Title	遊戯問題の若干の特殊な解法について
Sub Title	Three methods for solving game problems
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1956
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.49, No.5 (1956. 5) ,p.380(70)- 386(76)
JaLC DOI	10.14991/001.19560501-0070
Abstract	
Notes	資料
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19560501-0070

資　料

遊戯問題の若干の特殊な解法について

福　岡　正　夫

はしがき　今日よく知られているように、零和二人遊戯の問題は線形計畫の問題に容易に轉換できるから(註1)、後者を解く解法があれば、前者もまた必ず解ける。われわれはそのような解法として代表的なシンプレックス解法をすでに解説する機會をもつた(註2)。そこで、本稿では、遊戯問題そのものを直接の對象とする他の二三の解法についていささかの説明を附加えておきたいと思う。

（註1）　本誌次號の拙稿「線形計畫論・遊戯論との關係」參照。

（註2）　本誌一月號の拙稿「線形計畫論・Simplex Method」參照。但しこの論稿は、わたくしの現在の觀點からみて非常に不滿足なものであつたから、機會が許せばできるだけ近い中に、全面的に書替えられた改訂稿を用意したいと望んでいる。

1.　ブラウンの Fictitious Play 解法　最初にジョージ・ブラウンの創案になる Fictitious Play 解法をとりあげてみよう(註1)。いまわれわれの零和二人遊戯における maximizer を甲、minimizer を乙と呼び、甲は m 個のストラテジー、乙は n 個のストラテジーをもつと考える。甲にとつてのペイ・オフ行列を通例に従つて

$$(1)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

で表せば、言うまでもなく甲が第 i 番目のストラテジーを選び乙が第 j 番目のストラテジーを選ぶとき、前者の後者に對して支拂わなければならない金額が a_{ij} である。

ところで、これらのプレーヤーが遊戯理論の高等な定理は何ら知つていないとすれば、彼等がそれぞれ、敵手のいままでにとつてきた特定のストラテジーの囘數を考慮しながら、それらの相對的頻度をウエイトとしたペイ・オフの加重平均を極大もしくは極小ならしめると考えることはあながち不自然ではないであろう。そこで、一般に t 番目の局面において甲の選ぶストラテジーを i_t、乙の選ぶストラテジーを、j_t と記し、それまでに甲がある i を選んだ囘數すなわち $(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ の中における i の頻度を $f_i^{(t)}$、乙がある j を選んだ囘數すなわち $(j_1, j_2, \ldots\ldots, j_t)$ 中における j の頻度を $g_j^{(t)}$ とすれば、乙は

$$(2)\quad \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i^{(t)} a_{ij}}{t} \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

を極小ならしめるような j_t を $j=1, 2, \ldots, n$ の中から選び、甲は

$$(3)\quad \frac{\sum_{j=1}^{n} g_j^{(t)} a_{ij}}{t} \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

を極大ならしめるような i_{t+1} を $i=1, 2, \ldots, m$ の中から選ぶと考えるのが、この解法の基本思想である。ひとたび當初において i_1 さえ任意に與えられれば、容易に分るように以上の原則によつて i_1、j_1、i_2、j_2、…の系列が次から次へと決定される。そしていま

$$(4)\quad \begin{aligned} \underline{V}_t &= \mathrm{Min}_j \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i^{(t)} a_{ij}}{t} \\ \overline{V}_t &= \mathrm{Max}_i \frac{\sum_{j=1}^{n} g_j^{(t)} a_{ij}}{t} \end{aligned}$$

と記すならば、$t \to \infty$ となるとき $\underline{V}_t$ と $\overline{V}_t$ とが限りなく接近し、遂に一つの値 V に收斂することが證明されている(註2)。そのVがこの遊戯の値であつて、そのときの

$$(5)\quad \begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \frac{f_i^{(t)}}{t} \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \\ &\lim_{t\to\infty} \frac{g_j^{(t)}}{t} \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

がそれぞれ甲および乙の最適混合ストラテジーすなわち求める問題の解である。

（註1）　George W. Brown, "Iterative Solution of Games by Fictitious Play", *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951, pp. 374—376.

（註2）　Julia Robinson, "An Iterative Method of Solving a Game", *Annals of Mathematics*, September 1951, pp. 296—301.

