を意味し、立地過程とは前述の過程、一連の立地決定をともなった立地パターンの連続的変化過程を意味するものとする。

さて、これら立地効果ならびに立地過程は立地行為に関する分析に於て基本的概念であると思われるが、ホテリングその他の業績(2)を別とすれば、従来必ずしも十分な研究の対象とされなかったのは何故であろうか。例えば需要論的立地論として現在最も重視されているレッシュの市場圏理論に於ても、立地パターンの形成は最初の立地決定が行われると殆んど同時的に蜂房状パターンが決定されてしまうわけであり、そこにこの立地過程を分析する余裕はあたえられていないし(3)、代替理論の適用によってウェーバーの生産論的立地論を構成したアイサードの著作(4)に於てもこの点については殆んど触れられていない。だが、この疑問に対する解答は簡単にあたえられるであろう。即ち、立地過程はそれ自体動態的なものであるが、立地論の動態化はいまだ完成されていない。いやその端緒についたばかりであるからに他ならない。

立地過程に対するアプローチはいくつか可能であろうが、そのうちで基本的なものは、恐らく、(一)集積理論の発展、(二)確率論の応用の二つであろう。立地過程に関する基本的アプローチが現在の集積理論を更に発展させることによって可能となることは恐らく議論の余地のないことであろう。集積理論が種々の立地行為の相互作用の分析を第一義的任務としており、それ自体動態的性格をもつ立地論の一分野であることからいって、この問題に対する基本的アプローチがここから生まれることは疑いない。第二のアプローチは確率論の適用である。前述の如く、いかなる立地過程も必然的に或程度の不確定要因を含んでいるから、確率論の適用は相応しいものと言える。いうまでもなく、このアプローチで最も強力な武器ないし理論

表 1　隣接カウンティの諸変数とその級内相関
(U. S. A. 1950)

変　　数	標本数	相　関
農地率	205	.75
小作農場率	205	.80
非農場建築物の賃貸料（中位数）	195	.71
年間所得 2,000 ドル以下の世帯率（1949）	197	.78
人口増加率（1940—1950）	205	.36

Otis D. Duncan, Statistical Geography, p. 130.

的枠組をあたえてくれるのはゲーム理論であろう。ドーフマンその他によるホテリングの空間的競争のゲーム理論にもとづく再構成(5)はこのアプローチの有効性を明瞭に示しているし、既にグリーンハット(6)、スティーヴンス(7)等はこの線に沿って仕事をしている。

本稿に於ける立地過程に対するアプローチは基本的に第二の立場をとっている。即ち、立地過程のもついわゆるストカスティクな性格に注目し、この過程を確率論に於けるいくつかの定理との関連に於て説明しようというのが本稿の目的である。

議論を進める前に、ここでもう一つ重要な概念、空間的連接とその効果について若干触れておきたい。この概念もまたながらく無視されてきたが、極めて興味あるものである。この連接効果（contiguity effect）は必ずしも厳密に定義されているわけではないが、それは地理学の研究者にとってはなじみ深い——→物理的に相接しているエーリア間にみられる諸特徴の類似性、即ち、相互に連接しているエーリアは、距離的に離れているエーリアないし無作為に抽出されたエーリア間に於けるよりも、その諸特徴に関してより同質的であるという地理的な観察事実をさしているものの如くである(8)。例えば第1表は、最近ダンカンがこの連接性を検証するために、合衆国の二〇五カウンティを無作為抽出し、更に、各カウンティに隣接するカウンティの中から一つを無作為に選びだし、それぞれを一組にして級内相関を計算した結果を示したものであるが、五つの変数のうち四つに関して高い級内相関が認められ、これは「疑いもなく、隣接したカウンティは無作為に組合わされたカウンティがそうであるよりもより一層相互に似かよっている」(9)こ

とを示すものとされた。もっとも、ダンカン自身が指摘しているように、これら変数が必ずしもカウンティの特徴を示すとは言えず、又標本抽出方法にいささかの疑問があるので、これをそのまま信頼することはさしひかえるべきだが、連接効果の検証の一例としてあげておく。更に、ダンカンはその著作の中でゲーリーの連接率の概念ならびにそれにもとづく連接効果の検証結果の一部を紹介している。[10] この紹介とゲーリー自身の論文[11]の内容については紙幅の関係からここでは触れず、又別の機会に述べることにするが、只、以下の立地過程に関する議論はこれら空間的連接とその効果というアイディアに強く依存しているということを指摘しておくべきであろう。

（1）　ここで地理的状況とはマッカーティがいう geographical situation と同義である。即ち、それは「一つないしそれ以上の特定の現象のエーリアルな分布」をさしている。McCarty, H. H. and others; The Measurement in Industrial Geography, 1956, p. 1.

