Title	顕現的選好の理論と積分可能性の問題 : 消費者行動論の基礎をめぐって
Sub Title	The theory of rerealed preference and integrability condition
Author	神谷, 伝造
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1960
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.53, No.10/11 (1960. 11) ,p.852(40)- 872(60)
JaLC DOI	10.14991/001.19601101-0040
Abstract	
Notes	資料
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19601101-0040

資料

顕現的選好の理論と積分可能性の問題

―消費者行動論の基礎をめぐって―

神谷伝造

序

経済理論の実証性と効用の概念のジレンマが、消費者行動論に一つの方向を与えた。理論の進展にともなって、効用の概念の不必要な限定条件が次第に排除されていったのはまた、実証不可能な属性からの純化の過程でもあった。[注一]

無差別曲線の理論は、そのような過程の一段落を成している。しかし、無差別曲線、あるいは一般に無差別曲面は直接に観察できるものではなく、その存在をたしかめるためには内省的実験によらなくてはならない、という一点をめぐって論議がおこり、一層行動主義的な観点からこの理論の基礎づけをすることが試みられるようになった。[注二]

無差別曲面が直接観察できないとしても、与えられた価格体系と所得とのもとで主体的均衡に達している消費者について、財のあいだの限界代替率、[注三]いわば無差別曲面の微小な断片を観察することができるならば、様々な価格体系のもとでこのような観察をくりかえすことによって、消費者の趣好の型を知ることができるであろう。このことは、主体的均衡状態で消費者にとっての財のあいだの限界代替率と市場での財の価格比とが、一致するという認識を根底としている。[注四]このような、限界代替率を説明原理とする理論体系を、「限界代替率の理論」ということがある。

限界代替率の理論は、アレン、ヒックス、ジョルジェスク＝レーゲン等によって展開された結果、[注五]観察される限界代替率がいわゆる「積分可能条件」[注六]を満たすならば、無差別曲線の理論とまったく同等のものとなることが分った。積分可能条件の満たされていない場合でも、需要法則の主要な部分を説明することはできるので、限界代替率の理論は一応消費者行動論の一般化[注七]とみなすことができるのであるが、ヒックスは、少なくとも経済学の興味の範囲内ではこの条件が当然に満たされているものとしてよいという理由で、二つの理論体系のあいだに実質的な差異はないと考えた。[注八]

消費者行動論の新しい進展が、もともと無差別曲面の存在そのものを精確に論証することを意図していたにもかかわらず、その試みの多くが、論証すべき事柄をすでに前提としているという難点を免れていなかった。一九三八年に至ってサミュエルソンは、そのような事実を指摘し、[注九]あらたに「顕現的選好」の概念に基礎を置く理論を展開した。それは、消費者が取得する財の価値和の大小関係に関する基本的な仮定[注十]から出発している。

理論が実証的な説明原理を探り当てたと云うことは、必ずしも実際の検証が可能となったことを意味しない。消費者行動論の到達点も、一つの理論図式の段階にとどまるものと見なされるべきである。しかしそのことによって、現象に一層精確な説明を与えようとすることの意義が、見失われてはならない。

顕現的選好の理論が積分可能性の問題と関連をもったのは、顕現的選好関係が推移律を満たさない場合[注十一]（それをサミュエルソンのパラドクスとよぶことにする）が発見されてから後のことである。このパラドクスが「積分不可能な場合」に対応することを明らかにしたのは、主にハウサッカー、サミュエルソンの貢献である。[注十二]彼らの結論にしたがえば、サミュエルソンのパラドクスのおこる場合を理論体系の中から排除すること（顕現的選好の第二公準）[注十三]によって、顕現的選好の理論と無差別曲線の理論との同等性が確立される。したがって、積分可能条件は経済学の対象とはなりえないと云うヒックスの主張は、正当な根拠を得たことになる。何故なら、消費者行動論の対象となるのは合理的な個人なので、そのような場合、消費者の選好序列には当然推移性があるとしてよいからである。[注十四]云い換えれば、消費者行動論の課題に即して考えるなら、第二公準を置くことがむしろ自然だからである。

積分可能性の問題は問題自体が微妙であるために誤解を生じやすく、ハウサッカー、サミュエルソンの展開にも納得的でない点が少なくない。そのような点に対する疑問に発して記されたのがこのノートである。それは次の諸点を明らかにすることを目的としている。

一、顕現的選好の理論の基本的な仮定から引き出される需要法則。

二、無差別曲線の理論（効用分析）の結果との対比。

三、積分可能性の問題の意味。

四、サミュエルソンのパラドクスと積分可能性との関係。

この論文は、慶応義塾大学の福岡正夫教授および武蔵大学の小山昭雄助教授からのコメントに多くを負っている。特に、福岡教授との数回にわたる討論は、含まれ得た誤謬を未然にふせぐことに役立った。ここに深く謝意を表する次第である。なお、以下に書かれることすべての責任が、筆者に帰することは云うまでもない。

（注一）効用の概念の進化については、サミュエルソン〔11〕六一頁、

〔12〕九〇―九四頁に簡潔に述べられている。
(注二) ジョルジェスク＝レーゲン〔7〕五四六頁参照。なお、内省的観点、行動主義的観点の区別については、福岡〔6〕六〇―六一頁参照。
(注三) 消費者の満足の度合を変えないような財の交換比率。
(注四) したがって、限界代替率の観察は、はじめに限界代替率の大きさを与え、それに対応する主体的均衡点を見つける、という順序で行なわれる。詳しくは本文参照。
(注五) アレン、ヒックス〔1〕、アレン〔2〕、第十九章、ジョルジェスク＝レーゲン〔7〕。さらにつけ加えるなら、ウォルト〔15〕一〇三頁以降。
(注六) 積分可能条件の意味を明らかにすることがわれわれの課題の一つである。この問題についての歴史的な概観を得るには、サミュエルソン〔14〕三五五―三五八頁を見るとよい。
(注七) アレン〔1〕二一二頁、〔2〕五一三―五一七頁。ジョルジェスク＝レーゲン〔7〕五五三―五五四頁。サミュエルソン〔14〕三七〇頁。
(注八) ヒックス〔1〕五二―五四頁、〔8〕一九頁、脚注一。
(注九) サミュエルソン〔11〕六一―六二頁。
(注十) サミュエルソン〔11〕六五頁。それは、非対称性の公準とも云われる。(ハウサッカー〔9〕一六〇頁。)
(注十一) ハウサッカー〔9〕一六一―一六二頁。サミュエルソン〔14〕三七〇頁。

(注十二) ハウサッカー〔9〕一六九―一七一頁。サミュエルソン〔14〕三六九―三七二頁。
(注十三) サミュエルソンの「強い公準」〔14〕三七〇頁）は「半推移性の公準」(ハウサッカー〔9〕一六三頁）といわれるが、これは非対称性の公準を特殊な場合として含んでいる。しかし、明らかに異なる二つの関係を分離して、

第一公準――非対称性

第二公準――推移性

のようにまとめることができる。
(注十四) ハウサッカー〔9〕一七三頁。サミュエルソン〔14〕三七四頁。

一

市場の財をX_0、X_1、…X_nの（$n+1$）種とし、それぞれの価格がP_0、P_1…、P_n(注二)であるとする。価格は負になることはないが、零になることはある。

価格体系 $P=(P_0, P_1, \dots, P_n)$ については不等式

$$P \geqq 0 \quad (1)$$(注二)

が成りたつものとし、特に

$$P_0 > 0 \quad (2)$$(注三)

