Title	生産の理論に関する覚え書
Sub Title	A note on the theory of production
Author	神谷, 伝造
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1963
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.56, No.4 (1963. 4) ,p.358(66)- 361(69)
JaLC DOI	10.14991/001.19630401-0066
Abstract	
Notes	資料・ 研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19630401-0066

生産の理論に関する覚え書

神谷伝造

一

結合生産物を考えない生産函数を

$$x=f(v_0, v_1, \dots, v_m) \quad \cdots\cdots(1)$$

とする。ここで、v_0、v_1、…、v_m はそれぞれ、生産要素 x_0、x_1、…、x_m の投入量、x は生産物 x_{m+1} の産出量である。$\bar{x}$ を定数とするとき、

$$\bar{x}=f(v_0, v_1, \dots, v_m) \quad \cdots\cdots(2)$$

を満たす v_0、v_1、…、v_m の組の全体が $m+1$ 次元空間に描く図形を等量曲面という。簡単のために、v_0、v_1、…、v_m の組を

$$v\equiv(v_0, v_1, \dots, v_m)$$

によって表わす。

次の仮定一から四までは、生産函数の基本的性質と考えられるものである。

仮定一　f は v_0、v_1、…、v_m に関する一価連続函数で、これらの変数について二階までの偏微分が可能である。

簡単のために、f の偏導函数を

$$\left.\begin{array}{ll} f_i\equiv\dfrac{\partial f}{\partial v_i} & i=0, 1, \dots, m \\ f_{ij}\equiv\dfrac{\partial^2 f}{\partial v_i\partial v_j} & i, j=0, 1, \dots, m \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

を用いて表わす。

仮定二―一　v の異なる二つの値を v^0、v^1、

$x^0=f(v^0)$

$x^1=f(v^1)$

$f_i^0=f_i(v^0)$

とするとき、不等式

$$x^1-x^0-\sum_{i=0}^{m} f_i^0(v_i^1-v_i^0)\leqq 0 \quad \cdots\cdots(4)$$

が成り立つ。

仮定二―二　v の任意の値に対する偏微係数 f_{ij} を係数とする二次形式は負の半定符号である。すなわち、任意の実数の組 ξ_0、ξ_1、…、ξ_m に対して不等式

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} f_{ij}\xi_i\xi_j\leqq 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

が成り立つ。

仮定二―三　f は v_0、v_1、…、v_m に関する凹函数である。すなわち、v^1、v^2 を v の異なる二つの値とするとき不等式

$$(1-\alpha)f(v^1)+\alpha f(v^2)\leqq f[(1-\alpha)v^1+\alpha v^2] \quad \cdots\cdots(6)$$

が成り立つ。

仮定三―一　(3)を満たす v の異なる二つの値 v^0、v^1 に対して、不等式

$$\sum_{i=0}^{m} f_i^0(v_i^1-v_i^0)\geqq 0 \quad \cdots\cdots(7)$$

が成り立つ。

仮定三―二　仮定二―二の不等式(5)が、制約条件

$$\sum_{i=0}^{m} f_i\xi_i=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

を満たす実数の組 ξ_0、ξ_1、…、ξ_m に対して成り立つ。

仮定四　v の任意の値に対する偏微係数 f_{ii} が不等式

$$f_{ii}\leqq 0,\quad i=0, 1, \dots, m \quad \cdots\cdots(9)$$

を満たす。

これらの仮定のあいだの関係を定理の形にまとめておけば、

定理一　仮定二―一から仮定二―三まではたがいに同値である。

定理二　仮定三―一と仮定三―二とは同値である。

仮定二―一から仮定二―三まで、および仮定三―一と仮定三―二をそれぞれまとめて、単に仮定二、および仮定三と云う。

定理三　仮定二は仮定三、仮定四を含むが、逆は必ずしも真ではない。

数学的とり扱いの便宜のための仮定一を除いて、これらの仮定はすべて限界生産力の非逓増を意味している。仮定四は単純な形の限界生産力非逓増の法則を、仮定三は一般化された形のそれを表わしている。仮定三はまた図形的に、等量曲面が原点に対して凸であることを意味している。云うまでもなく、内部経済の存在を否定している仮定二以外は、生産規模の伸縮に関する仮定を含んでいない。

仮定二―一と仮定二―二とを結合生産物の存在する場合(注)

$$F(x_0, x_1, \dots, x_m)=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

に拡張すれば次のようになる。記号法はいままでのものに準ずる。

仮定五―一　x の異なる二つの値を x^0、x^1 とするとき、不等式

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^0 (x_i^1 - x_i^0) \leqq 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

