Title	仮説の選択と相関係数
Sub Title	Selected hypothesis and correlation coefficient
Author	佐藤, 保
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1958
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.51, No.11 (1958. 11) ,p.997(61)- 1002(66)
JaLC DOI	10.14991/001.19581101-0061
Abstract	
Notes	資料
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19581101-0061

しばしばその一部を先取したことに注意。Les caractères originaux. p. 48. n. 34.

註二　とりわけ水路の便によい土地で、自然の環境が許せば、葡萄は専門に栽培された。然しそれでも急速な展開はみられない。ブルゴーニュでは、十七世紀においても、わずか十一の村落で葡萄作に専念し得たにとどまる。むしろ条件が許さなくとも、フランスの各所で葡萄は根気よく栽培された。ここでは、葡萄が栽培される土地を、かかるものとして解する。旧制度下における葡萄栽培の在り方については、Ibid. p. 22–23 を参照。

註三　ルスィヨンの場合。最適な気候が、そこでは株を丈夫に育てたため、放牧を許しても、絶対的な害とならない。L'individualisme agraire. p. 345.

註四　Ibid. p. 345 をみよ。

註五　改良主義者は休作地でいちはやく飼葉を栽培した。ここでは、そういった種類の栽培地が問題。飼葉がつくられるということ自体は、小規模とはいえ、かなり古い。

註六　ヴァランシィアンヌにおいて、とくにフランドル寄りで、監督官は、三月一日から十一月一日まで栽培地で放牧のおこなわれることを禁止した。ただしうまごやしを栽培する土地に限る。またシャンパーニュの一部で、たでやまあおぎの栽培地での放牧が禁止。Ibid. p. 346 と n. 4 の記述をみよ。

註七　一七四三年ルアン高等法院はうまごやし栽培地での共同放牧を禁止。同年ルスィヨン高等法院がたでやまあおぎ栽培地で禁止。一七七八年と一七八一年にパリの最高法院が乾草の保護を決定。Ibid. p. 347.

八

共同放牧のため村落が依存すべきは、すぐれて休作地であった。しかも細長形耕地の北部で、とりわけ特徴的な現象といわれた。そしてかかる耕地制度と、ほとんどそれと表裏一体なこの慣行とが絡み合って、そこに、他のどこにおけるよりも強い共同意識を醸成する結果となった。

革命はかかる慣行と対決することによって、実は、この慣行を必要不可欠とした農業制度そのものの変革を迫ったのであった。十八世紀末における農業技術の発展で、革命は現実に達成された。しからば、それまでの過程のなかで起り得べき社会的対立を、いかに理解すべきか。革命を志向する諸力が、十八世紀末の農村をゆさぶるほどに大きな力となって行ったのに対し、共同体制の崩壊で瓦解すべき農村の社会層があるとすれば、その具体像はどうか。より具体的に。休作地で家畜のための飼料をいちはやく栽培し、共同体制の破棄を迫ったのは、村落でどの層か。また、かかる技術革新に乗り得ず、極端な場合には離村も余儀なくされたのは、誰か。これこそが、続いて問わるべき問題となるであろう。