であるとする。

価格体系P^0のもとで所得M^0を得た消費者は

$$P^0 \cdot x = \sum_{i=0}^{n} P_i^0 \cdot x_i \leqq M^0 \quad (3)$$

を満たす $x=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ の範囲で、財X_0、X_1、…X_nの購入量x_0、x_1、…x_nをきめることができる。同じ価格体系と同じ所得額とに対して消費者は各財の購入量の同じ組み合わせをきめるとすれば、その対応関係を

$$x_i = f_i(M, P) \quad i=0,1,\dots,n \quad (4)$$

のように書くことができる。

購入量と価格体系とのあいだには、

一、ワルラスの収支均等式

$$\sum_{i=0}^{n} P_i x_i = M \quad (5)$$

二、同次性の公準

$$f_i(kM, kP) = f_i(M, P) \quad i=0,1,\dots,n \quad (6)$$

kは任意の定数。

が成りたつことを仮定しておく。このようにf_iがM、Pに関する零次同次函数であることを仮定すると(4)は、

$$x_i = D_i(m, p_1, \dots\dots, p_n) \quad i=0,1,\dots\dots,n \quad (7)$$

としてよい。ただし、

$$p_i = \frac{P_i}{P_0} \quad i=1,\dots\dots,n$$

$$m = \frac{M}{P_0}$$

である。このことは、（$n+1$）種の財が売買される市場の価格体系については、特定の財、例えばX_0の価格に対する比 $p=(1, p_1, \dots\dots, p_n)$ を知れば十分であることを示している。以下、価格体系をpによって表わすことにする。これに応じて(3)、(5)はそれぞれ

$$p^0 \cdot x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i \leqq m^0 \quad (8)$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m \quad (9)$$

のように書きかえられる。

消費者が、与えられた価格体系p^0および所得額m^0のもとで、(8)を満たすxの中から特に $x^0 = D(m^0, p^0)$(注四) を購入することにきめたのは、彼にとってそのx^0が、(8)を満たすどのようなxよりも好ましい組み合わせであることを示していると考えられる。(注五) いま、x^0とは異なるx^1が

$$p^0 \cdot x^1 \leqq m^0 \quad (10)$$

$$x^1 = D(m^1, p^1)$$

の関係を満たしているとする。そのとき同時に

$$p^1 \cdot x^0 \leqq m^1 \quad (11)$$

が成りたつとすると、これがまた、x^1がx^0より好ましい組み合わせであることを示すことになる。したがって、少なくとも分析の対象となる消費者の選好序列には一貫性があると考えるかぎり、われわれは(10)と(11)とが両立しないと云う仮定を置かなければならない。

以上がこれからの議論の主要な前提条件であるが、さらに数学的処理のための仮定を若干つけ加えておこう。

まず、需要函数D_i、$(i=0,1,\ldots\ldots,n)$は、m、p_1、……p_nに関する連続一価函数で、これら$(n+1)$個の変数に関する一階の偏微分が可能であることを仮定しておく。（注六）

また、m、p_1、……p_nのすべての値に対して

$$\begin{vmatrix} D_{0m}, D_{01}, \ldots\ldots, D_{0n} \\ D_{1m}, D_{11}, \ldots\ldots, D_{1n} \\ \ldots\ldots \\ D_{nm}, D_{n1}, \ldots\ldots, D_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (12)$$

であるとする。ただし、

$$D_{im}=\frac{\partial D_i}{\partial m},\ D_{ij}=\frac{\partial D_i}{\partial p_j} \quad i=0,1,\ldots\ldots,n;\ j=1,\ldots\ldots,n$$

(12)は、(7)できまるx_iの組 $x=(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n)$ に対して $(m, p_1, \ldots\ldots, p_n)$ の組が一義的にきまるための条件である。この条件を仮定することについては、後に積分可能性の問題と関連してその妥当性を吟味しなければならないが、（注七）さしあたって(12)が成りたつものとすれば、(7)に対応して

$$\left.\begin{aligned} m&=R_m(x) \\ p_i&=R_i(x) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

のような函数R_m、R_1、……R_nが存在して、これらはxの適当な領域で一価である。したがってまた、D_iに仮定された性質から、R_m、R_1、…R_nはそれぞれの$(n+1)$個の変数に関して連続で、一階の偏微分が可能である。

ここで、これまでの仮定を整頓しておこう。

仮定一、価格体系 $P=(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ については不等式

$$P \geqq 0 \qquad (1)$$

$$P_0 > 0 \qquad (2)$$

が成りたつ。（注八）

仮定二、実質所得と相対価格の組 $(m, p_1, \ldots, p_n)$ と、財の購入量の組み合わせ $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ とのあいだには一義的な対応関係がある。

仮定三、需要函数 $D=(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ とその逆函数 $R=(R_m, R_1, \ldots, R_n)$ とはそれぞれ、$(n+1)$個の変数に関して連続、かつ一階の偏微分が可能である。

仮定四、需要函数については、等式

$$x_0+\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = m \qquad (9)$$

$$x_i = D_i(m, p) \quad i=0,1,\ldots,n$$

が成り立つ。

仮定五、（注九）$x^0=D(m^0, p^0)$, $x^1=D(m^1, p^1)$, $x^0 \neq x^1$ について、

$$p^0 \cdot x^1 \leqq p^0 \cdot x^0 = m^0 \qquad (10)$$

ならば必らず次の不等式が成りたつ。

$$p^1 \cdot x^0 > p^1 \cdot x^1 = m^1 \qquad (11)$$

（注一）価格が零である財は、いわば自由財である。価格が零になるか正の値をとるかは、市場均衡の状態によってきまるので、はじめから自由財を区別しておくことはできない。

（注二）ベクトルの大小関係を表わす記号は、慣用にしたがって次のように約束する。

二つのn項のベクトル $a=(a_1, \ldots, a_n)$, $b=(b_1, \ldots, b_n)$ について

$a_i=b_i$　$i=1,\ldots,n$　のとき　$a=b$

$a_i \geqq b_i$　$i=1,\ldots,n$　のとき　$a \geqq b$

$a \geqq b$ かつ $a \neq b$ のとき $a \geqq b$

とくに

$a_i > b_i$　$i=1,\ldots,n$　のとき　$a > b$

（注三）相対価格の基準となる財（ニュメレール財あるいは貨幣財）をX_0に固定するための数学的工夫である。このような特定化を避けるために絶対価格体系で議論を進める例（アロウ他、エコノメトリカ一九五九年、第一号八二頁以下）もあるが、得られた結果が、そのために支払われた代価に値するかは疑わしい。

（注四）ベクトル $D=(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ を用いて、$x_i=D_i(m, p)$, $i=0,1,\ldots,n$ を簡単に $x=D(m, p)$ と書くことがある。

（注五）サミュエルソン〔11〕六五頁参照。

（注六）D_iが$(n+1)$個の変数に関して一価であると仮定することについては、福岡〔6〕六五頁参照。

（注七）この点については、第五節でふれる。

（注八）$P=0$ となるのは、欲望が満足されつくした場合であるが、そのとき経済問題への興味はおこらない。

（注九）サミュエルソンの基本的な仮定（〔11〕六五頁）または「顕現的選好の弱い公準」（〔14〕三七〇頁）である。

二

市場での価格の変化と消費者の需要量の変化とのあいだに成りたつ関係を、仮定一―五から引き出すことが次の課題である。

財の異なる二つの組み合わせ $x^0=D(m^0, p^0)$, $x^1=D(m^1, p^1)$ のあいだに

$$p^0 \cdot x^0 = p^0 \cdot x^1 = m^0$$

が成りたっているとすると、仮定五によって

$$p^1 \cdot x^0 > p^1 \cdot x^1$$

である。この不等式の両辺から上の等式の両辺を引くと、

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^0 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^0 > \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^1$$

