Title	線形計画論・遊戯論との関係
Sub Title	Linear programming : interrelation between linear programming and game theory
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1956
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.49, No.6 (1956. 6) ,p.416(14)- 431(29)
JaLC DOI	10.14991/001.19560601-0014
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19560601-0014

線形計畫論・遊戯論との關係

福岡正夫

一、本稿の目的

經濟學者の關心からすれば、線形計畫論と遊戯論とは元來對象を異にする別個の分野であつて、前者が主として最適生產の實踐的解法に對する貢獻であるのにひきかえ、後者は市場における驅引ないしは寡占的要因の分析に新しい視角を與えるものというような評價が行われるのがつねであつた。例えば大石泰彥氏が「理論が現實に對して使えるかどうか」という觀點からして「遊戯の理論よりは……活動分析（線形計畫論のこと）の方がはるかに評價されてしかるべきである」などと言われるとき、それは上述の意味でわれわれ經濟學徒にとつては洵に自然な一つの態度を表明したものと考えてよいであろう。しかし、ノイマン、ブラウン、ダンチッグ、ゲイル＝クーン＝タッカーなどの貢獻によつて、實は線形計畫論、遊戯論の二つの分野が同一の論理構造を通じて相互に緊密に結ばれることが判明している今日においては、事情はいささか異つている。すなわち、これらの數學者の仕事によつて、今日では、いかなる零和二人遊戯の問題も之をそれに關連する線形計畫の問題に轉換することができ、またいかなる線形計畫の問題も之をそれに關連する零和二人遊戯の問題に轉換できることが知られているのであるから、われわれはもはや一概にその一方のみの有用性を强調することはできないであろう。何故なら、右の事實さえ確立していれば、一方の問題の解法がまた同時に他の問題の解法としても役立ち得ることになるからである。これは實踐的に重要な知識と言うべきである。そこで、この重要性にかんがみ、本稿では線形計畫論と遊戯論との關連、つまりその何れかの一方から他方を導けることの說明を主眼として取扱つた。ただこの一連の論稿の入門的解說たるべき要請からして、本題に立入る前に、遊戯論についての最少限度の解說をも併せて記すことにした。

二、遊戯論の概略

遊戯の理論（Theory of Games）は一九二八年ジョン・フォン・ノイマンが二十三歳のときに書いた先驅的論文を源泉として、一九四四年公刊の同じくノイマンおよびモルゲンシュテルンの大著『遊戯の理論と經濟的行動』にいたつて極めて詳細な展開を遂げた。[註1] 爾後この書物に與えられたさまざまな評價の十字路[註2]に立つて、果して遊戯論がどれだけの意義を經濟理論にもち得たかを確言するのは、今日においてもなお時期尙早であろうし、また筆者の現在の能力を超えた問題でもある。が、一言だけを述べておくならば、この理論が單にそれ自體として知的興味を誘うばかりでなく、また線形計畫論や統計的推定論などとの關連を通じて、少なからぬ實踐的意義をもち得ることが、その後の研究の展開コースから窺われるのではないかと思われる。[註3] それ故、遊戯論の內容について何らかのことを知つておくのは、少くとも現代の經濟學徒や統計學徒にとつては大いに望ましいことと言つてよいであろう。本節は粗略ながらその目的のために用意された一つの足がかりである。[註4]

遊戯の問題のエッセンスは、要するに次のような諸點に存している。まず第一に利害の相對立する複數人のプレーヤーが存すること。第二にそのプレーヤーのおのおのが他のプレーヤーの變數にも依存する相異る函數を極大ならしめること。第三にそれらのプレーヤーは自主的にはそれぞれ他のプレーヤーの變數は支配できず、自らの變數のみを支配できること。

さてこのように考えれば、遊戯の問題は經濟理論の歴史とともに古い。恐らく經濟學徒には、まずクールノーの複占の事例が直ちにそれと思い浮ばれるであろう。[註5] いまここに二人の鑛泉の所有者がいる。彼等はその鑛泉を生產費なしに獲得し販賣する。賣手甲が x_1 量を販賣し、賣手乙が x_2 量を販賣するとすれば、市場には $x=(x_1+x_2)$ 量の鑛泉がもたらされて、需要曲線

$$p=p(x)=p(x_1+x_2)$$

から價格 p が決定される。そのとき、二人の賣手の利潤はそれぞれ

$$\pi_1(x_1, x_2)=p(x_1+x_2)\cdot x_1$$

$$\pi_2(x_1, x_2)=p(x_1+x_2)\cdot x_2$$

であつて、この π_1、π_2 が彼等の各個に極大ならしめようとする大きさに他ならない。しかしながら、賣手甲の利潤 π_1 は彼が自主的には支配し得ない賣手乙の數量 x_2 にも依存し、また同樣に賣手乙の利潤 π_2 は彼が直接には動かし得ない賣手甲の數量 x_1 にも依存する。かくしてここに上述の條件を悉く具えた問題が成立する。

もう一つの事例。次にエッジワース[註6]は、同種の問題の一例としてさらに劇的な次のような事例を考えた。いま二人の極地探險家ナンセンとヨハンセンがいる。橇が一臺しかないのだが、何らかの不思議な理由でナンセンはそれを東西の方角にのみ走らせることができ、ヨハンセンは南北の方角にのみ走らせることができる。いわばナンセンは「經度」の變數のみを自由にでき、ヨハンセンは「緯度」の變數のみを自由にできるわけである。さて、そうした上で、ナンセンの關心事は海拔最高の地點を探ることにあり、ヨハンセンの關心事は海面下最深の地點を探ることにあると想像しよう。明かに最