資料

仮説の選択と相関係数

佐藤　保

ある経済量の動きを、それと関聯した諸経済量の動きから説明しようとするとき、仮説がつくられる。仮説をつくろうとするとき、諸変数として何を選ぶか、又いくつ選ぶか、ということと、それがきまったとき、定式化をどのように行うか、の二つの問題が生ずる。経済変数をとりあつかう以上、経済的に意味のある変数がとりあげられなければならないのは当然のことであるが、多くの場合単に変数を選ぶということだけではさして問題はない。例えばビールの需要量を測定しようとする際、実際上はその年の天候状態が、需要量に最も大きな影響を与える要因の一つとなろうが、これは経済的変数ではないから、需要函数の中には取入れられない。しかし経済的に意味がなくても、何等かの傾向や状態を説明するものとして、トレンドとか不連続変数が導入される場合もある。これらの変数の導入はそれらを導入するということの意味はあるが、もし従属変数に対してこれらの変数の説明部分が大きければ、経済変数を導入することの意味がうすくなり、又小さければその変数を導入することの意味がうすくなるので慎重を要する。しかし多くの場合はこのようなことはいちいち調べないのが普通である。変数の数については自由度の点から制約されるが、バンチ・マップの方法等を使えば更に制限される場合が多いであろう。さて一度取上げるべき変数とその数がきまれば、その定式化の方法が問題となる。そして定式化がきまれば、その式の精度は相関係数によって許られる。そして相関係数が高ければ高い程よい。相関係数がいくら高くても、変数間に経済的意味がない場合はその式はよくない事が強調されるが、多くの場合は経済的に意味のあることは確実とされており、むしろ相関係数の高さから式の良否を判断する。或いはどちらの式の方がよいかが判断されるのである。都合の悪いことには、経済現象の複雑さから、許容可能な対立仮説が数多くつくられ、そのいずれをとっても高い相関がある場合が多い。従っていずれの仮説をとるべきかは一義的にきめることができず、何々仮説と呼ばれるものは平行的に存在しうるのである。相関係数の高さが同じであっても、回帰

係数の数値や符号が常識に反するような値をとるときはそのような仮説は捨てられるであろう。次に定式化の形として線形と対数線形が最も多く使用される。対数線形では回帰係数がそのまま弾力性となる利点があると共に当嵌まり（fit）がよくなることが多い。当嵌めをよくするため一つの式の中に対数形と普通形と両方を用いる場合もある。又説明変数の形を変えることにより、当嵌まりが良くなる場合もあろう。相関係数の見地からいえば変形された式の方が相関がよければその式を使った方が良いことになる。このような事象を生産函数の例をとって考えて見よう。生産量をQ、労働量をL、資本量をRで示すと、ダグラス型の生産函数は、

$$Q=bL^kR^j\cdot u \qquad \text{(i)}$$

で表わされる。bは常数、uは誤差を示す。Q、L、Rについてそれぞれ経済的に意味のある資料を取ることができれば、LとRからQを推定することができる。今両辺をLで割ると

$$\frac{Q}{L}=bL^{k-1}R^j\cdot u \qquad \text{(ii)}$$

或いは更に変形すれば

$$\frac{Q}{L}=bL^{(k+j-1)}\left(\frac{R}{L}\right)^j\cdot u \qquad \text{(ii)}'$$

と書ける。左辺のQ/Lは労働の生産性を示す、即ち(ii)では労働の生産性をLとRから推定し(ii)′ではLとR/Lから推定する。今Q、L、Rについて妥当と思われる資料を持ったとして、LRからQを推定し、相関が非常に高く、推定がうまく行われたとしても、その資料を使って同様にLとRから労働の生産性Q/Lを推定してよい結果が得られるであろうか。又(ii)′の如き形ではどうなるか。(i)(ii)(ii)′共に生産函数と呼ばれるが、(i)についてはよく推定されるが、(ii)(ii)′の形では当嵌まりが悪いとすれば、この生産函数の形をとるかぎりその資料は、LとRからQを推定するには良い資料であるが（この点については(i)(ii)(ii)′共全く同等である）、Q/Lを推定するにはよくない資料であると考えられるであろう。その間の関係を考察してみよう。対数形をとると、