であるから、$p_i^1-p_i^0=\Delta p_i$, $x_i^1-x_i^0=\Delta x_i$ と書けば、

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \cdot \Delta x_i < 0. \qquad (15)$$

よって次の定理を得る。

定理一、価格がp^0からΔpだけ変化したとする。消費者の購入する財の量をもとの価格p^0で評価した価値和を一定に保つ[注一]という条件のもとで、購入量の変化ΔxとΔpとのあいだには、

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \cdot \Delta x_i < 0 \tag{15}$$

の関係がある。

これは、ヒックスが行列の定符号性から導いた結論[注二]と類似している。仮定五との関連はサミュエルソンによって示された[注三]が、それよりもさきにジョルジェスク＝レーゲンが、異なった観点から同様の推論を行なっている。[注四]

定理一を二次形式の定符号性に関する命題に還元したいくつかの同値な表現があるので、それらのあいだの相互連関について若干ふれておくことが、以下でわれわれの問題を俯瞰するのに役立つであろう。

まず、p^1がp^0に近いとき、x^1は次の近似式で表すことができる。[注五]

$$x_i^1 = x_i^0 + D_{im}^0 (m^1 - m^0) + \sum D_{ij}^0 (p_j^1 - p_j^0)$$

あるいは差の形で、

$$\Delta x_i = D_{im}^0 \cdot \Delta m + \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^0 \Delta p_j \tag{16}$$

ただし、D_{ij}などの肩の添字は、それらが$m=m^0$，$p=p^0$における値であることを示す。

一方、仮定四から、

$$m^1 - m^0 = \left(x_0^1 + \sum_{j=1}^{n} p_j^1 x_j^1\right) - \left(x_0^1 + \sum_{j=1}^{n} p_j^0 x_j^1\right)$$
$$+ \left(x_0^1 + \sum_{j=1}^{n} p_j^0 x_j^1\right) - \left(x_0^0 + \sum_{j=1}^{n} p_j^0 x_j^0\right)$$
$$= \sum \Delta p_j x_j^1 + \Delta x_0 + \sum p_j^0 \Delta x_j$$

また、定理一の条件式$p^0 \cdot x^1 = p^0 \cdot x^0$によって、$\Delta x_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j^0 \cdot \Delta x_j = 0$であるから、

$$\Delta m = \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j x_j^1$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \Delta p_j (x_j^0 + \Delta x_j)$$

Δpの絶対値が小さいとき$\Delta p \cdot x^0$にくらべて$\Delta p \Delta x$は無視できる。[注六]故に(16)は

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{n} (D_{ij}^0 + D_{im}^0 D_j^0) \Delta p_j$$

となり、これを(15)に代入して、

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (D_{ij}^0 + D_{im}^0 D_j^0) \Delta p_i \Delta p_j < 0 \tag{17}$$

を得る。p^0はpの定義されている領域の中の任意の値としてよい。またΔpの値は、絶対値が十分小さい範囲で任意にえらんでよいから、次の定理が得られる。

定理二、pの任意の値に対して、$D_{ij} + D_{im} D_j$を係数とする二次形式

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (D_{ij} + D_{im} D_j) \xi_i \xi_j \tag{18}$$

は負の定符号である。[注七]したがって、

$$X_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \cdots, \ (-1)^n \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix} > 0 \tag{19}$$

ここで、$X_{ij} = \dfrac{(D_{ij} + D_{im} D_j) + (D_{ji} + D_{jm} D_i)}{2}$；$i, j = 1, \cdots, n$

二次形式(18)の係数はスルーツキー方程式の代替項と同様の表現を[注八]とってはいるが、i、jに関する対称性

$$D_{ij} + D_{im} D_j = D_{ji} + D_{jm} D_i$$

は一般には成りたたない。

次に、(15)でΔp_iを消去することを考えよう。x^1がx^0に近いとき(16)と同様の近似式

$$\Delta p_i = \sum_{j=0}^{n} R_{ij}^0 \Delta x_j \qquad i = 1, \cdots\cdots, n \tag{20}$$

を得る。これを(15)に代入すれば

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} R_{ij}^0 \Delta x_i \Delta x_j < 0$$

であるから、定理二の場合と同様にして次の定理を得る。

定理三、xの任意の値に対して、R_{ij}を係数とする二次形式

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} R_{ij} \xi_i \xi_j \qquad (R_{0j} = 0, \ j = 0, 1, \cdots, n) \tag{21}$$

は、[注九]条件

$$1 \cdot \xi_0 + R_1 \cdot \xi_1 + \cdots + R_n \cdot \xi_n = 0 \tag{22}$$

のもとに負の定符号である。[注十]したがって、

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & R_1 \\ 1, & 0, & R_{10} \\ R_1, & R_{10}, & 2R_{11} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0, & 1, & R_1, & R_2 \\ 1, & 0, & R_{10}, & R_{20} \\ R_1, & R_{10}, & 2R_{11}, & R_{12}+R_{21} \\ R_2, & R_{20}, & R_{21}+R_{21}, & 2R_{22} \end{vmatrix} < 0,$$
$$\cdots, \ (-1)^n \begin{vmatrix} 0, & 1, & R_1, & \cdots\cdots, & R_n \\ 1, & 0, & R_{10}, & \cdots\cdots, & R_{n0} \\ R_1, & R_{10}, & 2R_{11}, & \cdots\cdots, & R_{1n}+R_{n1} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ R_n, & R_{n0}, & R_{n1}+R_{1n}, & \cdots, & 2R_{nn} \end{vmatrix} < 0 \tag{23}$$

[注十一]

系、xの任意の値に対して、$R_{ij} - R_{i0} R_j$を係数とする二次形式

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (R_{ij} - R_{i0} R_j) \xi_i \xi_j \tag{24}$$

は負の定符号である。したがって、

$$B_{11}<0,\ \begin{vmatrix} B_{11}, B_{12} \\ B_{12}, B_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ (-1)^n \begin{vmatrix} B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{1n} \\ B_{12}, B_{22}, \cdots, B_{2n} \\ \cdots\cdots \\ B_{1n}, B_{2n}, \cdots, B_{nn} \end{vmatrix}>0 \qquad (25)$$

ここで、$B_{ij}=\dfrac{(B_{ij}+B_{i0}B_j)+(B_{ji}+B_{j0}B_i)}{2}$　　$i, j=1, \cdots, n$

実際、(22)からξ_0を解いて(21)に代入すれば(24)の二次形式を得る。(注十二)

定理二と定理三とは、ともに(15)と同値であるという間接的な関連がつくばかりでなく、二つの二次形式(18)、(24)の係数の行列のあいだには、次の定理で示されるような直接の関連もつく。

定理四、m、pの任意の値と、それに対応するxの値とに対して、

$$\begin{pmatrix} D_{11}+D_{10}D_1, & D_{12}+D_{10}D_2, & \cdots\cdots, & D_{1n}+D_{10}D_n \\ D_{21}+D_{20}D_1, & D_{22}+D_{20}D_2, & \cdots\cdots, & D_{2n}+D_{20}D_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n1}+D_{n0}D_1, & D_{n2}+D_{n0}D_2, & \cdots, & D_{nn}+D_{n0}D_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} R_{11}-R_{10}R_1, & R_{12}-R_{10}R_2, & \cdots\cdots, & R_{1n}-R_{10}R_n \\ R_{21}-R_{20}R_1, & R_{22}-R_{20}R_2, & \cdots\cdots, & R_{2n}-R_{20}R_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{n1}-R_{n0}R_1, & R_{n2}-R_{n0}R_2, & \cdots, & R_{nn}-R_{n0}R_n \end{pmatrix}^{-1} \qquad (26)、$$