高の高さも最深の深さも經度と緯度の双方に依存するから、この問題にはふたたびそれぞれの主體の自由にできない變數が含まれることになり、同様の問題が成立する。

以上の問題の特徴は、重ねて言えば、各主體の極大にすべき函數の中に必ず自分一個の意思によつては勝手に動かせない變數が登場して、しかもそれが相手方の自由に動かせる變數である點に存するから、つまるところこの種の問題においては、自分にとつての結果の如何は相手の行動如何に依存し、それと同時に自分の行動もまた相手の結果に影響を及ぼすことになる。すなわち、一口に言つて、主體の行動の間のこういう不確實な相互依存の關係がこの種の問題の本質をなすのである。では、そういう不確實な駆引の世界で合理的ならんとする主體はいかに行動するか。それは經濟理論では古くから複占や双方獨占の問題として論ぜられてきたところであつた。そしていま遊戲の理論が固有に取扱う問題も、その哲學的側面においては之から遠く相距たるものではないのである。

遊戲の問題そのものの説明に進もう。始めに若干の用語の説明。遊戲論においては種々の言葉が日常におけるよりもヨリ限定された意味で用いられる。まずこの理論でゲイム（game）というのは、嚴密にはそれを規定するあらゆるルールの總體のことである。ノイマン＝モルゲンシュテルンは、この意味でのゲイムという言葉を、それのある特定の實現の仕方であるプレイ（play）という言葉と注意深く區別している。こう言うと分り難いが、要するに百科辭典をひいて「將棋とは……というゲイムである」という場合のゲイムがノイマン＝モルゲンシュテルンの意味するゲイムであり、これに對して新聞で「昨日の○○名人と××八段との對戰」という場合のその勝負の始めから終りまでの記錄が特定のプレイであるというわけである。同様の區別はまたムーヴ（move）とチョイス（choice）という言葉についてもなされている。ゲイムの各プレーヤーはそれぞれそのゲイムの規則が許すいくつかの手に依つて行動するが、一局面毎のそのような手の可能性の束がムーヴであり、それらの可能性の中實際にある特定の手が選ばれるのがチョイスである。從つて、ゲイムはムーヴの連續から成り、プレイはチョイスの歴史であるということができる。

「ゲイムはプレーヤーの數によつて、一人ゲイム（one-person game）、二人ゲイム（two-person game）、……、n人ゲイム（n-person game）というように分類される。但しここでいうプレーヤーの數とは、ゲイムに參加する個人の數ではなく、利害關係を同じくする個々人から成るグループの數をいうのであるから注意を要する。例えば、四人の個人が參加するにしても、それが二人ずつの味方を組んで二組の間で戰われるとすれば、二人ゲイムである。次にゲイムはまた各プレーヤーの得點の合計がつねに一定であるかどうかによつて一定和のゲイム（constant-sum game）とそうでないものに分たれる。すなわち、n人のプレーヤーの得點をそれぞれπ_1、π_2、……、π_nとすると、

$$\pi_1+\pi_2+\cdots\cdots+\pi_n=C\ \text{（常數）}$$

であれば、それは一定和ゲイムである。さらに一定和のゲイムで、各人の得點を便宜上C/nからの乖離で表せば、その新しい得點の合計は必ず零となる。このように

$$\pi_1+\pi_2+\cdots\cdots+\pi_n=0$$

であるようなゲイムを零和のゲイム（zero-sum game）と呼ぶ。零和ゲイムにおいては、誰かが得をすれば必ず他の誰かが損をするから、利害の對立が最も明白である。經濟の世界では各主體の行動如何によつて全生産物の大きさが左右されることが多いから、一定和でないゲイムあるいは同じことに歸するが零和でないゲイムが屡重要である。しかし、本稿は遊戲論と線形計畫論との關連を主題とするから、われわれが以下でとりあげるのはもつぱら零和かつ二人のゲイム（zero-sum two-person game）である。

さて、あるゲイムはムーヴ→チョイスという形で逐次そのプレイを開展するわけだがそのようなタームでゲイムを敍述するのは多くの記號を含んで甚だ煩雜となる。そこでノイマン＝モルゲンシュテルンは、それに代えてヨリ簡單なしかも結果において同等なストラテジー（strategy）の概念による再述を行つた。このストラテジーという言葉は通常、戰略とか術策とかいう意味であるけれども、ここでも著者たちはそれを一層限定された意味に用いているから、いささか立入つて説明しよう。ストラテジーというのは、あるプレーヤーがありとあらゆるムーヴのそれぞれについて、どういうチョイスを行うかを隈なく特定化した包括的なプランのことである。こう言つたら分り易いかもしれない。いまかりにプレーヤー甲が、自分でゲイムをする代りに誰か代理人を送つてそれを代行させると考えよう。この代理人は自分では何らの創意をも挿まず、すべて甲の指令に基づいて教えられたとおりを機械的に行うが、その反面記憶力は完璧で與えられた指針を悉く暗記できると想定する。そこで甲はおよそ考え得る一切のムーヴについて、そのそれぞれの場合にはこれこれのチョイスをするように、という指針を洩れなくその代理人に與えるのである。そのとき甲は、代理人に一つの特定のストラテジー——例えば、ストラテジー3——を與えたということになる。同様に甲の敵手乙もまた彼の代理人にあるストラテジー——例えば、ストラテジー7——を與えたとする。かくしてそれらの二人の代理人が（アムパイアの前で）それぞれ指令されたストラテジーに基づき行動すれば、ゲイムのそのプレイの結果は決定する。何故なら、それら二つのストラテジーのそれぞれがあらゆる可能な場合について、どうすべきかの網羅的な指針を含んでいるからである。そこで甲がストラテジー3をとり乙がストラテジー7をとるとすれば、甲乙の得點π_1、π_2は

$$\pi_1=\pi_1(3,\ 7)$$

$$\pi_2=\pi_2(3,\ 7)$$

という風に、それらのストラテジーによつて完全に規定されるのである。[註7]

大抵のゲイムにおいては各プレーヤーについて數多くのストラテジーがある。そこでいまプレーヤー甲については、m個のストラテジー1、2、……、mがあり、プレーヤー乙についてはn個のストラテジー1、2、……、nがあると考えよう。そうすると、さきの議論に從つて、例えば甲が第5番目のストラテジーをとり、乙が第8番目のストラテジーをとるとき、そのプレイの得點は甲にとつて