（2）　Hotelling, H.; "Stability in Competition", Economic Journal, vol. 39, pp. 41—57.
Zeuthen, F.; "Theoretical Remarks on Price Policy: Hotelling's Case with Variations", Quarterly Journal of Economics, vol. 47, pp. 231—253.
Chamberlin, E.; The Theory of Monopolistic Competition, 1938, 3rd ed. Appendix C.
この他空間的立地均衡の過程に関する論議については Isard, W.; Location and Space-economy, 1956, pp. 158—168. 江沢譲爾「立地論序説」一九五五・一四六頁に詳細な解説がある。

（3）　Lösch, A.; The Economics of Location 1954, pp. 109—137.

（4）　Isard, W.; op. cit.

（5）　Dorfman, R. and others; Linear Programming and Economic Analysis, 1958, pp. 427—428.

（6）　Greenhut, M. L.; Microeconomics and the Space Economy, 1963.

（7）　Stenens, B. H.; "An Application of Game Theory to the Problem of Location", Paper and Proceedings of Regional Science Association, vol. 7.

（8）　Duncan, O. D.; Statistical Geography: Problems in Analyzing Areal data, 1961, pp. 129—130.

（9）　Duncan; ibid., p. 130.

（10）　Duncan; ibid., pp. 131—140.

（11）　Geary; "Contiguity Ratio and Statistical Mapping," The Incorporated Statistician, vol. 5, pp. 115—145.

（二）

前述の立地過程を考察するために、いま、一つの線分を想定し、その上に有限の立地可能点が第1図の如くoからnまで一定の順序で配列分布しているとしよう。これは、いうまでもなく、われわれの理論的空間であるが、この立地線上の各点は起点oからの順序以外については、その特性について完全に同質的であると仮定されている。即ち、各点は起点からの順序によってのみ相互に区別されるものとする。

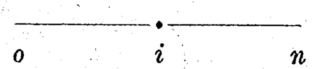


図　1

いま、線分上の任意の点をL_iとすれば、L_iに連接する左側の各点は L_{i-1}, L_{i-2}, ……右側の各点はその位置にしたがって L_{i+1}, L_{i+2}, ……として現わされる。今後の議論に於て、立地はすべて立地線上のこれらの点、立地可能点に於てのみ行われるとしよう。

さて、ここで立地過程がこの立地線上の左端から始まったとすれば、上述の立地過程に関する議論にしたがって、われわれは、この線分上のいかなる点L_iに於ける立地決定もその左側に存在するすべての点に於ける決定に依存すると言い得るであろう。立地効果の存在を認めるかぎり、すべての立地決定は既存の立地パターンによって影響を受ける筈であり、この極端に単純化された例では、立地パターンはL_iの左側に分布する各点に於ける立地によって構成されているからに他ならない。

ここで、立地効果の動向を検討するために、L_iに於ける立地決定はその左側に連接する立地可能点 L_{i-1} に於ける決定に

に、その点に隣接する点に於ける決定のみを考慮する以外いかなる要因をも考慮せずに行われる。

このやや厳格な前提のもとで、起点L_0に活動Aが立地している場合、次の立地可能点L_1にAが立地するであろう確率をp、同点にA以外の活動A′が立地する確率をp'とし、起点にA以外の活動A′が立地している場合、A′がL_1に立地する確率をq、Aが立地する確率をq'で現わすことにしよう。とすれば、ここに於て活動はAとA′の二種類しかないから、$p'=1-p$, $q'=1-q$ であり、われわれはこの関係を第2図ないし以下の如きマトリックスの形で示すことができる。

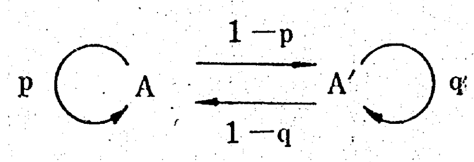


図　2

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & A' \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ A' \end{array} & \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \end{array}$$