この定理の証明については、サミュエルソンがその方向をかなり詳しく示しているので(注十三)ここでは立ち入らない。

(注一)「生活水準を一定に保つ」ことであるが、そのための所得の補整の仕方には大別して、「費用差額の方法」と「補整的変化の方法」との二通りが考えられる。定理一の場合は前者にあたっている。二つの方法の相異については福岡〔6〕六四頁参照。価格変化を無限小と見なす微分を用いた議論では、両者の差異はみとめられない。

(注二) ヒックス〔8〕数学附録三一一頁。彼の結論は微分演算によっているので、定理一の主張とは厳密には一致しない。なお、同書本文五一—五二頁をも参照。

(注三) サミュエルソン〔11〕六六—六七頁。

(注四) ジョルジェスク＝レーゲン〔7〕五五三頁。

(注五) 以下、同様の近似式が得られるのはすべて、D_i、R_iなどの微分可能性によっている。

(注六) 無視できるというのは比較の問題であって、その値自体を零と見なしてよい、ということではないのは、云うまでもない。

(注七) 二次形式の定符号の条件については、ドゥブルー〔3〕二九六頁参照。

(注八) ヒックス〔8〕数学附録三〇九頁。

(注九) 二次形式を(21)の形に書くための技巧である。

(注十) 二次形式の条件つき定符号の条件については、ドゥブルー〔3〕二九七—二九八頁参照。

(注十一) 二次形式(21)の係数の行列を対称形になおすと、

$$\begin{pmatrix} R_{00}, & \dfrac{R_{01}+R_{10}}{2}, & \dfrac{R_{02}+R_{20}}{2}, & \cdots\cdots, & \dfrac{R_{0n}+R_{n0}}{2} \\ \dfrac{R_{10}+R_{01}}{2}, & R_{11}, & \dfrac{R_{12}+R_{21}}{2}, & \cdots\cdots, & \dfrac{R_{1n}+R_{n1}}{2} \\ \dfrac{R_{20}+R_{02}}{2}, & \dfrac{R_{21}+R_{12}}{2}, & R_{22}, & \cdots\cdots, & \dfrac{R_{2n}+R_{n2}}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{R_{n0}+R_{0n}}{2}, & \dfrac{R_{n1}+R_{1n}}{2}, & \dfrac{R_{n2}+R_{2n}}{2}, & \cdots\cdots, & R_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0, & R_{10}, & R_{20}, & \cdots\cdots, & R_{n0} \\ R_{10}, & 2R_{11}, & R_{12}+R_{21}, & \cdots\cdots, & R_{1n}+R_{n1} \\ R_{20}, & R_{21}+R_{12}, & 2R_{22}, & \cdots\cdots, & R_{2n}+R_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{n0}, & R_{n1}+R_{1n}, & R_{n2}+R_{2n}, & \cdots\cdots, & 2R_{nn} \end{pmatrix}$$

条件(23)は、ジョルジェスク＝レーゲン〔7〕五五四頁およびサミュエルソン〔11〕六八頁にあるものと同じである。

(注十二) (22)から、

$$\xi_0=-\sum_{j=1}^{n}R_j\xi_j$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}R_{i0}\xi_i\right)\xi_0+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$=-\left(\sum_{i=1}^{n}R_{i0}\xi_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}R_j\xi_j\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-R_{i0}R_j)\xi_i\xi_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(R_{ij}-R_{i0}R_j)\xi_i\xi_j$$

(注十三) サミュエルソン〔14〕三七七—三七八頁。

三

効用指標函数の存在を前提とする分析(注一)(効用分析)の結果と前節で得た諸定理とのあいだの関係について、ここで一瞥を与えておく。

効用分析の前提は、次の仮定A—Fにまとめられる。

仮定A、財の異なる二つの組み合わせx^0、x^1のあいだには、次の三つの関係のうちの一つが、そしてただ一つだけが成立している。(注二)

(一) x^0はx^1より好ましい。

(二) x^1はx^0より好ましい。

(三) x^1とx^0とは無差別である。

仮定B 無差別な組み合わせの集合には、それぞれ効用指標が与えられる。云い換えれば、仮定Aの(一)、(二)、(三)に応じてそれぞれ

$$u(x^0)>u(x^1),\quad u(x^0)<u(x^1),\quad u(x^0)=u(x^1)$$

となるxの実函数$u(x)$が存在する。(注三)このような函数を効用指標函数と云う。

仮定C、函数uはxに関して連続、かつ二階までの偏微分が可能である。(注四)

仮定D、(注五)$u_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$、$i=0, 1, \cdots, n$については、常に次の不等

式が成り立つ。

$x_0>0,\ u_i\geqq 0,\ i=1,\ \cdots,\ n$

仮定E[注六]、ξ の任意の値に対して、u_{ij} を係数とする二次形式

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}u_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \qquad (27)$$

は条件

$$u_0\xi_0+u_1\xi_1+\cdots+u_n\xi_n=0 \qquad (28)$$

のもとで負の定符号である。したがって、

$$\begin{vmatrix}0, & u_0, & u_1\\ u_0, & u_{00}, & u_{01}\\ u_1, & u_{10}, & u_{11}\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}0, & u_0, & u_1, & u_2\\ u_0, & u_{00}, & u_{01}, & u_{02}\\ u_1, & u_{10}, & u_{11}, & u_{12}\\ u_2, & u_{20}, & u_{21}, & u_{22}\end{vmatrix}<0,$$

$$\cdots(-1)^n\begin{vmatrix}0, & u_0, & u_1, & \cdots, & u_n\\ u_0, & u_{00}, & u_{01}, & \cdots, & u_{0n}\\ u_1, & u_{10}, & u_{11}, & \cdots, & u_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ u_n, & u_{n0}, & u_{n1}, & \cdots, & u_{nn}\end{vmatrix}<0 \qquad (29)$$

ただし、

$$u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i},\qquad u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\qquad i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n$$

仮定F、消費者は価格体系 $\mathrm{P}=(\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n)$ で所得Mを与えられたとき、条件[注七]

$$\mathrm{P}_0x_0+\mathrm{P}_1x_1+\cdots+\mathrm{P}_nx_n=\mathrm{M} \qquad (30)$$

のもとで $u(x)$ を極大にするように、財 X_0、X_1、…X_n の購入量 x_0、x_1、…x_n をきめる。

実は、仮定Eが仮定Fの条件つき極大化問題に解が存在するための条件になっている。

次に仮定A—Fからすぐに出る定理を列挙しておく。

定理五、仮定Fの条件つき極大化問題の解は、$(m,\ p_1,\ \cdots,\ p_n)$ の一組の値に対して一義的である。その対応関係を

$$x_i=\mathrm{D}_i(m,\ p)\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n \qquad (31)$$

または

$$\left.\begin{aligned}&m=\mathrm{R}_m(x)\\ &p_i=\mathrm{R}_i(x)\quad i=1,\ \cdots,\ n\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

のように書けば、D_i、R_i などはすべて、それぞれの $(n+1)$ 個の変数に関して連続、かつ一階の偏微分が可能である。

定理六、条件 $(m,\ p_1,\ \cdots,\ p_n)$ に応じる極大化問題の解を $(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ とすれば、等式

$$u_0(x)=\frac{u_1(x)}{p_1}=\cdots\cdots=\frac{u_n(x)}{p_n}=\lambda \qquad (33)$$