第一表

甲＼乙	1	2	…	n
1	$\pi_1(1,\ 1)$ $\pi_2(1,\ 1)$	$\pi_1(1,\ 2)$ $\pi_2(1,\ 2)$	… …	$\pi_1(1,\ n)$ $\pi_2(1,\ n)$
2	$\pi_1(2,\ 1)$ $\pi_2(2,\ 1)$	$\pi_1(2,\ 2)$ $\pi_2(2,\ 2)$	… …	$\pi_1(2,\ n)$ $\pi_2(2,\ n)$
⋮	⋮	⋮		⋮
m	$\pi_1(m,\ 1)$ $\pi_2(m,\ 1)$	$\pi_1(m,\ 2)$ $\pi_2(m,\ 2)$	… …	$\pi_1(m,\ n)$ $\pi_2(m,\ n)$

第二表

甲＼乙	1	2	…	n
1	$\pi_1(1,\ 1)$	$\pi_1(1,\ 2)$	…	$\pi_1(1,\ n)$
2	$\pi_1(2,\ 1)$	$\pi_1(2,\ 2)$	…	$\pi_1(2,\ n)$
⋮	⋮	⋮		⋮
m	$\pi_1(m,\ 1)$	$\pi_1(m,\ 2)$	…	$\pi_1(m,\ n)$

$\pi_1(5,\ 8)$、乙にとって $\pi_2(5,\ 8)$ となるのであるから、われわれは双方のストラテジーのいろいろの組合せについて前記のような得點表をつくることができる。第一表參照。

ところで、もしそのゲイムが零和のゲイムであれば、われわれはこの表の中に二人の得點をともに掲げる必要はなくなる。何故なら、π_1が知られれば、π_2はマイナスπ_1として立ちどころに知られるからである。故に得點表は甲のみについて第二表のように記せば足りる。われわれは以下記號の簡單化のために

$$\pi_1(i,\ j) = a_{ij}$$

と記すことに決めて、甲の得點表を

$$(1)\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

という行列で示すことにしよう。得點（取得する金額）のことを遊戯論の用語ではペイ・オフ（pay-off）というから、この行列は曆ペイ・オフ行列あるいはゲイム行列と呼ばれる。

甲、乙は言うまでもなく各自の得點を極大ならしめようと努力する。しかし零和のゲイムでは、乙の得點は甲の得點にマイナスをつけた大きさであるから、乙が自分の得點を極大ならしめるとは實は敵手たる甲の得點を極小ならしめることに等しい。それ故、この場合の二人の行動様式は次のように述べることができる。すなわち、甲はさきのゲイム行列に基づいてa_{ij}を極大ならしめる主體（maximizer）として行動し、乙は同じくa_{ij}を極小ならしめる主體（minimizer）として行動する。さて、二人がこのように正面から衝突する目的で行動する場合、彼等の則るべき行動はどのようなものであつたらよいか。零和二人遊戯論の核心はまさにこの問題の解決に存している。

ノイマン＝モルゲンシュテルンは、次のような形でこの問題を解こうと試みた。いまかりに甲が彼の1というストラテジーを選ぶとすれば、萬一それが乙に露見するにしても、ともかく甲はゲイム行列第一行の得點a_{11}、a_{12}、……、a_{1n}の中で極小のものだけは得ることができる。また同じく、甲が2というストラテジーを選ぶとすれば最悪の場合でも、第2行の得點a_{21}、a_{22}、……、a_{2n}の中で極小のものだけはその獲得が保證され、以下殘りのストラテジーについてもみな同様である。從つて甲は、たとえ乙がどのように行動しようとも、少くとも

$$(2)\quad \begin{aligned} \min_j a_{1j} &= \min\,(a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}) \\ \min_j a_{2j} &= \min\,(a_{21}, a_{22}, \cdots a_{2n}) \\ &\cdots \\ \min_j a_{mj} &= \min\,(a_{m1}, a_{m2}, \cdots a_{mn}) \end{aligned}$$

という得點の何れかは間違いなく獲得することができる。そして言うまでもなく、甲はその中で極大のものを自主的に選べるから、

$$(3)\quad \max_i \min_j a_{ij} = \max(\min_j a_{1j}, \min_j a_{2j}, \min_j a_{mj})$$

という得點が、乙の出方如何を問わず、甲の獲得できる最大限の得點である。次に乙の觀點に立つて考えよう。いま乙が彼の1というストラテジーを選ぶとすれば、最悪の場合でも、彼は甲の得點を第1列a_{11}、a_{21}、……、a_{m1}の中、せいぜい極大のものに喰止めることができる。他のストラテジーについても同様に考えれば、乙は、甲がどう行動しようと、甲の得點を

$$(4)\quad \begin{aligned} \max_i a_{i1} &= \max\,(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) \\ \max_i a_{i2} &= \max\,(a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}) \\ \max_i a_{in} &= \max\,(a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

の中の何れかに釘付けにすることができる。そして言うまでもなく、乙はその中で極小のものを自主的に選べるから、明かに

$$(5)\quad \min_j \max_i a_{ij} = \min\,(\max_i a_{i1}, \max_i a_{i2}, \cdots, \max_i a_{in})$$

という得點が、甲の出方如何を問わず、乙が喰止め得る甲の最小限の得點である。

甲や乙のこのような行動は、それぞれ自らにとつて最悪の場合を豫想して、その下でそれに對處すべき最善の措置を狙つたいわば「保守的」（あるいは「悲觀的」といつてもよい）な行動である。可能な行動は勿論これに限つたことはないが、しかし、もし双方のプレーヤーが相互に完璧な敵手に當面していると假想すれば、これ以上に「安全」な方策は望めないであろう。換言すれば、いずれかのプレーヤーが上述の方策をとるかぎりは、いかに優れた敵手といえども、その轂を打破ることはできないのである。