このマトリックスに於て、各行の元は非負でありその和は1である。即ち、各行は確率ベクターであるから、このマトリックスはいわゆるマルコフ連鎖過程に於ける推移マトリックス（transition matrix）を極度に単純化したものに他ならない。[1] そして、このことは、一連の条件をあたえる限り、われわれは立地過程をマルコフ連鎖過程として考えることができ、したがって、同過程について既に知られている諸定理を立地過程にも適用することができるのではないかということを示唆している。たとえば、上述の例に於て、いずれの活動が起点に立地しているか、又、その推移マトリックスは如何なるかたちをとるか、という二つのインフォーメーションがあたえられるならば、立地線上のいかなる立地可能点についてもその点に活動AないしA′の立地するであろう確率は容易に算出されるであろう。

いま試みに住宅(R)、商業(C)、工業(I)の三活動があり、これらについて以下の如き関係が成立するとしよう。即ち

(一)　Rが起点L_0に立地している場合

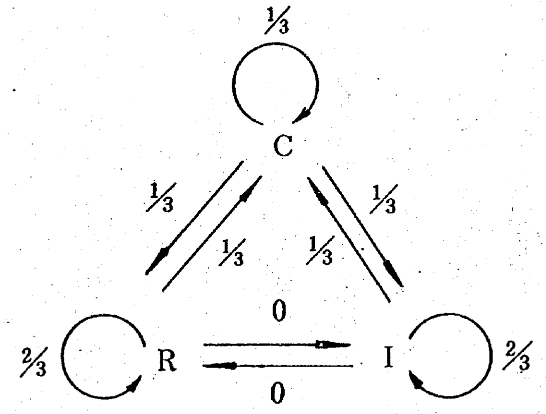


図　3

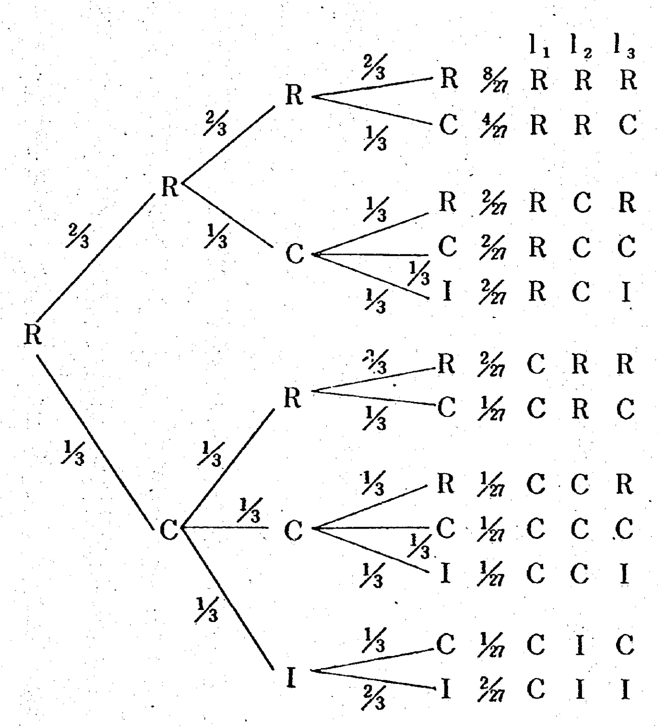
L_1に於けるRの立地の確率は　2/3
〃　C　〃　1/3
〃　I　〃　0

(二)　Cが起点L_0に立地している場合
L_1に於けるRの立地の確率は　1/3
〃　C　〃　1/3
〃　I　〃　1/3

(三)　Iが起点L_0に立地している場合
L_1に於けるRの立地の確率は　0
〃　C　〃　1/3
〃　I　〃　2/3

この関係は第3図ないし以下の如きマトリックスのかたちで示される。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} R & C & I \end{array} \\ p=\begin{array}{c} R \\ C \\ I \end{array} & \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array}$$



$p_r\,[l_3=R]=8/27+2/27+2/27+1/27=13/27$
$p_r\,[l_3=C]=4/27+2/27+1/27+1/27+1/27=9/27$
$p_r\,[l_3=I]=2/27+1/27+2/27=5/27$