が成りたつ。[注八] λ はラグランジュの未定乗数で[注九]、その大きさは方程式

$$x_0+p_1x_1+\cdots+p_nx_n=m$$

によってきめられる。

定理七[注十]、$x=\mathrm{D}(m,\ p)$ における u の偏微係数からなる行列の行列式を

$$\mathrm{U}=\begin{vmatrix}0, & u_0, & u_1, & \cdots, & u_n\\ u_0, & u_{00}, & u_{01}, & \cdots, & u_{0n}\\ u_1, & u_{10}, & u_{11}, & \cdots, & u_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ u_n, & u_{n0}, & u_{n1}, & \cdots, & u_{nn}\end{vmatrix}$$

その u_{ij} 余因子を、U_{ij} とすると、

$$\lambda\frac{\mathrm{U}_{ij}}{\mathrm{U}}=\mathrm{D}_{ij}+\mathrm{D}_{im}\,\mathrm{D}_j\qquad i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n \qquad (34)$$

ここでλはラグランジュの未定乗数である。

定理八、行列

$$\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{U}_{11}}{\mathrm{U}}, & \frac{\mathrm{U}_{12}}{\mathrm{U}}, & \cdots\cdots, & \frac{\mathrm{U}_{1n}}{\mathrm{U}}\\ \frac{\mathrm{U}_{21}}{\mathrm{U}}, & \frac{\mathrm{U}_{22}}{\mathrm{U}}, & \cdots\cdots, & \frac{\mathrm{U}_{2n}}{\mathrm{U}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\mathrm{U}_{n1}}{\mathrm{U}}, & \frac{\mathrm{U}_{n2}}{\mathrm{U}}, & \cdots\cdots, & \frac{\mathrm{U}_{nn}}{\mathrm{U}}\end{pmatrix}$$

の1、2、…n 次主座小行列式の符号は、はじめから交互に負、正となる。[注十一]

定理七、八から、

定理九、m、p の任意の値に対して、$(\mathrm{D}_{ij}+\mathrm{D}_{im}\,\mathrm{D}_j)$ を係数とする二次形式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}+\mathrm{D}_{im}\,\mathrm{D}_j)\,\xi_i\,\xi_j \qquad (35)$$

は負の定符号である。したがって、

$$\mathrm{D}_{11}+\mathrm{D}_{1m}\,\mathrm{D}_1<0,\quad \begin{vmatrix}\mathrm{D}_{11}+\mathrm{D}_{1m}\mathrm{D}_1, & \mathrm{D}_{12}+\mathrm{D}_{1m}\,\mathrm{D}_2\\ \mathrm{D}_{21}+\mathrm{D}_{2m}\,\mathrm{D}_1, & \mathrm{D}_{22}+\mathrm{D}_{2m}\,\mathrm{D}_2\end{vmatrix}>0,$$

$$\cdots,(-1)^n\begin{vmatrix}\mathrm{D}_{11}+\mathrm{D}_{1m}\mathrm{D}_1, & \mathrm{D}_{12}+\mathrm{D}_{1m}\mathrm{D}_2, & \cdots, & \mathrm{D}_{1n}+\mathrm{D}_{1m}\mathrm{D}_n\\ \mathrm{D}_{21}+\mathrm{D}_{2m}\mathrm{D}_1, & \mathrm{D}_{22}+\mathrm{D}_{2m}\mathrm{D}_2, & \cdots, & \mathrm{D}_{2n}+\mathrm{D}_{2m}\mathrm{D}_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{D}_{n1}+\mathrm{D}_{nm}\mathrm{D}_1, & \mathrm{D}_{n2}+\mathrm{D}_{nm}\mathrm{D}_2, & \cdots, & \mathrm{D}_{nn}+\mathrm{D}_{nm}\mathrm{D}_n\end{vmatrix}>0 \qquad (36)$$

[注十二]

$\mathrm{D}_{ij}+\mathrm{D}_{im}\,\mathrm{D}_j$ の行列と $\mathrm{R}_{ij}+\mathrm{R}_{i0}\,\mathrm{R}_j$ の行列についてついては定理四の関係(26)が成りたつので、

定理十、ξ の任意の値に対して、$(\mathrm{R}_{ij}-\mathrm{R}_{i0}\,\mathrm{R}_j)$ を係数とする二次形式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{R}_{ij}-\mathrm{R}_{i0}\,\mathrm{R}_j)\,\xi_i\,\xi_j \qquad (37)$$

は負の定符号である。したがって、

$$\mathrm{R}_{11}-\mathrm{R}_{10}\,\mathrm{R}_1<0,\quad \begin{vmatrix}\mathrm{R}_{11}-\mathrm{R}_{10}\,\mathrm{R}_1, & \mathrm{R}_{12}-\mathrm{R}_{10}\,\mathrm{R}_2\\ \mathrm{R}_{21}-\mathrm{R}_{20}\,\mathrm{R}_1, & \mathrm{R}_{22}-\mathrm{R}_{20}\,\mathrm{R}_2\end{vmatrix}>0,$$

$$\cdots(-1)^n\begin{vmatrix}\mathrm{R}_{11}-\mathrm{R}_{10}\mathrm{R}_1, & \mathrm{R}_{12}-\mathrm{R}_{10}\mathrm{R}_2, & \cdots, & \mathrm{R}_{1n}-\mathrm{R}_{10}\mathrm{R}_n\\ \mathrm{R}_{21}-\mathrm{R}_{20}\mathrm{R}_1, & \mathrm{R}_{22}-\mathrm{R}_{20}\mathrm{R}_2, & \cdots, & \mathrm{R}_{2n}-\mathrm{R}_{20}\mathrm{R}_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{R}_{n1}-\mathrm{R}_{n0}\mathrm{R}_1, & \mathrm{R}_{n2}-\mathrm{R}_{n0}\mathrm{R}_2, & \cdots, & \mathrm{R}_{nn}-\mathrm{R}_{n0}\mathrm{R}_n\end{vmatrix}>0 \qquad (38)$$

二次形式(35)、(37)の定符号性がそれぞれ(36)、(38)の形で表されるのは
$u_{ij}=u_{ji}$ から

$$D_{ij}+D_{jm}D_j=D_{ji}+D_{jm}D_i \quad i,j=1,\dots,n \qquad (39)$$

$$R_{ij}-R_{i0}R_j=R_{ji}-R_{j0}R_i \quad i,j=1,\dots,n \qquad (40)$$

が成りたつからである。定理二、三の定符号性の条件も、R_iに関して(40)がなりたてば(36)、(38)と一致する。(注十三)

等式(40)を、第一節で定義されたR_iに関する条件と見なすとき、それを積分可能条件と云う。われわれは次節以下で、この条件の意味をさらに明らかにしなければならない。

(注一) 簡単に、無差別曲線の理論と呼んでもよい。

(注二) いずれの関係が成りたつかは、消費者の内省によって確定される。

(注三) 仮定Aから直ちにこのような函数が存在するとは云えない。ドゥブルー〔4〕一六〇頁。

(注四) 数学的処理のための仮定である。しかし、消費者の趣好にこの程度の整合性を仮定するのは自然であろう。ジョルジェスク＝レーゲン〔7〕五四八頁参照。

(注五) 消費者の欲望が満たされつくしてしまうことはないことを意味する。等号の成りたたない財をX_0に特定化することは必ずしも必要ではない。この仮定はわれわれの仮定一に対応している。

(注六) Cを任意の実数とするとき、$u(x)=C$ が $(n+1)$ 次元ユークリッド空間に描く図形が無差別曲面である。仮定Eはこの曲面が原点に対して凸であることを意味している。