$$\log Q=b+k\log L+j\log R+u \qquad (一)$$

$$\log(Q-L)=b+(k-1)L+j\log R+u \qquad (二)$$

$$\log(Q-L)=b+(k+j-1)L+j\log(R-L)+u \qquad (二)'$$

と書ける。以下便宜的に対数の記号はすべて省略する。ここで最小自乗法を使うが、変数は平均値からの偏差をとれば常数bは省略される。(一)について、

$$Q=kL+jR+u$$

と書ける。正規方程式と重相関係数を求める公式をあげれば

正規方程式

$$\sigma_{QL}=k\sigma^2_L+j\sigma_{RL} \qquad (1)$$

$$\sigma_{QR}=k\sigma_{RL}+j\sigma^2_R \qquad (2)$$

（σ_{QL}はQとLとの共分散，σ^2_LはLの分散，以下それに準ずる）

重相関係数の平方

$$R^2=\frac{k\sigma_{QL}+j\sigma_{QR}}{\sigma^2_Q} \qquad (3)$$

で示される。(二)について同様な計算を行うと、

正規方程式

$$\sigma_{(Q-L)\cdot L}=(k-1)\sigma^2_L+j\sigma_{RL} \qquad (4)$$

$$\sigma_{(Q-L)\cdot R}=(k-1)\sigma_{RL}+j\sigma^2_R \qquad (5)$$

$$(4)=\quad \sigma_{QL}-\sigma^2_L=k\sigma^2_L-\sigma^2_L+j\sigma_{RL}$$

$$=\sigma_{QL}=k\sigma^2_L+j\sigma_{RL}$$

$$(5)=\quad \sigma_{QR}-\sigma_{LR}=k\sigma_{RL}-\sigma_{RL}+j\sigma^2_R$$

$$=\sigma_{QR}=k\sigma_{RL}+j\sigma^2_R$$

となって、正規方程式については(1)(2)に等しい。(二)′についても

正規方程式

$$\sigma_{(Q-L)\cdot L}=(k+j-1)\sigma^2_L+j\sigma_{L\cdot(R-L)} \qquad (6)$$

$$\sigma_{(Q-L)(R-L)}=(k+j-1)\sigma_{L\cdot(R-L)}+j\sigma^2_{(R-L)} \qquad (7)$$

となり、展開すれば、やはり

$$\sigma_{QL}=k\sigma^2_L+j\sigma_{RL}$$

$$\sigma_{QR}=k\sigma_{RL}+j\sigma^2_R$$

となる。これから(一)(二)(二)′式を通じて、k、jの値はすべて等しいことがわかる。

次に(二)式の重相関係数を求めるために公式に代入すると、$R^{2\prime}$で示せば、その分子は、

$$(k-1)\sigma_{(Q-L)\cdot L}+j\sigma_{(Q-L)\cdot R}$$

$$=k\sigma_{QL}-k\sigma^2_L-\sigma_{QL}+\sigma^2_L+j\sigma_{QR}-j\sigma_{RL} \qquad (8)$$

$$=k\sigma_{QL}+j\sigma_{QR}+\sigma^2_L-2\sigma_{QL}$$

(二)′式では

$$(k-1+j)\{\sigma_{(Q-L)\cdot L}\}+j\{\sigma_{(Q-L)\cdot(R-L)}\}$$

となるが、展開すれば(二)式と等しくなる。分母は(二)(二)′式共に

$$\sigma^2_{(Q-L)}=\sigma^2_Q+\sigma^2_L-2\sigma_{QL}$$

となるから、(二)(二)′共重相関係数は等しく、$R^{2\prime}$として、

$$R^{2\prime}=\frac{k\sigma_{QL}+j\sigma_{QR}+\sigma^2_L-2\sigma_{QL}}{\sigma^2_Q+\sigma^2_L-2\sigma_{QL}}$$

となる。従って(二)(二)′式ではk・jの値も等しく重相関係数も等しいのであるから全く同等の式と言える。さて$R^{2\prime}$とR^2を比較すれば、$R^{2\prime}$ではR^2の分子、分母に$\sigma^2_L-2\sigma_{RL}$が加わった形となっている。そこで$\sigma^2_L-2\sigma_{QL}>0$なら$R^{2\prime}>R^2$　$\sigma^2_L-2\sigma_{QL}=0$なら$R^{2\prime}=R^2$　$\sigma^2_L-2\sigma_{QL}<0$なら$R^{2\prime}<R^2$　換言すれば

$$\frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L} < \frac{1}{2} \qquad R^{2\prime} > R^2$$

$$\frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L} = \frac{1}{2} \qquad R^{2\prime} = R^2$$

$$\frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L} > \frac{1}{2} \qquad R^2 < R^2$$