図　4

勿論この推移確率は仮想的なものであるが現実の都市的土地利用を考えた場合、それからさほどかけはなれたものではないとも言える。現実に、工場が住宅の近隣に立地する機会は住宅ないし商店が立地する機会に比して著しく少ないと考えられるし、この逆もそうであろう。商業的活動の立地確率はすべての活動に対して同一であると想定されている。

さて、ここで起点に住宅が立地したとするならば、各点に於ける各活動の立地確率は基本的には第4図の如きいわゆる tree をえがくことによって得られるであろう。

即ち、最初の三立地点に於ける住宅活動の立地確率は以下の如くなる。

$$p_r[l_1=\mathrm{R}]={}^2/_3$$

$$p_r[l_2=\mathrm{R}]={}^5/_9$$

$$p_r[l_3=\mathrm{R}]={}^{13}/_{27}$$

容易に予想されるように、確率は起点から離れるにしたがって減少している。各点に於ける他の活動の立地確率も同様にしてあたえられる。即ち、商業活動については、

$$p_r[l_1=\mathrm{C}]={}^1/_3$$

$$p_r[l_2=\mathrm{C}]={}^3/_9$$

$$p_r[l_3=\mathrm{C}]={}^9/_{27}$$

工業活動については、

$$p_r[l_1=\mathrm{I}]=0$$

$$p_r[l_2=\mathrm{I}]={}^1/_9$$

$$p_r[l_3=\mathrm{I}]={}^5/_{27}$$

であるが、商業活動の確率が各点について${}^1/_3$と同値をとるに対し、工業活動のそれは起点からはなれるにしたがって増大していることが容易に知られる。

ところで、このような tree をえがくことなしにこれら確率を算出するのは簡単なものであって、各活動を起点とすることによってあたえられる確率ベクターを初期の推移マトリックスに乗ずればよい。即ち、前述の例で再び起点L_0に於ける活動をRとすれば、L_1に於けるR、C、Iの夫々の立地確率は

$$({}^2/_3,\ {}^1/_3,\ 0)$$

L_2に於ける確率は

$$({}^2/_3,\ {}^1/_3,\ 0)\begin{pmatrix} {}^2/_3 & {}^1/_3 & 0 \\ {}^1/_3 & {}^1/_3 & {}^1/_3 \\ 0 & {}^1/_3 & {}^2/_3 \end{pmatrix}=({}^5/_9,\ {}^3/_9,\ {}^1/_9)$$

L_3に於ける確率は、

$$({}^5/_9,\ {}^3/_9,\ {}^1/_9)\begin{pmatrix} {}^2/_3, & {}^1/_3, & 0 \\ {}^1/_3, & {}^1/_3, & {}^1/_3 \\ 0, & {}^1/_3, & {}^2/_3 \end{pmatrix}=({}^{13}/_{27},\ {}^9/_{27},\ {}^5/_{27})$$

であたえられる。同様にして、われわれは夫々の起点活動を所与として各立地点に於ける各活動の立地確率を算出することが出来、結局これら立地確率はL_3点について次の如き推移マトリックスで示されることになる。

$$p^3=\begin{pmatrix} {}^{13}/_{27}, & {}^9/_{27}, & {}^5/_{27} \\ {}^9/_{27}, & {}^9/_{27}, & {}^9/_{27} \\ {}^5/_{27}, & {}^9/_{27}, & {}^{13}/_{27} \end{pmatrix}$$

いうまでもなく、このマトリックスの各行は夫々の活動を起点とするL_3点に於ける各活動の立地確率を示している。数値は勿論 tree measure によるものと同一であって、住宅を起点活動とした場合、(第一行) 住宅の立地確率は減少し、工場のそれ

は増大している。逆に工業を起点活動とした場合、（第三行）住宅の立地確率は増大し、工場のそれは減少している。それでは、これら立地確率の変化は何を意味しているのであろうか。われわれの前提から言って、これらが起点に於ける活動R、C、Iの立地効果の変化を示しているということは妥当であろう。或いは少なくとも、この事実はわれわれに確率論的な意味で一活動の立地効果の変化をフォローする理論的枠組の存在することを示唆していると言ってよかろう。

前述の例に於て、推移マトリックスの自乗は0をもたないから、マルコフ連鎖に関する諸定理から更に興味ある結論が導きだされる。即ち、若しわれわれが立地点L_nを起点から非常にはなれていると想定し、夫々の活動が起点に立地した場合を考えてこの点に於ける各活動の立地確率を算定してみると、それらは以下の如き推移マトリックスのかたちで示されよう。

$$p^n=\begin{pmatrix} 1/3, & 1/3, & 1/3 \\ 1/3, & 1/3, & 1/3 \\ 1/3, & 1/3, & 1/3 \end{pmatrix}$$