(注七) 所得による制約条件は一般に

$$P_0x_0+P_1x_1+\dots+P_nx_n\leqq M$$

であるが、結局(30)のようにしてよいのは、仮定Dが前提とされているからである。

(注八) 限界効用均等の法則。

(注九) X_0財を貨幣と呼ぶとき、λは貨幣の限界効用である。

(注十) ヒックス〔8〕数学附録三〇九頁。

(注十一) 仮定Eの(29)から直接には、$(n-1)$次までの主座小行列式の符号が明らかになる。$(n-1)$次主座小行列式とn次主座小行列式とが異符号であることは次のようにしてたしかめられる。

$$\begin{vmatrix} \frac{U_{11}}{U}, & \frac{U_{12}}{U}, & \dots, & \frac{U_{1n}}{U} \\ \frac{U_{21}}{U}, & \frac{U_{22}}{U}, & \dots, & \frac{U_{2n}}{U} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{U_{n1}}{U}, & \frac{U_{n2}}{U}, & \dots, & \frac{U_{nn}}{U} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{U_{11}}{U}, & \frac{U_{12}}{U}, & \dots, & \frac{U_{1n-1}}{U} \\ \frac{U_{21}}{U}, & \frac{U_{22}}{U}, & \dots, & \frac{U_{2n-1}}{U} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{U_{n-11}}{U}, & \frac{U_{n-12}}{U}, & \dots, & \frac{U_{n-1,n-1}}{U} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{U^2}\begin{vmatrix} 0, & u_0, & u_n \\ u_0, & u_{00}, & u_{0n} \\ u_n, & u_{n0}, & u_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & u_0 \\ u_0 & u_{00} \end{vmatrix} <0$$

なお、ヒックス〔8〕数学附録三一〇頁参照。

(注十二) (36)の各行列式が、定理八に云う主座小行列式そのものである。

(注十三) アレン〔1〕一九八頁および二〇三頁の誤りはジョルジェスク＝レーゲンによって指摘された。ジョルジェスク＝レーゲン〔6〕五五二—五五三頁。

四

$(n+1)$種の財の購入量の組み合わせは、$(n+1)$次元ユークリッド空間の一点と見なすことができる。そのようなE^{n+1}空間を財空間と呼ぶことにしよう。(注一)

仮定二によって、財空間E^{n+1}の各点に対しては、$(2n+1)$個の実数の組

$$(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n,\ p_1,\ \dots,\ p_n)$$

$$p_i=R_i(x),\quad i=1,\ \dots,\ n \qquad (41)$$

が一義的にきまる。このような実数の組を面素と云うことがある。(注二)点x^0における面素$(x_0^0,\ x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ p_1^0,\ \dots,\ p_n^0)$に直観的なイメージを与えるなら、それは点$x^0$を通る$(n+1)$次元空間の超平面（$n$次元多様体）

$$\left(x_0-x_0^0\right)+\sum_{i=1}^n p_i^0\left(x_i-x_i^0\right)=0 \qquad (42)$$

の、点x^0のまわりの微小部分である。

よく知られているように、平面は空間を正領域と負領域とに分ける。例えば(42)の正領域に属する一点x^1をとれば、

$$\left(x_0^1-x_0^0\right)+\sum p_i^0\left(x_i^1-x_i^0\right)>0 \qquad (43)$$

いま、このx^1に対応する価格

$$p^1=R(x^1)=p^0+\Delta p$$

によって評価したx^0、x^1の価値和$p^1\cdot x^0$、$p^1\cdot x^1$の大小を比較すると、

$$p^1\cdot x^1-p^1\cdot x^0$$

$$=\left(x_0^0+\Delta x_0\right)+\sum_{i=1}^n\left(p_i^0+\Delta p_i\right)\left(x_i^0+\Delta x_i\right)$$

$$-\left[x_0^0+\sum_{i=1}^n\left(p_i^0+\Delta p_i\right)x_i^0\right]$$

$$=\Delta x_0+\sum_{i=1}^n p_i^0\Delta x_i+\sum_{i=1}^n \Delta p_i\Delta x_i \qquad (44)$$

函数Rはxに関して連続であるから、x^1をx^0に近づけることによって、Δpをいくらでも小さくすることができる。したがって、(43)、(44)より、(42)の正領域に属する点x^1がx^0に十分近いときには、

$$p^1\cdot x^0<p^1\cdot x^1 \qquad (45)$$

が成りたち、これはx^1がx^0よりも好ましいことを示している。(注三)

他方、負領域に属する点x^2については

$$p^0\cdot x^2<p^0\cdot x^0 \qquad (46)$$

となり、これはそのまま、x^0がx^2よりも好ましいことを示している。

以上のことから、x^0からの微小変位Δxが平面(42)の正領域に向うものか、負領域に向うものかにしたがって、すなわち

$$\Delta x_0+\sum_{i=1}^{n}p_i^0\Delta x_i$$

の符号が正であるか負であるかにしたがってΔxが好ましい変位であるか好ましくない変位であるかを、判別することができる。そして

$$\Delta x_0+\sum_{i=1}^{n}p_i^0\Delta x_i=0 \tag{47}$$

となるような変位は、x^0における面素に沿うものであるが、そのような変位を無差別な変位と呼んでよいであろう。(注四)

定理十一、点x^0における面素$(x_0^0, x_1^0, \cdots, x_n^0, p_1^0, \cdots, p_n^0)$は、$x^0$を中心とする変位についての、局所的な判別基準を与える。すなわち、Δxが十分小さいとき

$$p^0\cdot\Delta x\gtrless 0$$

にしたがって、Δxが好ましい変位であるか、好ましくない変位であるかをきめることができる。

定義、点x^0からの微小変位Δxが

$$p^0\cdot\Delta x=0$$

を満たすとき、Δxはx^0からの局所的に**無差別な変位**であると云う。

$p=(1, p_1, \cdots, p_n)$を、点xに対応する価格比が表すベクトルとすると、(47)は点xにおける無差別な変位の向きはpと直交することを示している。いま、

$$h_0(t)+p_1h_1(t)+\cdots+p_nh_n(t)=0 \tag{48}$$

を満たすような、一変数t(注五)の函数の組$h(t)=[h_0(t), h_1(t), \cdots, h_n(t)]$をとったとき、これらがリプシッツの条件

$$|h_i(t)-h_i(t')|<L|t-t'| \quad i=0, 1, \cdots, n$$

(Lは確定した正数)

を満たすならば、連立微分方程式

$$\frac{dx_i}{dt}=h_i(t) \quad i=0, 1, \cdots, n \tag{49}$$

は、与えられた初期点$(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$に応じて、$(n+1)$次元空間の曲線(一次元多様体)を一義的にきめる。そして(48)は、この曲線がE^{n+1}の各点で、その点の無差別方向と一致していることを示している。このような曲線(49)を、無差別径路と名づけることにしよう。(注六)

(48)を満たすh_iとして特に、

$$R^k=[-R_k(x), 0, \cdots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, \cdots, 0]_{x=x(t)}$$

をとることができる。(注七) kは1、2、…nのうちの任意の一つとしてよい。このとき(49)は、

$$\frac{dx_0}{dt}=-R_k(x)$$

$$\frac{dx_k}{dt}=1$$

$$\frac{dx_i}{dt}=0 \quad i\neq k$$

のようになり、これはx_k軸に平行な無差別径路の群を表す。(注八) これを偏微分方程式の形に書きなおせば、

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_k}=-R_k(x) \tag{50}$$

そして、このような偏微分方程式は、$k=1, \cdots, n$に応じてn個存在する。(注九)