となることがわかる。$\frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L}$ はQとLの間の回帰係数に外ならない。従って資料からQとLの関係を調べることにより、重相関係数が高まるか低まるかの推移を知ることができる。そして(三)式をとることにより相関が大幅に低まるようであるならば、その資料から(一)式の如き生産函数を計算することは避けられるであろう。なお常数bは(一)より

$$u = \overline{Q} - k\overline{L} - j\overline{R} \tag{8}$$

で与えられるが、(二)(三)よりいずれも(8)と同じ結果をうる。そこで常数には変りないことがわかる。誤差項uについても、(一)より

$$u = Q - b - kL - jR \tag{9}$$

で与えられるが、(二)(三)についても同様に与えられるから、誤差項についても変化のないことがわかる。(一)式と(三)式の相関の差は裏からいえば、誤差項と従属変数の相関といってもよい。(一)式のuとQとの相関は

$$r^2_{Q \cdot u} = \frac{\sigma^2_u}{\sigma^2_Q} \tag{10}$$

で表わされる。(三)式でuと(Q−L)の相関は、(一式と三式のuは同じものであるから一式のuと(Q−L)の相関といってもよい。)

$$r^2_{(Q-L)\cdot u} = 1 - R^{2\prime} = 1 - \frac{k\sigma_{QL} + j\sigma_{QR} + \sigma_L^2 - 2\sigma_{QL}}{\sigma^2_Q + \sigma^2_L - 2\sigma_{QL}}$$

$$= \frac{\sigma^2 u}{\sigma^2_Q + \sigma^2_L - 2\sigma_{QL}} \tag{11}$$

で示される。それ故(11)より $\frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L} < \frac{1}{2}$ なら

$$r^2_{(Q-L)\cdot u} < r^2_{Q\cdot u}$$

$$\frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L} = \frac{1}{2} \qquad r^2_{(Q-L)\cdot u} = r^2_{Q\cdot u}$$

$$\frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L} > \frac{1}{2} \qquad r^2_{(Q-L)\cdot u} > r^2_{Q\cdot u}$$

となって前と裏返しの結果を見る。Q・L・Rの二変数間の関係はどうなるかを考えて見ると、

$$Q = \alpha L + v_1 \quad Q = \beta R + v_2 \quad R = \gamma L + v_3 \quad L = \delta R + v_4$$

とする。

$$(Q-L) = \alpha' L + v_1'$$

より

$$\alpha' = \frac{\sigma_{(Q-L)\cdot L}}{\sigma^2_L} = \frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L} - 1 = \alpha - 1 \tag{12}$$

$$r^2_{(Q-L)\cdot L} = \frac{(\alpha-1)\sigma_{(Q-L)\cdot L}}{\sigma^2_{(Q-L)}} = \frac{\alpha\sigma_{QL} + \sigma^2_L - 2\sigma_{QL}}{\sigma^2_Q + \sigma^2_L - 2\sigma_{QL}} \tag{13}$$

前と同様に回帰係数 α が $1/2$ より小ならばLと(Q−L)の相関の方が高くなる。

$$(Q-L) = \beta' R + v_2'$$

$$\beta' = \frac{\sigma_{(Q-L)\cdot R}}{\sigma^2_R} = \beta - \frac{\sigma_{LR}}{\sigma^2_R} = \beta - \delta \tag{14}$$

回帰係数β'はQとR、LとR（いずれもRを独立変数とする）間の回帰係数の差に等しい。もし二つの回帰係数が等しければβ'は0となるのでQとR間の相関係数も0となる。

$$r^2_{(Q-L)\cdot R} = \frac{(\beta-\gamma)\cdot\sigma_{(Q-L)\cdot R}}{\sigma^2_{(Q-L)}} = \frac{\sigma^2_R(\beta-\gamma)^2}{\sigma^2_Q + \sigma^2_L - 2\sigma_{QL}} \tag{15}$$

で表わされる。以上が(一)式を変形した場合の関係であるが、(一)(二)式共対数線形の式であってもとの形は積の形で表わされたのであった。従って(i)(ii)で変数の目盛を変えても回帰係変や相関係数の値は変らない。しかしはじめから(一)式のごとく線形で変数間の関係を規定して、今おこなったような変形をすれば、(実際にはこのような変形はあまりないであろうが、)変数の目盛のとりかたによって回帰係数や相関係数の値が異なってくる。補註的な意味でこれらの結果を簡単にしるしておく。

