Title	均衡点の存在定理 : 最近の理論経済学界の一動向
Sub Title	
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1957
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.50, No.5 (1957. 5) ,p.422(80)- 427(85)
JaLC DOI	10.14991/001.19570501-0080
Abstract	
Notes	学界展望
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19570501-0080

学界展望

均衡点の存在定理

——最近の理論経済学界の一動向——

福岡正夫

経済均衡の存在の問題は、その安定の問題と相並ぶ——論理的にはむしろそれに先行する——重要問題であるにもかかわらず、従来適切な考察を受けることが甚だ少なかった。一九三〇年代のヴルトとノイマンの貢献を除くならば、この分野の仕事は最近に至るまで文字どおりの断絶状態にあったと言ってよい。しかしながら、リニアー・プログラミングとゲイムの理論の流行は、この均衡存在の問題にふたたび若干の理論家の眼を向かわせ、往時のヴルトやノイマンの業績を改めて至近距離から見直す機縁を与えた。そのようなルネッサンスの徴候は、例えば一九五〇年以来矢継早に公けにされてきた一連の論文、すなわちアロウ、デブリュウ、マッケンジー、ゲイル、クーン、二階堂、鈴木(光男)などのそれとして現われているのである。私は編集部から最近の理論経済学界の展望を依頼されたので、一応右の方向に沿う勉強の産物を一、二記録することによって責を果すことにした。以下に記すノートは、小山昭雄氏との共同

研究として近く公けにしようと思っている仕事(それはもっぱら均衡点の存在問題を取扱う)の一部をきわめて簡単に preview したものであることを最初にお断りしておきたい。

*　*　*

右に触れた系列の貢献は、本質的にはすべて角谷型の不動点定理を根幹とするものである。しかし、われわれはその中に、用いられる補助定理の形態に即して、いくつかの variant を識別することができる。いうところの Abstract Economy (さらに溯れば Non-cooperative Game) の構想に基づくアロウ＝デブリュウ流のアプローチがその一つであり、また Convex Cone とその Negative Polar の形態に問題を整理したゲイル＝二階堂流のアプローチが他の一つである。前者については今日よく知られているので、ここでは比較的知られるところの少ない後者の観点に立って、それのもたらす成果を概括してみたいと思う。

ゲイル＝二階堂のアプローチが基づく補助定理は次のような主張を含んでいる。

補助定理……n次元ユークリッド空間R^nに含まれる閉じた convex cone をK、その negative polar cone をK^*とし、KはK^*がR^nの正象限に入るようなものであるとする。K^*の0以外のベクトルを、成分和が1に等しくなるように標準化したものをPとすれば、$(n-1)$ シンプレックスの閉部分集合であるところのPの点をR^nの部分集合に対応させる point to set の函数φが

(イ) upper-semi-continuous

(ロ) $\varphi(p)$ はすべての $p \in P$ について non-empty, compact かつ convex

(ハ) $x \in \varphi(p)$ ならば $p'x \leqq 0$

の三条件を充すときには、適当な $p^* \in P$ に対して $x^* \in \varphi(p^*)$ をとると必ず $x^* \in K$ となるようなp^*、x^*が存在する。

この補助定理を用いれば、次の二つの経済モデルに解の存在することが証明される。

モデルI　まずヴルトの取扱ったモデルをいささか拡張して次のように定式化しよう。

(1) $Ax \leqq r$

(2) $A'q \leqq p$

(3) $x = f(p, q)$

(4) $r = g(p, q)$

(5) $q'(r - Ax) = 0$

(6) $x'(A'q - p) = 0$

ここで記号を説明すると、xは最終的生産物の需要量ベクトル、pはそれらの価格ベクトル、rは本源的生産要素の供給量ベクトル、qはそれらの価格ベクトル、Aは技術的に定められた生産係数のマトリックスである。これらの定義の下では、(1)は言うまでもなく各生産要素の必要量がその利用可能な供給量を超え得ないこと(それらが完全に利用されるか過剰であるかのいずれかであること)を示しており、(5)は過剰になった要素の価格がゼロに等しいことを示している。これに対して(2)は競争の圧力がどの生産物の生産にもプラスの利潤の存続を許さないことを表わし、(6)は損失を免れない生産物は生産されないことを表わすのである。(3)と(4)はそれぞれ各生産物の需要函数、各生産要素の供給函数である(ヴルト自身のモデルは(2)(3)(4)がそれぞれ