2.　ノイマンの新解法　次にノイマンの新しい逐次解法を紹介する(註1)。さきと同樣、ペイ・オフ行列を

$$(1)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と記し、また甲および乙の混合ストラテジーをそれぞれ p_1、p_2、…、p_m および q_1、q_2、…、q_n と記す。さらにゲイムの値を V とすれば、よく知られているように、

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i \geqq V \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j \leqq V \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

である。それ故、いま

$$(3)\quad \begin{aligned} U_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j - V && (i=1, 2, \cdots, m) \\ V_j &= V - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i && (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

かつ

$$(4)\quad \begin{aligned} u_i &= \mathrm{Max}\ (0,\ U_i) && (i=1, 2, \cdots, m) \\ v_j &= \mathrm{Max}\ (0,\ V_j) && (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

と定義すると、(2)が充される場合には

$$(5)\quad \begin{aligned} U_i &\leqq 0 && (i=1, 2, \cdots, m) \\ V_j &\leqq 0 && (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

であるから、

$$(6)\quad \begin{aligned} u_i &= 0 && (i=1, 2, \cdots, m) \\ v_j &= 0 && (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

である。故に、さらに

$$(7)\quad \phi = \sum_{i=1}^{m} u_i^2 + \sum_{j=1}^{n} v_j^2$$

とおくと、(2)が充される場合には必ず

$$(8)\quad \phi = 0$$

であり、そして(2)が充されない場合に $\phi > 0$ であることは自明である。從つて、(2)を解くということは、ϕを極小ならしめることと等義である。

そこで、このϕを極小ならしめるような逐次計算の方法を考案するのが、このさいのノイマンの目的である。その計算法は次のようなステップから成つている。まず任意の値p_1^0、p_2^0、…、p_m^0、q_1^0、q_2^0、…、q_n^0、V^0 から出發する（任意といつても $p_i^0 \geqq 0$, $\sum p_i^0 = 1$, $q_j^0 \geqq 0$, $\sum q_j^0 = 1$ が充されなければならないことは言うまでもない。もし他にヒントがなければ

$$p_1^0 = p_2^0 = \cdots = p_m^0 = \frac{1}{m}$$

$$q_1^0 = q_2^0 = \cdots = q_n^0 = \frac{1}{n}$$

を選ぶのが便利であり、そのときV^0は

$$\underset{j}{\mathrm{Min}} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i^0 \leqq V^0 \leqq \underset{i}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j^0$$

であるように選ばれる)。これらの値に基いて(3)(4)からu_i^0、v_j^0を計算し、

$$(9)\quad \begin{aligned} \overline{p_i}^0 &= \frac{u_i^0}{\sum_{i=1}^{m} u_i^0} && (i=1, 2, \cdots, m) \\ \overline{q_j}^0 &= \frac{v_j^0}{\sum_{j=1}^{n} v_j^0} && (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

と定義する（このさい、もし $\sum_{i=1}^{m} u_i^0 = 0$ か $\sum_{j=1}^{n} v_j^0 = 0$ であつたならば、それぞれ

$$(10)\quad \begin{aligned} \overline{p_i}^0 &= p_i^0 && (i=1, 2, \cdots, m) \\ \overline{q_j}^0 &= q_j^0 && (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

と定義する)。さらに

$$(11)\quad \overline{V}^0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \overline{p_i}^0\, \overline{q_j}^0$$

と書くことにすると、われわれはこれら p_i^0、q_j^0、V^0 および $\overline{p_i}^0$、$\overline{q_j}^0$、$\overline{V}^0$の値に基いて、p_i^1、q_j^1、V^1の値を

$$(12)\quad \begin{aligned} p_i^1 &= (1-\theta)\ p_i^0 + \theta\ \overline{p_i}^0 && (i=1, 2, \cdots, m) \\ q_j^1 &= (1-\theta)\ q_j^0 + \theta\ \overline{q_j}^0 && (j=1, 2, \cdots, n) \\ V^1 &= (1-\theta)\ \ V^0 + \theta\ \overline{V}^0 \end{aligned}$$

として求めることができる。ここでノイマンの方法の核心は、(12)の中のθ（$0 \leqq \theta \leqq 1$）をϕがなるべく小となるように決定することにある。そのようなθは、$\overline{p_i}^0$、$\overline{q_j}^0$、$\overline{V}^0$ を(3)に入れて求められる$\overline{U}_i^0$、$\overline{V}_j^0$について

$$(13)\quad C^0 = \sum_{i=1}^{m} (\overline{U}_i^0)^2 + \sum_{j=1}^{n} (\overline{V}_j^0)^2$$

と記すとき、

$$(14)\quad \theta^0 = \frac{\phi^0}{\phi^0 + C^0}$$

として求められる。

何故(14)のθの値がわれわれの要求を充すかは次のような考察から容易に理解できる。まず(3)と(12)から

$$(15)\quad \begin{aligned} U_i^1 &= (1-\theta)\ U_i^0 + \theta\ \overline{U}_i^0 && (i=1, 2, \cdots, m) \\ V_j^1 &= (1-\theta)\ V_j^0 + \theta\ \overline{V}_j^0 && (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