繰返して言えば、$\max_i \min_j a_{ij}$ は、乙がいかに完璧に行動したとしても、甲が確實に獲得し得る得點であり（乙がへまをやれば甲の得點はそれ以上にこそなれ、それ以下になることは絶對にない）また $\min_j \max_i a_{ij}$ は、甲がいかに善戰しても、それ以上は乙に喰止められて獲得できない得點である（甲がへまをやれば勿論彼の得

點はそれ以下に下る)。それ故、甲、乙の双方が上述の行動をとるとすれば、$\operatorname{Max}_i \operatorname{Min}_j a_{ij}$ と $\operatorname{Min}_j \operatorname{Max}_i a_{ij}$ とはそれぞれ甲の得點の下限と上限とを劃するといつてよいであろう。さて、たまたまこの上限下限が一致して

$$\operatorname{Max}_i \operatorname{Min}_j a_{ij} = \operatorname{Min}_j \operatorname{Max}_i a_{ij} = V \tag{6}$$

ということが起つたとしよう。その場合には、甲は少くとも必ずVを得ることはできるが、また同時にV以上を得ることは乙によつて妨げられる。故に彼はこのVという得點に甘んずることに決め、上述の行動を通じてそれを實現せしめるであろう。他方、乙もまた、この場合は明かにマイナスVに固執するのが得策であろう。このような事態が甲の第i_0番目のストラテジーと乙の第j_0番目のストラテジーについて生じたとき、その (i_0, j_0) がゲイムの鞍點 (saddle point) であり、それに應ずるVの値がゲイムの値 (value) である。何故極小中の極大と極大中の極小との合致點を鞍點と言うかは、その名前の起りである馬の鞍を考えれば容易に分る。いま一匹の蠅が馬の尻から頭に向つて眞直ぐに進むとすれば、その方向に沿うすべての進路は必ず一個ずつの極小點をもち、その極小點の中で最も高い位置にあるのは鞍の中心を通過する進路のそれである。次にまた同じ蠅が今度は馬の左の横腹から右の横腹へと進むとすれば、すべての進路は必ず一個ずつの極大點をもち、その極大點の中で最も低い位置にあるのはふたたび鞍の中心を通過する進路のそれである。かくして鞍の中心は、極小の極大と極大の極小とが相互に出合う點となる。

さて、そのような鞍點の存在は、あくまでゲイム行列の特定の性質に基づく偶然であつて、一般には必ずそれが存在する保證はない。例えば

$$\overset{(イ)}{\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}, \quad \overset{(ロ)}{\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

という二つの行列を考えてみよう。行列(イ)においては、各行の極小は−2 0 2、故に極小の極大は2であり、各列の極大は2 5 6、故に極大の極小は2であるから、極小の極大と極大の極小とは相等しく、(3, 1) という鞍點が存在する（2のある行の番號と列の番號）。しかるに、行列(ロ)においては、各行の極小は同じく−2 0 2、故に極小の極大は同じく2であるが、各列の極大は3 5 6、故に極大の極小は3であるから、もはや極小の極大と極大の極小とは相異なり、いかなる鞍點も存在しない。從つて、(イ)の場合は、二人のプレーヤーが既述の行動をとる以上、彼等は必ずその鞍點に落着くが、(ロ)の場合は、そういうことはなく、不確定性を免れることはできない。(プレーヤー甲が彼のストラテジー3をとつたとき、(イ)の場合には、プレーヤー乙は彼のストラテジー1をとらざるを得ず、しかもそのとき甲は當初のストラテジー3を變更する誘因をもたない。しかるに(ロ)の場合には、甲のストラテジー3に對して乙はストラテジー2をとるから、甲はストラテジー1に移るのが有利となり、そこでそれを實行すれば、乙はまたストラテジー3に手を替え、甲はさらにストラテジー2に移る等々以下どうどうめぐり)。

この不確定性の存する場合の各プレーヤーの行動はいかなるものであるべきか。ノイマン＝モルゲンシュテルンはさらに次のように推理を進めた。さきに各プレーヤーが Max Min および Min Max の方策をとつたのは、もともと彼等の手がそれぞれの敵手に漏洩することをおもんぱかつてのことであつた。それではさらにこの哲學をつきつめて、それが漏洩しないような措置を未然に講じ得ないものであろうか。そのような措置が一つある。それは自分のストラテジーの決定を全くのチャンスの採擇に委せることに他ならない。ということをもつと易しく言えば、自分がどういうストラテジーを出すかを、いざその場になつて銅貨を投げるか骰子を振るかして決めよということである。その場合には、あらかじめ自分自身にも何を出すかが分らないのであるから、敵手にそれが漏洩する筈のないことは明かである。

しかし、その場合にも、各プレーヤーはそれぞれのストラテジーに何らかの確率を付することが必要となる。例えば、いま甲は自分のストラテジーの番號をそれぞれ紙片に記して帽子の中に入れ、それをよく攪きまぜてからその中の一つを任意に選んで自分のストラテジーを決めるとしよう。そのとき、どのストラテジーが出るかは言うまでもなくチャンスの問題だが、しかしそれぞれの番號を記した紙片を何枚ずつ帽子の中に入れるかは、前以て彼の決定するところでなければならない。すなわち、この場合、甲はさきのようにある一つのストラテジーを自主的に決めるのではなく、すべてのストラテジーの確率を決めるのである。遊戯論の用語では、さきの場合を純粋ストラテジー (pure strategy) と呼ぶのに對し、今度の場合を混合ストラテジー (mixed strategy) と呼ぶ。乙についても同樣である。

各プレーヤーが混合ストラテジーをとる場合は次のように定式化される。いま甲は彼の1、2、…、mというストラテジーをそれぞれp_1、p_2、…、p_mの確率で混合し、乙は彼の1、2、…、nというストラテジーをそれぞれq_1、q_2、…、q_nの確率で混合すると考えよう。ここでp_iやq_jは言うまでもなく非負であり、かつ