Q・L・Rの関係でLに対して操作したのであるからLに対する目盛変更の事だけ考えればよい。三変数でR'は

$$R^2 = \frac{k\sigma_{QL} + j\sigma_{QR} + \sigma^2_L - 2\sigma_{QL}}{\sigma^2_Q + \sigma^2_L - 2\sigma_{QL}}$$

であったが、Lの目盛をm倍しmLとすれば、

$$R^{2\prime} = \frac{k\sigma_{QL} + j\sigma_{QR} + m^2\sigma_L^2 - m2\sigma_{QL}}{\sigma^2_Q + m^2\sigma^2_L - m2\sigma_{QL}}$$

となって、

$$\frac{k\sigma_{QL} + j\sigma_{QR}}{\sigma^2_Q}$$

の部分はもとのままであるから、$m > 0$ として

$$m(\sigma^2_L - 2\sigma_{QL}) > 0$$

から、

$$m > \frac{2\sigma_{QL}}{\sigma^2_L}$$

即ち、mとして回帰係数の二倍以上の値をとれば、相関を高めることができる。そして $m \to \infty$ になれば、分子、分母の値は等しくなってくるので1に近ずくことがわかる。二変数Lと(Q−L)の関係も(13)より全く同様な結果を得ることができる。それでは相関を低めることができるであろうか。二変数、三変数にしても形式的に左辺をyと置いて、A、Bを常数とすれば、

$$y = \frac{A + m^2\sigma^2_L - 2m\sigma_{QL}}{B + m\sigma^2_L - 2m\sigma_{QL}} \tag{14}$$

と書ける。

$$\frac{dy}{dm}=\frac{\cdots(2m\sigma^2_L-2\sigma_{QL})(B+m^2\sigma^2_L-2m\sigma_{QL})-}{(B+m^2\sigma^2_L-2m\sigma_{QL})^2}$$

$$\frac{(A+m^2\sigma^2_L-2m\sigma_{QL})(2m\sigma^2_L-2\sigma_{QL})}{}=0 \qquad (15)$$

より

$$m=\frac{\sigma_{QL}}{\sigma^2_L} \qquad (16)$$

を得る。これは $Q=\alpha L+v_1$ としたときの α にほかならない。そして二変数、$(Q-mL)$ と mL、即ち $(Q-\alpha L)$ と αL の相関は0となる。これは $(Q-\alpha L)=v_1$ であり、独立変数と誤差間の相関は0である。三変数の場合は、そのまま代入してもよいわけであるが、公式として、三変数 y、x_1、x_2（x_1、x_2 を独立変数とする）で重相関係数は

$$R^2=\frac{r^2_{yx_1}+r^2_{yx_2}-2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1-r_{x_1x_2}{}^2} \qquad (17)$$

で示される。

この式に代入して考えれば

$$R^{2\prime}=\frac{r^2(Q-\alpha L)\cdot R}{1-r^2(\alpha L)\cdot R}=\frac{r^2(Q-\alpha L)\cdot R}{1-r^2_{LR}} \qquad (18)$$

となる。分子を変形すれば、

$$R^2_{(Q-\alpha L)\cdot R}=\frac{\{\sigma_{(Q-\alpha L)\cdot R}\}^2}{\sigma_{(Q-\alpha L)}{}^2\sigma^2_R}=\frac{(\sigma_{QR}-\alpha\sigma_{LR})^2}{\sigma^2_{(Q-\alpha L)}\sigma^2_R}$$

$$=\frac{\left(\sigma_{QR}-\frac{\sigma_{QL}\sigma_{LR}}{\sigma^2_L}\right)^2}{(\sigma^2_Q+\alpha^2\sigma^2_L-\alpha 2\sigma_{QL})\sigma^2_R}=\frac{\left(\sigma_{QR}-\frac{\sigma_{QL}\sigma_{LR}}{\sigma^2_L}\right)^2}{\left(\sigma^2_Q-\frac{(\sigma_{QL})^2}{\sigma^2_L}\right)\sigma^2_R} \qquad (19)$$