(2)′ $A'q = p$

(3)′ $x = f(p)$

(4)′ $r = \text{constant}$

となったスペシァル・ケースである)。(1)—(6)については、次のような諸仮定を設けることにする。

仮定I……$A \geqq 0$ で、かつAの各列には少なくとも一つは正の成分がある。

仮定II……$f(p, q)$ および $g(p, q)$ はp、qの非負の領域で定義された非負の連続函数で、p、qについて零次の同次函数。

仮定III……$p \geqq 0$ $q \geqq 0$ のいかなる値についても $p'f(p, q) = q'g(p, q)$

仮定Ⅰの前半については、説明は不要であろう。後半は、どの生産物の生産も少なくとも一種類の生産要素を必要とすることを示すものである。仮定Ⅱの零次の同次性は、すべての価格の同一比例的変化が需給量を不変に保つことを意味している。これは需給函数に関する通常の仮定である（この仮定の故に、価格は成分和が1となるように標準化できる）。最後に仮定Ⅲは、社会のすべての家計が収入の全額を支出に振向けるとき充される。

そのとき

存在定理Ⅰ……仮定Ⅰ—Ⅲの下においては、モデル(1)—(6)を充すような x、r、p、q（いずれも $\geqq 0$）が必ず存在する。

証明の輪郭は次のようである。まずわれわれのモデルを Activity Analysis 流に再構成することにして、

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{c|c|c} -A & & \\ I & -I & \end{array}\right)$$

と定義すると、$\bar{A}$の各列は、Aの各列をそれぞれ生産に投入してそれに応ずる生産物を1単位ずつ産出する activity ならびに商品（生産物および生産要素）の数と同数の disposal activity から成っていることが理解される。その場合には、社会全体の生産活動の集合は、cone

$$Y=\left\{y \,\middle|\, y=\bar{A}\begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix},\ x\geqq 0,\ u\geqq 0,\ v\geqq 0\right\}$$

で表わされることになる。ここで u、v は言うまでもなく disposal activity に対応して導入された slack variable である。つぎに消費の面でも、社会全体の消費活動の集合は、

$$C=\left\{c \,\middle|\, c=\begin{pmatrix} -r \\ x \end{pmatrix},\ r\geqq 0,\ x\geqq 0\right\}$$

で表わされる。最後に価格および需給函数であるが、われわれはそれらをそれぞれ

$$\bar{p}=\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},\quad F(\bar{p})=\begin{pmatrix} -g(p,\ q) \\ f(p,\ q) \end{pmatrix}$$

と略記することに約束する。

さて、このような書換えの下で証明にとりかかる。まず価格に課せられる(2)の均衡条件および価格の非負の条件は、われわれの新しい記号では一挙に

$$\bar{p}'\bar{A}\leqq 0$$

と書くことができる。そしてこれらの条件を充す$\bar{p}$は明らかに

$y\in Y$ のすべての y について

$$\bar{p}'y\leqq 0$$

を充すから、そのような$\bar{p}$の全体はYの negative polar cone となる。それを normalize したものを

$$\bar{P}=\{\bar{p}\,|\,\bar{p}'y\leqq 0 \text{ for all } y\in Y;\ \bar{p}\geqq 0,\ \textstyle\sum p_j+\sum q_i=1\}$$

と書けば、われわれのY、$\bar{P}$が補助定理のK、Pに該当することは明らかである。仮定Ⅱによって F は連続であるから、当然補助定理の条件(イ)(ロ)は充される。さらに仮定Ⅲによって $\bar{p}'F(\bar{p})=0$ であるから、(ハ)もまた充される。故に、われわれのモデルは所与の仮定の下で補助定理のすべての条件を満足し、従って適当な価格$\bar{p}^*$に対して

$$c^*=F(\bar{p}^*)$$

とすれば、必ず

$$c^*\in Y$$

となるような

$$c^*=\begin{pmatrix} -r^* \\ x^* \end{pmatrix},\quad \bar{p}^*=\begin{pmatrix} q^* \\ p^* \end{pmatrix}$$