が成り立つ。

仮定五—二 (10)を満たす x の任意の値に対する偏微係数 F_{ij} を係数とする二次形式は、制約条件

$$\sum_{i=0}^{n} F_i \xi_i = 0 \quad \cdots\cdots (12)$$

のもとで正の半定符号である。すなわち(12)を満たす任意の実数の組 ξ_0、ξ_1、…、ξ_n に対して不等式

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} F_{ij} \xi_i \xi_j \geqq 0 \quad \cdots\cdots (13)$$

が成り立つ。

（注）x_0、x_1、…、x_n のうち正のものは産出量、負のものは投入量とする。

二

生産函数(1)が狭い意味での限界生産力逓減の条件

$$f_{ii} < 0, \quad i=0, 1, \cdots, m \quad \cdots\cdots (14)$$

を満たし、かつすべての生産要素がたがいに協働的であるとき、すなわち

$$f_{ij} > 0, \quad i, j=0, 1, \cdots, m, \quad i \neq j \quad \cdots\cdots (15)$$

であるとき、偏微係数 f_{ij} の行列

$$\begin{bmatrix} f_{00}, & f_{01}, & \cdots, & f_{0m} \\ f_{10}, & f_{11}, & \cdots, & f_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m0}, & f_{m1}, & \cdots, & f_{mm} \end{bmatrix}$$

は、市場均衡の安定論においてしばしばメッツラーの行列とよばれるものと同じ形である。条件(14)および(15)を仮りに、生産函数に関するメッツラーの条件と云うことにしよう。

定理四 f が v_0、v_1、…、v_m に関する一次同次函数で、かつメッツラーの条件を満たしているとき、f は仮定二を満たす。

証明は、f_0、f_1、…、f_m がすべて v_0、v_1、…、v_m に関する零次同次函数であることを利用して、根岸＝ハーンの方法に従えばよい。(注)

（注）Hahn, F. H., "Gross Substitutes and the Dynamic Stability of General Equilibrium," *Econometrica*, vol. 26, January, 1958.
Negishi, T., "A Note on the Stability of an Economy Where All Goods are Gross Substitutes," *Econometrica*, vol. 26, July, 1958.

三

財 x_0、x_1、…、x_{m+1} の価格をそれぞれ1、p_1、…、p_{m+1} とすると利潤は

$$\pi = p_{m+1} x - \left(v_0 + \sum_{i=1}^{m} p_i v_i + C\right) \quad \cdots\cdots (16)$$

ここで C は負でない定数である。純粋競争の仮定のもとでは価格 p_1、…、p_{m+1} は一応定数であるとしてよい。企業は生産函数(1)を制約条件として π を最大にするように x、v の値を定める。

定理五 仮定一、仮定二のもとで、x、v に関する連立方程式

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda + f_0 = 0 & \\ \lambda p_i + f_i = 0, & i=1, \cdots, m \\ \lambda p_{m+1} + 1 = 0 & \\ x - f(v) = 0 & \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (17)$$

が解をもてば、それは(1)を制約条件とする(16)の最大化問題の解である。(注一)

定理六 制約条件(1)を満たす x、v の範囲がコムパクト(注二)であれば、(16)の π を最大にする x、v が存在する。

(1)を満たす x、v の範囲がコムパクトであるという仮定は一般には置かれないので、定理六を利用して直接に(17)の解の存在を保証することはできない。しかし、(17)を、家計の主体的均衡方程式および市場の需給均衡方程式を含んだ一般均衡体系の一部と見なし、それら全体の方程式系の解の存在を考えるときは、結局 x、v の範囲をコムパクトとしてよいことが知られている。(注三)

結合生産物が存在する場合は第一節に準じて定理五を拡張すればよい。(17)に相当する方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{ll} \mu - F_0 = 0 & \\ \mu p_i - F_i = 0, & i=1, \cdots, n \\ F(x) = 0 & \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (18)$$

（注一）(16)の最大化の解は、必ずしも方程式(17)の解として得られるとは限らない。x^*、v^* が(16)の最大化の解であるならば

$$\lambda + f_0(v^*) \leqq 0$$

$$\lambda p_i + f_i(v^*) \leqq 0$$

である。

Samuelson, P. A., *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1947. 七〇頁参照。

（注二）(一) 制約式(1)を満たすすべての x、v に対して、

$$|x| \leqq a$$

$$|v_i| \leqq b_i, \quad i=0, 1, \cdots, m$$

のようになる正の定数 a、b_0、b_1、…、b_m が存在する。

(二) 十分小さい正数 ε に対して

$$(x - x^0)^2 + \sum_{i=0}^{m} (v_i - v_i^0)^2 < \varepsilon$$

を満たすすべての x、v の組が(1)を満たすとき、x^0、v^0 も(1)を満たす。

（注三）Debreu, G., *Theory of Value*, John Wiley, New York, 1959. 八四頁以下参照。