いうまでもなく、このマトリックスは、n番目の立地点に於ける各活動（R、C、I）の立地確率は起点に於ける活動の如何にかかわらず同値をとることを示している。（この場合、行の各元が同値をとったのは偶然である）

若し、前述した如く、各立地点に於ける推移マトリックスが立地効果の変化を示すものならば、われわれが、この点を立地効果の極限点として考えることは妥当であろう。即ち、起点に於けるいかなる立地事実もこの点をこえてなされる立地決定には何らの影響をあたえないのであり、この意味で立地効果の極限点と考えることができるのである。

（1） マルコフ連鎖過程についてはいくつかの著作があるが、ここでの議論は主として、
Mosteler, F. and others; Probability with Statistical Application, 1961.
Bartlet, M. S.; An Introduction to Stochastic Processes, 1962, fifth ed.
Kemeney, J. G. and others; Finite Mathematical Structure, 1959.
Kemeney, J. G. and others; Finite Markov Chains, 1959.
に依拠している。

（三）

ここで以上述べてきた事柄をより一般的なかたちで提示することにしよう。

いま、$n+1$個の点をもち、$(0 \to n)$が成立するグラフLを想定し、これをわれわれの立地空間としよう。グラフの各点は立地可能点であり、これらは、起点0からの順序以外については全く同質的である。

立地過程は、この立地空間Lの各軸に沿って一連の状態を連続的に移行する$n+1$個の立地函数$(l_0, l_1, \cdots\cdots, l_n)$をもつ有限のマルコフ連鎖過程として定義される。即ち、この過程に於て、若しl_0によってあたえられる起点の状態ないし立地活動が決められるならば、空間的に連続生起する立地決定のいかなる可能な組合せ$(a, \cdots\cdots, s, t)$についても以下の如き関係が成立するものとされる。

$$p_r[l_n=t/(l_{n-1}=s)\cap(l_{n-2}=r)\cap\cdots\cdots\cap(l_1=a)]=p_r[l_n=t/l_{n-1}=s]$$

$$p_r[l_n=t/l_{n-1}=s]=p_r[l_m=t/l_{m-1}=s] \qquad (m\geqq1,\ n\geqq2)$$

換言すれば、立地空間内のいかなる立地可能点に於ても、その立地決定はその最も近い連接点の決定にのみ確率論的な意味で依存し、この依存関係はすべての立地点について成立するものとされる。

いま、一連の立地活動$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r)$のうち、ある立地点に活動$a_i$が立地したとし、これに接続する次の立地点に活動$a_j$が立地する確率を$p_{ij}$としよう。これらの確率は以下の如き推移マトリックスとして示される。

$$
P=\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{array}
\begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad \cdots\cdots \quad a_r \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots\cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots\cdots & p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots\cdots & p_{rr} \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} r \geq 2 \\ p_{ij} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1 \end{array}
$$

いうまでもなく、Pの各元は非負であり、各行は確率ベクターである。以上がわれわれの立地過程に関する確率模型であるが、この模型は二つのトリヴィアルなケースを含んでいる。即ち、(一)すべての行について、$p_{ii}=1$, $p_{ij}=0$ $(i \neq j)$ の場合、すべての立地点に於ける活動は起点のそれと同一になる。(二) $p_{ij}=1/m$ 即ちすべての推移確率が同値をとるならば、各立地点に於ける立地確率は、起点に於ける立地決定の如何に拘らず、すべての活動について同一となる。

さて、この推移マトリックスと起点に於ける立地決定があたえられたとして、n 番目の立地点に活動 a_1, a_2, ……, a_r が立地する確率は次の如くにして求められる。即ち、いま $w^{(n)}(a_j)=p_r[l_n=a_j]$ であたえられる加重函数 $w^{(n)}$ を導入すれば、

$$
\begin{aligned}
w^{(n)}(a_j) &= p_r[l_n=a_j] \\
&= \sum_k p_r[l_{n-1}=a_k \cap l_n=a_j] \\
&= \sum_k p_r[l_{n-1}=a_k] \cdot p_r[l_n=a_j / l_{n-1}=a_k]
\end{aligned}
$$