定理十二、R_kを需要函数の逆函数とするとき、偏微分方程式

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_k}=-R_k(x)$$

は、x_k軸に平行な無差別径路の群を表わす。

(注一)　$(n+1)$次元ユークリッド空間を、簡単にE^{n+1}空間などと書く。

(注二)　南雲〔10〕三四頁参照。

(注三)　本稿第一節四三頁参照。

(注四)　限界代替率の理論では、面素(41)が、各点での限界代替率と見なされることから直ちに、(46)を満たすΔxは無差別な変位となるが(アレン〔1〕五一四頁、ジョルジェスク＝レーゲン〔6〕五五二頁参照)、われわれの前提からはこの面素を無差別な変位と結びつけるのに上のような考慮が必要である。(サミュエルソン〔14〕三六五頁参照。なお、この箇書と、同じく〔14〕三七九頁の主張との関連は不明である。)

(注五)　tは媒介変数。

(注六)　微小な無差別変位を追うことによって得られる径路をそのように呼ぶことにする。

(注七)　実際、

$$[-R_k, 0, \cdots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, \cdots, 0][1, p_1, \cdots, p_n]$$

$$=-R_k+p_k=0$$

(注八)　$R_k(x)$がリプシッツの条件を満たすことは、その連続性によって明らかである。

(注九)　それらn個の偏微分方程式は互いに独立である。

五

前節では、財の量の組み合わせとそれに対応する価格比との組(41)が財空間E^{n+1}につくる面素の場で、無差別な径路を追跡することを見たのであるが、この無差別な径路の群(49)から「無差別曲面」が生成されるためには、どのような条件が満たされていればよいだろうか。

簡単のために財の種類が三つの場合について考えることにすると、(41)、(48)、(49)、(50)はそれぞれ、次のようになる。

$$(x_0, x_1, x_2, p_1, p_2)$$

$$p_i=R_i(x_0, x_1, x_2) \quad i=1, 2 \tag{41'}$$

$$h_0(t)+p_1h_1(t)+p_2h_2(t)=0 \tag{48'}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt}&=h_0(t)\\ \frac{dx_1}{dt}&=h_1(t)\\ \frac{dx_2}{dt}&=h_2(t)\end{aligned}\right\}\qquad(49)$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_1}=-R_1(x_0,\ x_1,\ x_2)\qquad(50)'\text{—}a$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_2}=-R_2(x_0,\ x_1,\ x_2)\qquad(50)'\text{—}b$$

(50)′—a、b の表す無差別径路は、それぞれ x_1軸、x_2軸に平行な曲線群を成している。

いま、x_0—x_2平面に平行な平面 $x_1=\alpha$ をとると、この平面の上で(50)′—b を満たす曲線群

$$f(x_0,\ x_2)=C$$

が考えられる。そして、(50)′—a の曲線群のうち、初期条件

$$x_1=\alpha \text{ で } f(x_0,\ x_2)=r$$

を満たすものの全体が一つの曲面をつくる。（注一）任意定数Cが様々な値をとるにしたがってできる、このような曲面の族を

$$F(x_0,\ x_1,\ x_2)=C\qquad(51)$$

とすれば、Fについて次の関係が成り立つ。

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\right)_F=-\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_0}\right)}=-R_1(x_0,\ x_1,\ x_2)$$

$$F(x_0,\ \alpha,\ x_2)=f(x_0,\ x_2)$$

$$\left(\frac{dx_0}{dx_2}\right)_f=-\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_0}\right)}=-R_2(x_0,\ \alpha,\ x_2)\text{（注二）}$$

そしてこれらは次のことを意味する。

(一) 曲面Fの上では、x_1軸に平行な径路はすべて無差別径路である。

(二) x_0—x_2面に平行な平面 $x_1=\alpha$ に含まれる径路は無差別な径路である。

しかし、

(三) x_2軸に平行な径路は一般には無差別径路ではない。（注三）

同様に、x_0—x_1平面に平行な平面 $x_2=\beta$ の上で、(50)′—a がつくる曲線の族

$$g(x_0,\ x_1)=C$$

と(50)′—b の曲線群とから、曲面の族

$$G(x_0,\ x_1,\ x_2)=C\qquad(52)$$

が生成され、GについてもFについてと同様のことが云える。

曲面の族(51)と(52)とは、一般には一致しないが、（注四）両者が一致するための条件について次の補助定理が知られている。

補助定理、曲面の族(51)、(52)が一致するためには、R_1、R_2について、等式

$$R_{12}-R_{10}R_2=R_{21}-R_{20}R_1\qquad(40)'$$

が成りたつことが必要十分である。（注五）

(51)、(52)が一致するとき、$F\equiv G=C$ について、

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\right)_F=-R_1,\quad \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_2}\right)_F=-R_2$$

であるから、曲面Fに沿っては、

$$dx_0+R_1\,dx_1+R_2\,dx_2=0\qquad(53)$$

が成りたつ。(51)と(52)とが一致するための条件は、逆に、(53)を満たす函数$F(x_0,\ x_1,\ x_2)=C$ が存在するための条件であるとも云える。（注六）その意味で、(40)′を、(53)の**積分可能条件**という。

曲面Fに沿って(53)が成りたつなら、この曲面に沿う任意の曲線

$$x_0=x_0(t),\quad x_1=x_1(t),\quad x_2=x_2(t)$$

は無差別径路の条件

$$\frac{dx_0}{dt}+p_1\frac{dx_1}{dt}+p_2\frac{dx_2}{dt}=0$$

を満たしている。（注七）このような曲面Fを、われわれは**無差別曲面**と呼んでよいであろう。

定理十三、面素の場(41)′から無差別曲面が生成されるための必要十分条件は、(40)′が成りたつことである。

定理十三を、一般に財の種類が三つ以上の場合に拡張することはたやすい。

（注一）$x_1=\alpha$, $f(x_0,\ x_2)=r$ を通る(50)′—a の曲線が連続な面をつくることは、微分方程式の解の初期値に関する連続性によって保証されている。

（注二）$\dfrac{\partial x_0}{\partial x_1}$, $\dfrac{dx_0}{dx_2}$ の添字F、f は、それぞれ $F(x)=C$, $f(x)=C$ を満たす変化に限ることを示す。

（注三）財の種類が二つだけのとき、(一)、(三)は考えられない。そして、(50)に相当する

$$\frac{dx_0}{dx_1}=-R_1(x_0,\ x_1)$$

の解が直ちに無差別曲線となる。

（注四）条件(12)は、別個の観点から再検討されるべきであるとしても、この条件を仮定した上でなお、意味ある問題が残っている。われわれがさしあたって(12)を仮定した根拠はそこにある。この点をめぐっては、ハウサッカー[9]六五頁、脚注一、サミュエルソン[14]三三七頁、ウォルト[15]一一一頁、[16]一五一頁を参照。

（注五）証明についてはウィルソン[17]二五四—二五九頁参照。

（注六）ウィルソンの証明問題もこの形をとっている。

（注七）(53)の左辺をdtで割ればこの関係を得る。

六

再び三財の場合について考えることにして、(40)′が満たされないとき、どのようなことがおこるであろうか。

財空間E^3の任意の一点x^0を通って方程式(50)′—a を満たす曲線を

$$x_0=\varphi(x_1\,;\,x^0) \tag{54}$$

(50)′—b を満たす曲線を

$$x_0=\psi(x_2\,;\,x^0) \tag{55}$$

とする。次に、x_1—x_2平面の異なる四点 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$, (α_1^1,α_2), $(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1)$, $(\alpha_1,\ \alpha_2^1)$, $\alpha_1^1\neq\alpha_1$, $\alpha_2^1\neq\alpha_2$ をとり、任意の α_0 に対して、順次に

$$x^0=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$$
$$x^1=\left(\alpha_0^1,\ \alpha_1^1,\ \alpha_2\right)$$
$$\alpha_0^1=\varphi\left(\alpha_1^1\,;\,x^0\right)$$
$$x^2=\left(\alpha_0^2,\ \alpha_1^1,\ \alpha_2^1\right)$$
$$\alpha_0^2=\psi\left(\alpha_2^1\,;\,x^1\right)$$
$$x^3=\left(\alpha_0^3,\ \alpha_1,\ \alpha_2^1\right)$$
$$\alpha_0^3=\varphi(\alpha_1\,;\,x^2)$$
$$x^4=\left(\alpha_0^4,\ \alpha_1,\ \alpha_2\right)$$
$$\alpha_0^4=\psi(\alpha_2\,;\,x^3)$$