が存在する。

これらのx^*、r^*、p^*、q^*が求める均衡解であることは、容易に分る。まず $c^*=F(\bar{p}^*)$ から (3) $x^*=f(\bar{p}^*)$、(4) $r^*=g(\bar{p}^*)$ の充されることは自明である。つぎに仮定Ⅱによってf、gは非負の函数であるから、当然x^*、r^*は非負であり、また $\bar{p}^*\in\bar{P}$ であるから、p^*、q^*も非負で、かつ (2) $\bar{p}'\begin{pmatrix} -A \\ I \end{pmatrix}\leqq 0$ の充されることも明らかである。他方、$c^*\in Y$ から

$$c^*=\begin{pmatrix} -r^* \\ x^* \end{pmatrix}=\bar{A}\begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

故に

$$r^*=Ax+u$$

$$x^*=x-v$$

ここでu、vの非負であることおよび仮定Ⅰを考慮すれば

$$r^*\geqq Ax=A(x^*+v)\geqq Ax^*$$

従って(1)が充されることになる。最後にx^*、r^*、p^*、q^*については、仮定Ⅲは

$$p^{*\prime}x^*=q^{*\prime}r^*$$

となり、これは(5)(6)と等値である。

依って、x^*、r^*、p^*、q^*は(1)—(6)のすべてを充すことが示された。

モデルⅡ　上記のモデルは固定的な生産係数を前提し、要素間の代替を無視するのみならず、また結合生産物の可能性をも除いている。さらにそれは社会全体の需給函数から出発し、それらを個々の主体の行動から導く手続を欠いている。今日の一般均衡理論はこのような欠点をすべて克服しているから、均衡点の存在の証明も一層完全なモデルについて行われなければならないであろう。そのようなものの一つとして、われわれは次のようなモデルを考察する。

(7) $y^j(p)=\{y^j \mid y^j \in Y^j,\ p'y^j=\max\}$
for all j

(8) $x^i(p)=\{x^i \mid x^i \in X^i,$
$p'(x^i-\zeta^i)-\sum_j \alpha_{ij}\cdot p'y^j \leqq 0,\ u^i(x^i)=\max\}$
for all i

(9) $p \in P=\{p \mid p \geqq 0,\ \sum p_h=1\}$

(10) $z(p)=\{z \mid z=\sum_i(x^i-\zeta^i)-\sum_j y^j,$
$y^j \in y^j(p),\ x^i \in x^i(p)\}$

(11) $z(p) \leqq 0$

(12) $p'z(p)=0$

ここでy^jは企業jの立てる生産計画のベクトル、x^iは家計iの立てる消費計画のベクトルであり、y^jの場合はその成分が正ならば産出量、負ならば投入量を表わし、x^iの場合は成分が正ならば消費量、負ならば提供量を表わす。企業jは技術的に可能なy^jの集合Y^jの中から、所与の価格pの下で、利潤 $p'y^j$ を極大ならしめるようなy^jを決定する。(7)はそのような企業の行動を述べている。他方、家計iは生理的に可能なx^iの集合X^iの中から、所与のpの下で、収支の制約に従いつつ、効用 $u^i(x^i)$ を極大ならしめるようにx^iを決定する。(8)はそのような家計の行動を述べている。家計の収入には、用役の提供によるほか、手持ストックの売却によるものと企業利潤からの配当によるものとの二つが考えられる。(8)の収支制約式中のζ^iは期初に家計iの保有する各商品のストック量のベクトルであり、またα_{ij}は企業jから家計iに配当される利潤の割合である。以上の各企業、各家計の行動から個別的な需給函数 $y^j(p)$, $x^i(p)$ が導かれ、それらの、主体に関する総計として社会的な超過需要函数 $z(p)$ が導かれる。(10)がその定義式となる。市場均衡の条件は(11)(12)に要約される。