分母は、

$$1-\frac{(\sigma_{LR})^2}{\sigma^2_L\sigma^2_R}=\frac{\sigma^2_L\sigma^2_R-(\sigma_{LR})^2}{\sigma^2_L\sigma^2_R}=\sigma^2_R-\frac{(\sigma_{LR})^2}{\sigma^2_L} \qquad (20)$$

で結局

$$R^2=\frac{\left(\sigma_{QR}-\frac{\sigma_{QL}\sigma_{LR}}{\sigma^2_L}\right)^2}{\left(\sigma^2_Q-\frac{(\sigma_{QL})^2}{\sigma^2_L}\right)\sigma^2_R}\cdot\frac{\sigma^2_R}{\sigma^2_R-\frac{(\sigma_{LR})^2}{\sigma_L}}$$

となる。

これは先に $Q=\alpha L+v_1$ $R=\gamma L+v_3$ としたときの、v_1 と v_3 の相関係数の自乗に外ならない。即ち

$$R^{2\prime}=r^2_{v_1v_3}$$

である。

書評及び紹介

『吉野作造―日本的デモクラシーの使徒―』

田中惣五郎著

帝国主義日本が崩壊してから十三年、われわれはいま、早くも民主主義の危機を身をもって体験しつつある。民主主義を護ろうとする勢力と、口に民主主義をとなえながら、これを打倒しようとする権力との間に、日ごとにはげしい闘いが演じられている。これは誇張でもなんでもない。われわれがおかれている深刻な現実なのである。法の尊厳を説きながら、憲法をふみにじり軍備を増強する政府は、世論をつくり出すといわれるマス・コミュニケーションの必要な援護のもとに、労働組合運動を弾圧し、とりわけ、教育の中立性の名のもとに、民主主義教育を破壊すべく勤務評定を強行しつつある。一年前に比べ、わずか一月前に比べて反動化の速度はどれほど急速であることか。われわれの祖国は一体どこへゆくのであろうか。再びあのファシズムと戦争への途を歩むのではなかろうか。こうした焦慮と危惧とそして憤りが、むらむらとわきおこるのはひとり筆者のみではあるまい。

だがわれわれは、わが国の民主主義の運命について、いたずらに悲観的であってはならない。世界最強のドイツ共産党と、もっとも古く輝かしい歴史を誇ったドイツ社会民主党が、ほとんどみるべき抵抗もなしにナチスの軍門に下った一九三三年当時、そして日本が無謀な侵略戦争を中国本土に試みた一九三七年頃の、あの「暗い谷間」の時期と比較するならば、現在の世界は、平和と民主主義を護ろうとする勢力が、かつてとは比較にならぬほど増大しているからである。とりわけアジア・アフリカ諸国の覚醒と民族的な独立とは、世界の安定勢力として戦争を抑制し、世界の世論を平和の方向に導くのに偉大な貢献をなしつつある。

一九三〇年代、ファシズムと軍国主義が世界を恫喝しつつあった時代には、一発の銃声はたちまちにして全面的な戦乱に発展し、被圧迫民族の国土は蹂躙され略奪され、民衆は凌辱の憂き目にあわされるのが常であった。しかしながら、第二次大戦後の世界は一変した。いまやもっとも侵略的な大国ですら、武力をもってしては到底これらの諸国を制覇することはできない。武力的な侵略政策が、平和を護ろうとする勢力の前にいかに無力であるかは、スエズ問題におけるイギリスおよびフランス、また最近のイラク革命においてアメリカがとった威嚇的な態度が、如実にこれを証明している。

しかし、世界の大勢が、戦争に反対する勢力にとって有利に展開しつつあるとしても、われわれは拱手傍観を許されない。なぜならわが国の政治は、世界の大勢に逆行してこの一、二年来きわめて危険な方向に進んでいることを感ずるからである。このまま推移す