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$$
$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$$

である。そのとき、甲の得點の期望値は明かに

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,p_i q_j = {} & a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + \cdots + a_{1n}p_1q_n \\ & + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 + \cdots + a_{2n}p_2q_n \\ & + \cdots + \cdots + \cdots \\ & + a_{m1}p_mq_1 + a_{m2}p_mq_2 + \cdots + a_{mn}p_mq_n \end{aligned} \tag{7}$$

であるから、萬一の事態をおもんぱかるというさきの哲學を貫けば、甲は乙が

$$\operatorname{Min}_j (a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots a_{mj}p_m) \tag{8}$$

となるようなq_jを1として他のq_jをすべて0とするような手に出ることを豫期しなければならない。それが甲の豫期し得る最悪の事態である。それ故、甲は(8)を極大ならしめるように彼のp_1、p_2、…、p_mを選ぶであろう。同樣に、乙は

(9)　$\underset{q}{\mathrm{Max}}(a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\cdots+a_{in}q_n)$

を極小ならしめるように彼のq_1、q_2、…、q_nを選ぶであろう。かくして、混合ストラテジーの場合の各プレーヤーの行動は、甲（maximizer）については

(8)　$\underset{j}{\mathrm{Min}}(a_{1j}p_1+a_{2j}p_2+\cdots+a_{mj}p_m)$

を

(10)　$p_1+p_2+\cdots+p_m=1$

(11)　$p_1\geqq 0, p_2\geqq 0, \cdots, p_m\geqq 0$

に服しつつ極大ならしめることとして、また乙（minimizer）については

(9)　$\underset{i}{\mathrm{Max}}(a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\cdots+a_{in}q_n)$

を

(12)　$q_1+q_2+\cdots+q_n=1$

(13)　$q_1\geqq 0, q_2\geqq 0, \cdots, q_n\geqq 0$

に服しつつ極小ならしめることとして述べられる。

われわれは、さきに純粋ストラテジーの場合には、必ずしもつねに問題の解が存在しないことを知つた。ノイマンの遊戲論に對する最も重要な貢獻は、混合ストラテジーの場合には必ず解が存在することを明かならしめたことである。嚴密な證明はここでは一切省くが、簡單な數字例に徴してみてもその結論だけは容易に確證することができる。例えば

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

という行列を甲のペイ・オフ行列と考えてみる。純粋ストラテジーの場合には、明かにこの行列は鞍點をもたない。しかるに、いま甲はp_1、p_2（1マイナスp_1）という混合ストラテジーを用い、乙はq_1、q_2（1マイナスq_1）という混合ストラテジーを用いると考え、いくつかのp_1、q_1の値を試みに選んで甲のペイ・オフの期望値の行列を拵えてみると（計算については(7)參照）、

$$\begin{array}{cc} & q_1 \\ & \begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \\ p_1\ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 2\frac{1}{3} & 1\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} & 1\frac{2}{3} & 1\frac{2}{3} & 1\frac{2}{3} \\ 1 & 1\frac{2}{3} & 2\frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

となつて、明かに$p_1=2/3$、$q_1=1/3$という鞍點のあることが判明する。

さて、ストラテジーの數が少しでも多くなれば、このような摸索で鞍點を求めるのは殆ど絶望的に困難である。それでは一般の場合に、われわれはどうしたらそういう鞍點を探知できるか。すなわち、どうしたら最適の混合ストラテジーを計算できるか。本稿の主題はここから始まる。

（註1）　J. von Neumann, "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen* 1928, pp. 295–320. J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1st ed. 1944, 2nd ed. 1947.

（註2）　眼にふれた言葉を摘記しておく。「こういう書物がもう十册も現われれば經濟學の進展は疑いない」（マルシャック）、「ケインズの『一般理論』以來最も重要な經濟學の業績」（ストーン）、「後世の人々はこの書物を二十世紀前半の主要な科學的業績の一つと看做すであろう」（コープランド）。以上に對して否定的な評價としては、「經濟理論の革新か？」（ケイセン）、「遊戲の理論は理論の遊戲である」（日本の一經濟學者）など。

（註3）　線形計畫論との關連については、本稿第三節以下參照。統計的推定の理論に遊戲論のアイディアを適用したのはヴルトを以て嚆矢とする。ヴルトは推定の問題を統計學者と自然との間の二人遊戲問題として定式化した。A. Wald, "Statistical Decision Function", *Annals of Mathematical Statistics*, 1949, pp. 165–205 參照。

（註4）　比較的初期の中に公けにされた優れた解說文獻としては L. Hurwicz, "The Theory of Economic Behavior", *American Economic Review*, December 1945, pp. 909–925（のちに AEA, *Readings in Price Theory*, 1952, pp. 505–526 に再錄）および J. Marschak, "Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics", *Journal of Political Economy*, April 1946, pp. 97–115 をあげたい。J. C. C. McKinsey, *Introduction to the Theory of Games*, 1952 はイントロダクションといつてもかなりに高級な書物である。素人のための最もくつろいだ漫畫入りの解說書としては J. McDonald, *Strategy in Poker, Business and War*, 1950 と J. D. Williams, *The Complete Strategyst*, 1954 の二書が甚だ面白い。また一般には利用不可能であるが、P. A. Samuelson, "Game Theory and Linear Programming", *The RAND Corporation October* 1949 も有益な解說論文であつて、本節の敍述はその極めて多くをこれに負うている。

（註5）　A. Cournot, *Recherches sur les principles mathématiques de la théorie des richesses*, 1883, Chapitre VII（中山伊知郎譯、クールノー『富の理論の數學的原理に關する研究』岩波文庫第七章）參照。