マルコフ連鎖の特徴を考慮すれば

$$
w^{(n)}(a_j)=\sum_k w^{(n-1)}(a_k)\,p_{kj}
$$

であり、この式は、$W^{(n)}=(w^{(n)}(a_1),\ w^{(n)}(a_2),\ \cdots\cdots,\ w^{(n)}(a_r))$ とすれば、

$$
W^{(n)}=W^{(n-1)}P
$$

と行列式のかたちで示すことができる。

要するに、起点に於ける活動を a_i とすれば、$W^{(1)}$ はPの i 行、$W^{(2)}$、$W^{(3)}$ は夫々 $W^{(2)}=W^{(1)}\cdot P$, $W^{(3)}=W^{(2)}\cdot P$ であたえられよう。いうまでもなくベクター $W^{(n)}$ は起点に於ける活動 a_i を所与とし、n 番目の立地点に於けるすべての活動の立地確率に対応するものである。他方夫々の立地点に於ける推移マトリックスは初期のマトリックスの羃(ベキ)であるから（このことは演算によって容易に知られる）P^n の各行は起点に於ける各活動の立地を前提とする $W^{(n)}$ に他ならない。したがって、もし、起点活動を a_i とし、n 番目の立地点に於ける a_j の立地確率を $p_{ij}^{(n)}$ とすれば、それは P^n マトリックスの ij 項であたえられることになろう。

さて、グラフLが非常に多数の点を含む、換言すれば、立地空間に非常に多数の立地可能点が存在するとしよう。この場合、もし $p_{ij}^{(n)}$ が常に正である、或いは P^n が常に正の元のみをもつとすれば、この推移マトリックスはいわゆる正規マルコフ連鎖過程を規定する筈である。そして、適当な正規性のチェックによってこのことが知られるならば、(1) われわれは正規マルコフ連鎖の諸定理に従って P^n が究極的には同一の確率ベクターWを各行にもつ極限マトリックス (limiting matrix) Tに近づくと言い得るであろう。即ち、いま非常に多数の立地点を想定するならば、起点より非常にはなれた地点 n に於ける立地確率 $p_{ij}^{(n)}$ は起点に於ける活動の如何にかかわらず、ほぼ一定の数値 t_{ij} となる。ここでは、この結論を導く諸定理とその証明には触れず、(2) 単に、前述の例に於て、この収斂過程が如何に生ずるかをいくつかの立地点に於ける推移マトリックスを提示することによって示すことにしよう。

$$
P=\begin{pmatrix} 2/3, & 1/3, & 0 \\ 1/3, & 1/3, & 1/3 \\ 0, & 1/3, & 2/3 \end{pmatrix}
\qquad
P^3=\begin{pmatrix} .480 & .333 & .185 \\ .333 & .333 & .333 \\ .185 & .333 & .480 \end{pmatrix}
$$

$$P^5=\begin{pmatrix} .399 & .333 & .267 \\ .333 & .333 & .333 \\ .267 & .333 & .399 \end{pmatrix} \qquad P^{10}=\begin{pmatrix} .346 & .333 & .324 \\ .333 & .333 & .333 \\ .324 & .333 & .346 \end{pmatrix}$$

$$P^{15}=\begin{pmatrix} .334 & .333 & .332 \\ .333 & .333 & .333 \\ .332 & .333 & .334 \end{pmatrix} \qquad P^{16}=\begin{pmatrix} .333 & .333 & .333 \\ .333 & .333 & .333 \\ .333 & .333 & .333 \end{pmatrix}$$

立地効果が立地確率との関係に於て測定され得ると認める限り、これらのマトリックスは、われわれが立地効果の動向について知るべき事柄の殆んどをあたえているといってよかろう。即ち、これらは、起点に於けるある活動の立地を所与として、それが立地空間のある点に於ける諸活動の立地に対してあたえる効果、又、各点に於けるこの効果の変化、そして、更に、この効果の空間的限界をも示しているのである。前述の例に於て、P^{16}は同一の行をもっているが、（小数点三位まで）このことは、いうまでもなく、起点に於ける活動を住宅とした場合に、そこから一六番目の立地点に住宅活動が立地するであろう確率は、起点活動を商業ないし工業とした場合、一六番目の立地点に住宅活動が立地する確率とほぼ同じである。換言すれば、起点にいかなる活動が立地しようとも、一六番目の立地点に住宅が立地する可能性は変らないことを意味している。