であるが、(4)によつて $U_i^1 \leqq 0$ は $u_i^1 = 0$、$U_i^1 > 0$ は $u_i^1 = U_i^1$ を意味し、また $V_j^1 \leqq 0$ は $v_j^1 = 0$、$V_j^1 > 0$ は $v_j^1 = V_j^1$ を意味するから、

$$(16)\quad \begin{aligned} 0 < u_i^1 = U_i^1 &= (1-\theta)\ U_i^0 + \theta\ \overline{U}_i^0 \\ &\leqq (1-\theta)\ u_i^0 + \theta\ \overline{U}_i^0 \\ 0 < v_j^1 = V_j^1 &= (1-\theta)\ V_j^0 + \theta\ \overline{V}_j^0 \\ &\leqq (1-\theta)\ v_j^0 + \theta\ \overline{V}_j^0 \end{aligned}$$

故に

$$(17)\quad \begin{aligned} \phi^1 &= \sum_{i=1}^{m} (u_i^1)^2 + \sum_{j=1}^{n} (v_j^1)^2 \\ &\leqq \{(1-\theta)u_i^0 + \theta \overline{U}_i^0\}^2 + \{(1-\theta)v_j^0 + \theta \overline{V}_j^0\}^2 \end{aligned}$$

である。この右邊を計算すると、結局

$$(18)\quad \phi^1 \leqq \phi^0\ (1-\theta)^2 + C^0\, \theta^2$$

ということになり、(18)の右邊が極小となるためには言うまでもなく

$$(19)\qquad \frac{d\{\varphi^0(1-\theta)^2+C^0\theta^2\}}{d\theta}=-2\varphi^0(1-\theta)+2C^0\theta=0$$

でなければならない。故にそれを充すθの値は

$$(14)\qquad \theta^0=\frac{\varphi^0}{\varphi^0+C^0}$$

ということになる。このθの値を⒅に代入すれば

$$(20)\qquad \varphi^1\leqq\frac{\varphi^0}{\varphi^0+C^0}$$

となるから、兩邊の逆數をとれば

$$(21)\qquad \frac{1}{\varphi^1}\geqq\frac{1}{\varphi^0}+\frac{1}{C^0}$$

そしてC^0は定義によって正であるから

$$(22)\qquad \frac{1}{\varphi^1}>\frac{1}{\varphi^0}$$

すなわち

$$(23)\qquad \varphi^1<\varphi^0$$

であることは明かである。

以上の計算によってわれわれは

$$p_i^0,\ p_i^1,\ p_i^2,\cdots \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$q_j^0,\ q_j^1,\ q_j^2,\cdots \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$
$$V^0,\ V^1,\ V^2,\cdots$$

の系列を次々に決定して、その都度φを小さくしてゆくことができる。ノイマンは

$$(24)\qquad \underset{i,\,j}{\mathrm{Min}}\ a_{ij}=\mu \qquad \underset{i,\,j}{\mathrm{Max}}\ a_{ij}=\nu$$

とおくとき、

$$(25)\qquad \varphi^t\leqq\frac{(m+n)(\nu-\mu)^2}{t}$$

となること、従って $t\to\infty$ となるとき φ^t が 0 に收斂することを證明している。それ故、

$$(26)\qquad \lim_{t\to\infty} p_i^t \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$\lim_{t\to\infty} q_j^t \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

がわれわれの求める甲乙の最適混合ストラテジーである。

（註1） John von Neumann, "A Numerical Method to Determine Optimum Strategy", *Naval Research Logistic Quarterly*, June 1954, pp. 109—115. わたくしはサムエルソン教授によってこの論文に注意を促され、かつそれを借覽する利便を與えていただいた。

3. ブラウン＝ノイマンの微分方程式解法　ブラウンとノイマンは以上のそれぞれの業績とは別個に、歪對稱の遊戯すなわち $A_{ii}=0$, $A_{ij}=-A_{ji}$ であるようなペイ・オフ行列をもつ遊戯を、微分方程式を用いて解く方法を考案した。[註1] そしていかなる遊戯も歪對稱の遊戯に轉換できることを考慮すれば、彼等の考案した解法は、一般に任意の遊戯の解法と看做すことができる。

その微分方程式というのは、混合ストラテジーをZ_1、Z_2、…、Z_sとするとき、

$$(1)\qquad \frac{dZ_i}{dt}=\varphi\left(\sum_{j=1}^{s}A_{ij}Z_j\right)-Z_i\sum_{k=1}^{s}\varphi\left(\sum_{j=1}^{s}A_{kj}Z_j\right) \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