（註6）　F. Y. Edgeworth, "The Pure Theory of Monopoly", *Papers Relating to Political Economy*, Vol. I, pp. 124–6. これは *Giornale Degli Economisti*, 1897 所載の同名論文の英譯である。

（註7）　これについては次の二つの注意が必要であろう。まず第一の注意。もしもそのゲイムが數値で表せる得點を與えず單なる

勝・敗のみを與えるものであれば、例えば甲の勝の場合は　$\pi_1=+1=-\pi_2$　乙の勝の場合は　$\pi_1=-1=-\pi_2$　引分けの場合は　$\pi_1=0=\pi_2$　などと約束しておかなければならないであろう。次に第二の注意。この注意の方がより重要である。もしもそのゲイムが各プレーヤーの自主的に決め得るムーヴ（personal move）のみならず、何らかのチャンスに依存するムーヴ（chance move）をも含むならば（例えばトランプの札を配つたり骰子で順番を決めたりするムーヴ）、言うまでもなく各プレーヤーの得點は一義的な値ではなくてある確率分布をもつ。故にそれを一つの値に直すには、（例えば）數學的希望値

$$E[\pi_1(3,7)]=\sum p_i\pi_1$$

のような配慮が必要であろう。

三、遊戯問題の線形計畫問題への轉換

われわれはすでに線形計畫問題の解法として Simplex Method を知つている。[註1] それ故、もし上述の零和二人遊戯問題が何らかの線形計畫問題に轉換できるならば、われわれはこの方法によつて最適ストラテジーを計算することができるであろう、[註2] そこで本節では、この轉換のできることを説明する。

便宜上、乙（minimizer）の行動から考えよう。いま前節の

(9)　$$\mathrm{Max}(a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+\cdots+a_{in}q_n)=V$$

とおけば、乙の行動としてさきに述べたところは、次のように再述される。すなわち、乙はVを

(14)
$$\begin{aligned}&a_{11}q_1+a_{12}q_2+\cdots+a_{1n}q_n\leqq V\\&a_{21}q_1+a_{22}q_2+\cdots+a_{2n}q_n\leqq V\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{m1}q_1+a_{m2}q_2+\cdots+a_{mn}q_n\leqq V\end{aligned}$$

および

(12)　$$q_1+q_2+\cdots+q_n=1$$

(13)　$$q_1\geqq0,\ q_2\geqq0,\ \cdots q_n\geqq0$$

に服しつつ極小ならしめる。ここでVが正であると假定すれば、われわれは(14)(12)(13)のすべての兩邊をVでわつて不等號の向きをそのままにしておくことができる。そこで、そのようにした上で、

(15)　$$\frac{q_j}{V}=x_j\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

と定義しよう。そのときには(14)(12)(13)はそれぞれ

(16)
$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqq1\\&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqq1\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqq1\end{aligned}$$

(17)　$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{1}{V}$$

(18)　$$x_1\geqq0,\ x_2\geqq0,\cdots,x_n\geqq0$$

と書換えられる。(17)から、Vを極小ならしめることは　$x_1+x_2+\cdots+x_n$　を極大ならしめることに等しいことが直ちに分る。すなわ

ち、乙の問題は

(17)　$$Z=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

を

(16)
$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqq1\\&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqq1\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqq1\end{aligned}$$

(18)　$$x_1\geqq0,\ x_2\geqq0,\cdots,x_n\geqq0$$

の制約の下で極大ならしめることになる。そして、これは典型的な線形計畫の極大問題に他ならない。故に、われわれの遊戯の minimizer 乙の問題は線形計畫の極大問題に轉換されたのである。同樣に、前節の

(8)　$$\mathrm{Min}(a_{1j}p_1+a_{2j}p_2+\cdots+a_{mj}p_m)=\overline{V}$$

とおき、かつ$\overline{V}$が正であると假定して

(19)　$$\frac{p_i}{\overline{V}}=y_i\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

と定義すれば、甲の問題は

(20)　$$\overline{Z}=y_1+y_2+\cdots+y_m$$

を

(21)
$$\begin{aligned}&a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m\geqq1\\&a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m\geqq1\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m\geqq1\end{aligned}$$

(22)　$$y_1\geqq0,\ y_2\geqq0,\cdots,y_m\geqq0$$

の制約の下で極小ならしめることに歸せられる。これは典型的な線形計畫の極小問題であつて、かつそれは乙の極大問題に双對的な極小問題である。かくして maximizer 甲の問題は、[註3] 乙の線形計畫問題に双對的な線形計畫問題に轉換されたのである。

ところで以上の轉換は、Vおよび$\overline{V}$が正であることを假定するから、一應そのような假定から自由な轉換を次に考察してみよう。[註4] まず乙に關する(14)の不等式を擬制的な變數の導入によつて次の等式に書換える。

(23)
$$\begin{aligned}&a_{11}q_1+a_{12}q_2+\cdots+a_{1n}q_n+v_1=V\\&a_{21}q_1+a_{22}q_2+\cdots+a_{2n}q_n+v_2=V\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{m1}q_1+a_{m2}q_2+\cdots+a_{mn}q_n+v_m=V\end{aligned}$$

そうした上、(23)の第一式をそれぞれ第二式以下から差引き、かつ(12)(13)を併せて考慮すれば、われわれは次のような線形計畫問題を得る。すなわち、

(24)　$$V=a_{11}q_1+a_{12}q_2+\cdots+a_{1n}q_n+1v_1$$

を

$$(a_{21}-a_{11})q_1+(a_{22}-a_{12})q_2+\cdots+(a_{2n}-a_{1n})q_n$$
$$-1v_1+1v_2=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{25}$$
$$(a_{m1}-a_{11})q_1+(a_{m2}-a_{12})q_2+\cdots+(a_{mn}-a_{1n})q_n$$
$$-1v_1+1v_m=0$$
$$q_1+q_2+\cdots+q_n=1$$