をつくると、(40)の満たされていないときと x^4 と x^0 は一般には等しくない。いま $\alpha_0^4>\alpha_0$（注一）となったとすると明らかに

$$p^4x^4>p^4x^0 \tag{56}$$

$$p^4=\mathrm{R}(x^4)$$

である。

このことは、無差別な径路の群(50)′—a と(50)′—b とが、次の意味で整合的でないことを示している。すなわち、(56)によって互いに無差別でない二つの組み合わせ x^0、x^4 が、無差別径路(54)、(55)によって結ばれている。それは、云い換えれば、財の組み合わせの三つ以上の連鎖をとると、それらのあいだの顕現的選好関係が推移律を満たさない場合があると云うことである。（注二）三財の場合について得られたこの結論を、一般に三財以上の場合に拡張することは容易である。

定理十四、仮定一—五の体系で、条件(40)が満たされていないとき、サミュエルソンのパラドクスがおこる。

したがって我々は、三財以上の場合については顕現的選好関係の推移性を、何らかの形で仮定の中に含めておかなければならない。ハウサッカー、サミュエルソンは、パラドクスを直接に排除する次の仮定を採用している。（注三）

仮定六、財の、互いに異なる三つの組み合わせ、$x^0=\mathrm{D}(m^0,\ p^0)$, $x_1=\mathrm{D}(m^1,\ x^1)$, $x^2=\mathrm{D}(m^2,\ p^2)$ について、

$$p^0x^0\geqq p^0x^1,\quad p^1x^1\geqq p^1x^2$$

ならば必らず

$$p^2x^0>p^2x^2$$

である。

結　論

(一) 仮定一—五の体系が仮定A—Fの体系と同等であるための必要十分条件は、前者について条件(40)が満たされていることである。

(二) 仮定一—五の体系について条件(40)が満たされないとき、サミュエルソンのパラドクスがおこる。

(三) 仮定一—六の体系と仮定A—Fの体系とは、論理的に同等である。

（注一） $\left(\alpha_0^4,\ \alpha_1,\ \alpha_2\right)\neq(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$ のとき、$\alpha_0^4>\alpha_0$ として一般性を失わない。

（注二） 互いに異なる三つの組み合わせ x^0、x^1、x^2 をとるとき、

$$p^0\cdot x^0\geqq p^0\cdot x^1,\quad p^1\cdot x^1\geqq p^1\cdot x^2$$

と同時に

$$p^2\cdot x^0\leqq p^2\cdot x^2$$

が成りたつ場合。

（注三） ハウサッカー〔9〕一六三頁、サミュエルソン〔14〕三七〇頁参照。なお、彼らの仮定と仮定六との関係については、本稿序節（注十三）参照。

文　献

(1) Allen, R.G.D., Hicks, J. R. "A Reconsideration of the Theory of Value," *Economica*, vol. 1, February, May, 1934, pp. 52—76, pp. 196—219.

(2) Allen, R.G.D., *Mathematical Analysis for Economists*, London, Mac-Millan, 1938, Ch.XIX.

(3) Debreu, G., "Definite and Semidefinite Quadratic Forms," *Econometrica*, vol.20, July, 1952, pp. 295—300.

(4) ———, "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function," *Decision Processes* (coed. by C. H. Coombs & R. I. Davis), New York, John Wiley, 1954, pp. 159—165.

(5) 福岡正夫「消費者均衡理論の基礎をめぐって」季刊理論経済学、第二巻、一九五一年一〇月。

(6) ———「ヒックス教授の需要理論」経済研究、第八巻、一九五七年一月、六一～六七頁。

(7) Georgescu-Roegen, N., "The Pure Theory of Consumer's Behaviour," *Quartery Journal of Economics*, vol. 50, August, 1936, pp. 545—593.

(8) Hicks, J. R., *Value and Capital*, 2nd ed., Oxford, Clarendon Press, 1946, Part I & Mathematical Appendix.

(9) Houthakker, H. S., "Revealed Preference and the Utility Function," *Economica*, vol. 17, May, 1950, pp. 159—174.

(10) 南雲道夫、偏微分方程式I（岩波現代応用数学講座A—10—I）、岩波書店、一九五七年八月。
(11) Samuelson, P. A., "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour," *Economica*, vol. 5, February, 1938, pp. 61—71.
(12) ———, *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge Mass., Harvard University Press, 1947, Part I.
(13) ———, "Consumption Theory in Terms of Revealed Preference," *Economica*, vol. 15, November, 1948, pp. 243—253.
(14) ———, "The Problem of Integrability in Utility Theory," *Economica*, vol. 17, November, 1950, pp. 355-384.
(15) Wold, H., "A Synthesis of Pure Demand Analysis," Part I, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, Argang 28, 1943, pp. 85—108.
(16) ———, "Demand Functions and the Integrability Condition," *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, Argang 36, 1951, pp. 149—151.
(17) Wilson, E. B., *Advanced Calculus*, Boston, Ginnand Company, 1911, Ch. XI.

書評

『家庭経済学』

大河内一男
籠山京　共著

一

本書は家庭経済を社会経済の循環の一部を構成するものとして分析しようとするものであり、在来の家政学を単なる家計技術の教科書から一歩前進させようとする種々のこころみのうちで、とくに注目すべき成果をあげているように思われる。その前半は大河内氏の分担するところであるが、その第一章において新しい家庭経済学はつぎのように規定されている。

「家庭経済学ないし家政学を一つの学問領域として成立させるためには、それは恣意的な家事理念に出発する個人的な主張や思いつきを盛り込んだものであっては不可である。家庭経済学にとって第一に必要なこと、そしてまた学問的に可能なことは、階層ごとに、その消費生活の全構造は、どのように異なっているか、そしてその差異は、それぞれの階層の世帯の消費構造や消費慣習の特殊性と、どのように結びついているのか、を明らかにすることである。」（一二頁）この消費生活の全構造は、世代の育成をもふくめた「労働力」の再生産過程としてとらえられなければならない。それが国民経済の循環のなかでその規制をうけながらも、また逆にこれに働きかける過程を分析するのが第二章の課題とされる。

すなわち日本人の低い生活水準、とくにその低賃金の根源は、賃金が労働者世帯の生活費をまかなうものとして確立されず「農村からの出稼労働者に対するひと握りの生活補給金」（二五頁）とされ、後に世帯もちの労働者が工場地帯に定着する場合にも、この低い単身者賃金を年功によって昇給させる形をとって今日にいたっているところに求められる。その底辺には内職・家内労働者、零細企業労働者、日雇・ニコヨン、大工場の臨時工・社外工等の貧困の実態があり、家庭経済の諸問題はこの国民所得分布のアンバランスを背景として分析されなければならない。そこで著者は経済循環を資本の運動法則に則して概説し、その結果所得が分配される諸階層を資本家・大地主、自営業者、労働者、貧困層に分類して、家庭経済の問題点を主として労働者職員層の社会的欲望の増大が、消費財に対する国内市場の形成を通して社会の必要とする労働力を再生産するとともに、社会保障の進展等をもともなって次第に消費の社会化をもたらすところに求めている。

二

本書の後半は籠山氏によって分担され、まず第三章において家庭