但しここで

$$(2)\qquad \varphi\left(\sum_{j=1}^{s}A_{ij}Z_j\right)=\mathrm{Max}\left(0,\sum_{j=1}^{s}A_{ij}Z_j\right)$$

であって、彼等はその解 $Z_i(t)$ が、$t\to\infty$ となるとき、集積點をもつこと（それは必ずしも一つであるとは限らない）、かつその任意の集積點がこの遊戯の最適混合ストラテジーであること、を證明した。

線形計畫の問題はすべて歪對稱の遊戯問題に轉換できるので、われわれはこの解法をそのまま線形計畫の解法として利用することができる。いまある線形計畫の問題を、

$$(3)\qquad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqq b_i \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$(4)\qquad x_j\geqq 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

の下で

$$(5)\qquad Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

を極大ならしめる問題として定式化し、またそれに双對的な問題を

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geqq c_j \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$
$$(7)\qquad y_i\geqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

の下で

$$(8)\qquad Z^*=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$$

を極小ならしめる問題として定式化すれば、この二つの計畫問題を同時に含む遊戯問題のペイ・オフ行列は

$$(9)\qquad \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{bmatrix}$$

であり、かつそれの混合ストラテジー z と計畫問題の變數 x、y との間には

$$(10)\qquad y_i=\frac{z_i}{z_{m+n+1}} \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$x_j=\frac{z_{m+j}}{z_{m+n+1}} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

という關係の成立つことが知られている。故にわれわれの微分方程式(1)は容易に次のような形に書改められる。

$$(11)\qquad \frac{dy_i}{dt}=\varphi\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)-y_i\,\varphi\left(\sum_{i=1}^{m}b_iy_i-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$\frac{dx_j}{dt}=\varphi\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,y_i\right)-x_j\,\varphi\left(\sum_{i=1}^{m}b_i\,y_i-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\right)$$

$$(j=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

ここでφ（　）の解釋はさきの(2)と同様である。(11)の右邊第二項の括弧の中は、言うまでもなくZ^*とZの差を表している。周知のように、双對性の定理から最適點においてはZ^*とZとの等しくなることが保證されるから、その差はいわば最適點からの乖離の指標と看做し得る。ブラウン＝ノイマン型の式(11)においては、φの規定によつてこの乖離がつねに變數を引下げるような作用を果し、これに對して第一項がつねにそれらを引上げるような作用を果していることに注目すべきである。

（註1） G. W. Brown and J. von Neumann, "Solutions of Games by Differential Equations", *Contributions to the Theory of Games*, Vol. I, 1950, pp. 73—76.

産業連關表と社會勘定

大熊一郎

國民經濟の循環構造を總括する方法として、われわれは社會勘定（Social Accounting）システムと産業連關（Interindustry Relations）表の二つを有している。國民經濟の活動水準を評價するための分析要具としての國民所得概念については、すでに戰前にさかのぼる古い計測の歴史をもつているが、社會勘定および産業連關の兩システムが實際の計測に活潑に利用されだしたのはむしろ戰後のことに屬する。

それでは同じ經濟循環の構造を總括する方法としての社會勘定と産業連關表との間には、いかなる區別がありいかなる關係があるのだろうか。このことは兩者それぞれの體系が精緻化し、具體的にかなり詳細な取引が記録されるようになつて次第に問題となりつつあるところである。積極的には、兩者を結合した、より綜合的な經濟構造表が準備されているようである。

しかし、多様な目的と内容をもつ現實の經濟活動に對し、兩者が把握しようとする局面はたがいに別個のものであり、かつ兩者を發展せしめた基礎的理論模型もまたいちおう獨立したものであつた以上、兩者を併合したシステムというのは、社會勘定と産業連關とのそれぞれがもつ獨自の特徴をかえつて不分明にし、むしろこれをそこなうおそれなしとしない。一方にはこうした反省もおこりつつあるのである。

以下、社會勘定と産業連關の二つのシステムの關係について、最近の論議を展望し、私見を加えることにする。

一　ストーンの勘定體系

ストーンは社會勘定の體系化において、最近で最も詳細かつ綜合的な研究を行つている點で、まず彼の諸論文に注目すべきである。（註1）ストーンの立場はもつぱら會計學的な形式的無矛盾性によるもので、あらゆる經濟活動の單位を、單一の取引（transaction）に求め、これを種々の段階で分類統合しようとするものである。

取引を分類するためには三個の段階が考えられる。第一は經濟活動（activity）、第二はこれら活動をいとなむ部門（sector）、第三は取引の對價（consideration）である。