および

$$\begin{aligned} &q_1\geqq 0,\ q_2\geqq 0,\ \cdots,\ q_n\geqq 0 \\ &v_1\geqq 0,\ v_2\geqq 0,\ \cdots,\ v_m\geqq 0 \end{aligned} \tag{26}$$

の制約の下で極小ならしめること。

一方、甲に關しても同様の仕方で極大計畫問題が導かれるが、併せてこの轉換の缺點は、このようにして導かれる甲と乙の計畫問題がそれぞれ相互に双對性の關係で結ばれないことである。

そこで最後にもう一つ異つた轉換を試みてみよう。(註5) いま(14)のVをも一つの變數と看做してq_{n+1}と記すならば、それが非負であるという假定の下では、乙の遊戯問題は

$$0q_1+0q_2+\cdots+0q_n+1q_{n+1} \tag{27}$$

を

$$-a_{11}q_1-a_{12}q_2-\cdots-a_{1n}q_n+1q_{n+1}\geqq 0$$
$$-a_{21}q_1-a_{22}q_2-\cdots-a_{2n}q_n+1q_{n+1}\geqq 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{28}$$
$$-a_{m1}q_1-a_{m2}q_2-\cdots-a_{mn}q_n+1q_{n+1}\geqq 0$$
$$1q_1+1q_2+\cdots+1q_n+0q_{n+1}=1$$

および

$$q_1\geqq 0,\ q_2\geqq 0,\ \cdots,\ q_n\geqq 0,\ q_{n+1}\geqq 0 \tag{29}$$

の下で極小ならしめる計畫問題となる。同様に甲の遊戯問題も、$\overline{V}=p_{m+1}\geqq 0$　を假定すれば

$$0p_1+0p_2+\cdots+0p_m+1p_{m+1} \tag{30}$$

を

$$-a_{11}p_1-a_{21}p_2-\cdots-a_{m1}p_m+1p_{m+1}\geqq 0$$
$$-a_{12}p_1-a_{22}p_2-\cdots-a_{m2}p_m+1p_{m+1}\geqq 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{31}$$
$$-a_{1n}p_1-a_{2n}p_2-\cdots-a_{mn}p_m+1p_{m+1}\geqq 0$$
$$1p_1+1p_2+\cdots+1p_m+0p_{m+1}=1$$

および

$$p_1\geqq 0,\ p_2\geqq 0,\ \cdots,\ p_m\geqq 0,\ p_{m+1}\geqq 0 \tag{32}$$

の下で極大ならしめる計畫問題となる。この場合は明かに二つの計畫問題は相互に双對的である。

以上三つの轉換法の中、第一のものはV（および$\overline{V}$）が正であることを假定し、第三のものはそれが非負であることを假定する。しかし、これは何ら制約的な假定ではない。何故なら、われわれは、最適ストラテジーp、qの値を少しも變えることなく、ゲイム行列のすべての因子に任意の正數を共通に加えることができるからである。從つて、われわれは、望むならばゲイム行列のすべての因子を正にすることができ、ゲイムの値を正にすることができる。このことを考慮すれば、非對稱的な取扱いを含む第二の方法よりも、第一、第三の方法の方がより望ましいと言うことができよう。

（註1）前掲「線形計畫論・Simplex Method」（三田學會雜誌第四十九卷第一號參照）。

（註2）本節については、G. B. Dantzig, "A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem", *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951, pp. 330-332, R. Dorfman, "Application of the Simplex Method to a Game Problem", *ibid.*, pp. 349-350, K. S. Lomax, "Allocation and Programming in Modern Economics", *Manchester School of Economics and Social Studies*, September 1953, pp. 210 ff., P. A. Samuelson, "Interrelation between Linear Programming and Game Theory", *The RAND Corporation*, November 1953, pp. 2-13 など參照。

（註3）Dantzig, *op. cit.*, pp. 331-332. これらの問題が解かれるならば、双對性定理によつて　Max $\overline{Z}$ = Min Z であるから、直ちに　Min V=Max $\overline{V}$　であることが判明する。

（註4）Dantzig, *op. cit.*, p. 331.

（註5）Samuelson, *op. cit.*, pp. 4-9.

四、線形計畫問題の遊戯問題への轉換

續つて線形計畫問題の遊戯問題への轉換を考えよう。(註1) 典型的な線形計畫問題から出發すると、それは、われわれのすでに知るように、次の如くに記される。

極大問題。

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqq b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqq b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{33}$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqq b_m$$

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdots,\ x_n\geqq 0 \tag{34}$$

の下で

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=Z \tag{35}$$

を極大ならしめること。

極小問題（双對）。

$$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m\geqq c_1$$
$$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m\geqq c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{36}$$
$$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m\geqq c_n$$

$$y_1\geqq 0,\ y_2\geqq 0,\ \cdots,\ y_m\geqq 0 \tag{37}$$

の下で

$$b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m=\overline{Z} \tag{38}$$

を極小ならしめること。

さて、これらn變數の計畫問題とm變數の計畫問題とを合併して（$n+m$）變數に擴大された計畫問題を考えてみることにする。す

なわち(33)(34)(36)(37)のすべてを充しつつZマイナス$\bar{Z}$を極大ならしめる問題が之である。適當に符號を考慮すれば、この新しい問題は次のように記される。

$$
(39)\quad
\begin{aligned}
&0y_1+\cdots+0y_m+a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\leqq b_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&0y_1+\cdots+0y_m+a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\leqq b_m\\
&-a_{11}y_1-\cdots-a_{m1}y_m+0x_1+\cdots+0x_n\leqq -c_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-a_{1n}y_1-\cdots-a_{mn}y_m+0x_1+\cdots+0x_n\leqq -c_n
\end{aligned}
$$

$$(40)\quad y_1\geqq 0,\ \cdots,\ y_m\geqq 0,\ x_1\geqq 0,\ \cdots,\ x_n\geqq 0$$