さて、われわれはこのモデルについて次のような諸仮定を設ける。

仮定Ⅳ……Y^jは商品と同数の次元のユークリッド空間の、原点を含む compact かつ convex な部分集合

仮定Ⅴ……X^iは同じ次元のユークリッド空間の、compact かつ convex な部分集合

仮定Ⅵ……$u^i(x^i)$ はX^iについて定義される連続函数

仮定Ⅶ……$u^i(x^i)=u^i(x^{i\prime})$ ならば、$0 \leqq \lambda \leqq 1$ のλについて

$u^i[\lambda x^i+(1-\lambda)x^{i\prime}] \geqq u^i(x^i)$

仮定Ⅷ……$x^i < \zeta^i$ となるような $x^i \in X^i$ がある

仮定Ⅸ……$\alpha_{ij} \geqq 0$ かつ $\sum_i \alpha_{ij}=1$

仮定Ⅹ……$p'(x^i-\zeta^i)=\sum_j \alpha_{ij}\cdot p'y^j$

仮定Ⅳ、Ⅴは率直に言って経済的な事実よりもむしろ数学的要請に基づくものかもしれないが、経済的に考えてもあながち不自然ではないであろう。例えばY^jが原点を含むのは、企業はもし不利ならば生産を停止する自由をもっているからである。compact 性は有限の期間内に無限の数量は産出（もしくは投入）できないという思想を含んでいる。convex 性はy^j, $y^{j\prime}$が可能であるとき、それらを混合した $\lambda y^j+(1-\lambda)y^{j\prime}$ （ここで $0<\lambda<1$）もまた可能であることを意味するが、これが生産の可分性を含むことはよく知られたとおりである。X^iについてもY^jに準ずる。つぎに仮定Ⅵ、Ⅶはいずれも家計の均衡理論で標準的なものであって、とりわけ後者は無差別曲面が原点に凸という通常の仮定に応ずるものである。問題は仮定Ⅷである。この仮定は、家計iが期初のストック量から消費量を差引いたあと、なおすべての商品についてなんらかのプラスの量を提供し得るということであって、明らかに非現実的であるが、これを除くとゲイル流のアプローチは成功しない。仮定Ⅸの前半は自明である。後半は企業の利潤がすべて家計に配分されることを意味する。最後に仮定Ⅹは、家計が収入の全額を支出するということである。

存在定理Ⅱ……仮定Ⅳ－Ⅸの下においては、モデル(7)－(11)を充すようなx^i, y^j, $p(\geqq 0)$ が必ず存在し、かつ仮定Ⅹを加えれば(12)が必ず成立する。

証明を詳述することは、もはや紙数が足りないので来るべき機会に委せるが、要するに所与の仮定の下では、$y^j(p)$, $x^i(p)$ が non-empty, compact, convex かつ upper-semi-continuous となることが証明され、そうすると定義から $z(p)$ も同様の性質を充すことが知られる。また $y^j(p)$, $x^i(p)$ については

$p'(x^i-\zeta^i)-\sum_j \alpha_{ij}\cdot p'y^j \leqq 0$

が成立つから、すべてのiについて合計し、かつ仮定Ⅸの$\sum_i \alpha_{ij}=1$ を考慮することによって

$p'z \leqq 0$

の成立つことも明らかである。故に $z(p)$ を補助定理の $\varphi(p)$ と看做すならば、補助定理の条件はことごとく満足される。依って、いま問題の補助定理を cone K がR^nの負の象限、従ってその negative polar K* が正象限であるスペシァル・ケースについて考えれば、適当な $p^* \in P$ に対して $z^* \in z(p)$ をとると必ず $z^* \leqq 0$ となるようなp^*, z^*が存在することになる。

p^*, z^*が(9)(11)を充すことは自明である。また定義(10)によって

$z(p^*)=\sum_i x^i(p^*)-\sum_i \zeta^i-\sum_j y^j(p^*)$

であるから、z^*が $z(p^*)$ に含まれる以上、$x^i(p^*)$, $y^j(p^*)$ のそれぞれから適当なx^{i*}、y^{j*}をとり出して $z^*=\sum_i x^{i*}-\sum_i \zeta^i-\sum_j y^{j*}$ の形に書き得ることは当然である。すなわち、$z^*=\sum_i x^{i*}-\sum_i \zeta^i-\sum_j y^{j*}$ でかつ $x^{i*} \in x^i(p^*)$, $y^{j*} \in y^j(p^*)$ となるようなx^{i*}、y^{j*}も必ず存在する。

最後に仮定Ⅹが(12)を成立たしめることもきわめて明白である。すなわち、(10)から

$p^{*\prime}(x^{i*}-\zeta^i)-\sum_j \alpha_{ij}\cdot p^{*\prime}y^{j*}=0$

であるから、合計することによって直ちに

$p^{*\prime}z^*=0$