極限マトリックスTは次の如くにして求められよう。

前述のようにTの各行Wは確率ベクターであるから

$$W=w_1+w_2+\cdots\cdots+w_r=1$$

又、WはPに関する固定ベクターであるから

$$WP=W$$

或いは

$$(w_1,\ w_2,\ \cdots\cdots w_r)\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots\cdots & p_{1r} \\ p_{21} & \cdots\cdots & p_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & \cdots\cdots & p_{rr} \end{pmatrix}=(w_1,\ w_2,\ \cdots\cdots w_3)$$

したがって、Wは以下の $r+1$ 個の方程式を解くことによって導かれる。

$$\begin{aligned} & w_1+w_2+\cdots\cdots+w_r=1 \\ & p_{11}w_1+p_{12}w_2+\cdots\cdots+p_{1r}w_r=w_1 \\ & p_{21}w_1+p_{22}w_2+\cdots\cdots+p_{2r}w_r=w_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & p_{r1}w_1+p_{r2}w_2+\cdots\cdots p_{rr}w_r=w_r \end{aligned}$$

前述の例に於て、

$$\begin{aligned} & w_1+w_2+w_3=1 \\ & {}^2/_3w_1+{}^1/_3w_2 = w_1 \\ & {}^1/_3w_1+{}^1/_3w_2+{}^1/_3w_3=w_2 \\ & {}^1/_3w_2+{}^2/_3w_3=w_3 \end{aligned}$$

したがって、$W=({}^1/_3,\ {}^1/_3,\ {}^1/_3)$ であり、P^nは

$$T=\begin{pmatrix} {}^1/_3, & {}^1/_3, & {}^1/_3 \\ {}^1/_3, & {}^1/_3, & {}^1/_3 \\ {}^1/_3, & {}^1/_3, & {}^1/_3 \end{pmatrix}$$

となろう。

(1) Kemeney, J. G.; op. cit., p. 392 に正規性チェックの便法があたえられている。
(2) Kemeney, J. G. and others; op. cit., pp. 69—72. 他多数に、証明があたえられている。

(四)

以上、立地過程をマルコフ連鎖過程として考え、その過程に於て立地効果が如何に現われ消えてゆくかを考察してきたが、作業はこれで終ったわけではなく今後更に継続されなければならないことはいうまでもない。予想されるその方向は、(一)本稿に於て線分として規定された理論的空間を平面としてあらわされる二次元の立地空間に拡大することと、(二)この平面を場として模型の提供するメカニズムを何らかの方法で演示すること、この二つを通じて、立地過程ならびに立地効果に関してより有効な議論を展開し得るような資料を得ることであろう。

上記二つの方向のうち、前者は必ずしも困難ではない。本稿に於ても問題を一般化して述べた際、立地空間をグラフ理論の用語をつかって定義したが、立地線から立地平面への拡張は若干のグラフ理論の定義と定理を導入し、立地空間を有限の点から成る格子状平面 plain lattice として規定することによって可能であろう。だが、この平面をメカニズムの演示に於ける場 experimental space として扱おうとするといくつかの困難が生じてくる。即ち、問題の性格から言って、演示は simulation method によることになるが、同方法によって導かれる立地パターンは experimental space を如何にして規定するかによって相当な差異を生じてくると思われるからである。空間分析に simulation method を用いた少数の先例としてヘーゲストラン[1]やカールソン[2]の研究があげられるが、彼等の採用した空間はこの場合必ずしも相応しいものではないように思われる。演示に当ってのもう一つの重要な問題は、各活動間の推移確率を如何にして推定するか、ということである。マルコフ過程も確率論の一分野として大数の法則にしたがうから、これらの数値は現実の土地利用図から無作為抽出された多

数の標本値を基礎にして推定され得るが、これらは初期の推移マトリックスよりも極限マトリックスの各元に対応するものであるかも知れないという問題もある。いずれにせよ、標本抽出法とデーターの処理については慎重な考慮が必要とされるであろう。

これらについては、すべて次の機会にあらためて述べることにしたい。

(1) Hagestrand, T.; The Propagation of Innovation Wanes, Lund Studies of Geography, 1950.
(2) Karlson, S.; Social Mechanism, 1961.