の下で

$$(41)\quad -b_1y_1-\cdots-b_my_m+c_1x_1+\cdots+c_nx_n=Z-\bar{Z}$$

を極大ならしめること。

この問題は言うまでもなくもとの二つの問題を含むから、Zマイナス$\bar{Z}$を極大にするのは、Zおよび$\bar{Z}$をそれぞれ極大および極小にするのと等義である。そして双對性の定理から、もとの問題がそれぞれ解ければ、その最適解については$Z=\bar{Z}$であるから、われわれの擴大された問題においても、その最適解については$Z-\bar{Z}=0$であると言うことができる。ところで$Z-\bar{Z}=0$であることは、$Z-\bar{Z}\geqq 0$と$Z-\bar{Z}\leqq 0$が同時に成立つことに他ならず、その中、不等號が$\wedge$の向きになることは最適解に關するかぎり排除される。故に、われわれは(41)の極大という條件を、一應$\vee$の向きの不等號はそのまま さしさわりなく含ましめておいて

$$(42)\quad -by_1-\cdots-by_m+c_1x_1+\cdots+c_nx_n\geqq 0$$

の形に置換えることができる。そう置換えた上で、いま(39)(40)(42)の兩邊にすべて任意の正數kをかけ、かつ

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
&ky_i=z_i && (i=1,2,\cdots,m)\\
&kx_j=z_{m+j} && (j=1,2,\cdots,n)\\
&k=z_{m+n+1}
\end{aligned}
$$

とおいてみよう。そのとき、われわれの(39)(42)および(40)は

$$
(44)\quad
\begin{aligned}
&0z_1+\cdots+0z_m+a_{11}z_{m+1}+\cdots+a_{1n}z_{m+n}-b_1z_{m+n+1}\leqq 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&0z_1+\cdots+0z_m+a_{m1}z_{m+1}+\cdots+a_{mn}z_{m+n}-b_mz_{m+n+1}\leqq 0\\
&-a_{11}z_1-\cdots-a_{m1}z_m+0z_{m+1}+\cdots+0z_{m+n}+c_1z_{m+n+1}\leqq 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-a_{1n}z_1-\cdots-a_{mn}z_m+0z_{m+1}+\cdots+0z_{m+n}+c_nz_{m+n+1}\leqq 0\\
&b_1z_1+\cdots+b_mz_m-c_1z_{m+1}-\cdots-c_nz_{m+n}+0z_{m+n+1}\leqq 0
\end{aligned}
$$

および

$$(45)\quad z_1\geqq 0,\ \cdots,\ z_m\geqq 0,\ z_{m+1}\geqq 0,\ \cdots,\ z_{m+n}\geqq 0,\ z_{m+n+1}>0$$

と書かれる。そしてkは任意の正數であるから、われわれはそれを適當な大きさに選ぶことによつて

$$(46)\quad z_1+\cdots+z_m+z_{m+1}+\cdots+z_{m+n}+z_{m+n+1}=1$$

とすることができる。さて、ここにいたつて、この(44)(46)(45)を前節の(11)(12)(13)と比較し、かつ目下の問題においては$V=0$であることを斟酌すれば、われわれが

$$
(47)\quad
\begin{pmatrix}
0\cdots\cdots0 & a_{11}\cdots a_{1n} & -b_1\\
\vdots\quad\ \ \vdots & \vdots\qquad\ \vdots & \vdots\\
0\cdots\cdots0 & a_{m1}\cdots a_{mn} & -b_m\\
-a_{11}\cdots-a_{m1} & 0\cdots\cdots0 & c_1\\
\vdots\qquad\ \vdots & \vdots\quad\ \ \vdots & \vdots\\
-a_{1n}\cdots-a_{mn} & 0\cdots\cdots0 & c_n\\
b_1\cdots\cdots b_m & -c_1\cdots-c_n & 0
\end{pmatrix}
$$

をペイ・オフ行列とし、$z_1,\cdots,z_{m+n+1}$を minimizer のストラテジーとする一つの遊戲問題に到達したことは全く明かである。そして、その同じ$z_1,\cdots,z_{m+n+1}$がいまの問題では maximizer のストラテジーであることも同樣の考察から容易に判明する。(47)を見て分るように、このペイ・オフ行列はすべてゼロの對角因子をもち、またそれを境としてその上下に位するすべての因子は對稱で符號のみを異にする。そのような行列をもつ遊戲は歪對稱遊戲（skew symmetric game）と呼ばれ、それにおいては maximizer と minimizer のストラテジーは同じであるから、上述の事實は重ねてチェックされる。かくしてわれわれは、當初の線形計畫問題を一つの歪對稱の遊戲問題に轉換したのである。

注意事項。以上の轉換の操作においてkは正數であるから、定義によつてz_{m+n+1}もまた正である。それ故、(45)の中で、z_{m+n+1}のみは嚴格に不等號で規定されている。しかし、出發點となつた二つの計畫問題がZおよび$\bar{Z}$について有界の極値をもつかぎりは、z_{m+n+1}がゼロとなる可能性は排除されてもよい。何故なら

$$(48)\quad Z=\frac{c_1z_{m+1}+\cdots+c_nz_{m+n}}{z_{m+n+1}}$$

$$(49)\quad \bar{Z}=\frac{b_1z_1+\cdots+b_mz_m}{z_{m+n+1}}$$

という關係が成立するからである。

以上、われわれは第三節において任意の遊戲問題が線形計畫問題に轉換され得ることを知り、また第四節においてその線形計畫問題が歪對線の遊戲問題に轉換され得ることを知つた。これで本稿の目的は一應達せられたわけである。しかし、われわれはまたその副產物として、いかなる遊戲問題も歪對線の遊戲問題に轉換され得ることを知つたのである。

（註1）　本節については、D. Gale, H. W. Kuhn, and A. W. Tucker, "Linear Programming and the Theory of Games" *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951, esp. pp. 326–329, G. Dantzig, *op. cit.*, pp. 332–335, P. A. Samuelson, *op. cit.*, pp. 14–22 參照。