經濟學的生產函數の計測

——產業內規模別企業の異質性に關する考察を含めて——

尾崎　巖

目　次

第一節　序　文

㈠　生產構造の把握方法として投入產出間の純粹に技術的な關係の測定が要請されるが、このことは生產函數の構造パラメタをより自律的なものとして計測すると云うことによつて充たされ得る。しかるに投入產出の關係が本來、工學的な技術工程の結合として出現するにも拘らず、經濟測定者はアグリゲイティブな經濟變量によつてこの關係を計測しなければならない。この間の事情は從來經濟學の分野で與件（技術條件の一定）として扱われて來た生產函數をダグラスが初めて測定するに當り、勞働投入と資本投入の生產に及ぼす效果（生產性）の測定として登場し、その勞働所得と資本所得間の分配分に理論的根據を與える事に依つて限界生產力說の妥當性を檢證しようとする試みであつた事に反映している。この意味に於いて經濟學的生產函數の測定は傳統的に投入產出の具體的關係と云うよりは寧ろ、分配函數と—勞働及び資本の生產性の計測に重點が置かれて來たと考えてよい。

㈡　ダグラス以後のマルシャック[註1]、クライン[註2]、チェネリイ[註3]等に依る生產函數測定の發展は、何れもその構造パラメタをより安定的（自律的）に把握することによつて生產構造を明らかにしようとする努力であつた。この方向はダグラス初期の一社會に於ける巨視的生產函數の測定から、各產業部門別生產函數の測定に發展する一方、その測定方法に於いては計量經濟學的方法（エコノメトリック・メソッド）の飛躍的な發展に伴つて同時確率方程式體系に依る推定方法に迄發展するが、これ等は何れも經濟變量を扱う事に依つて可能な限り自律的な構造係數を獲得しようとする要求に他ならなかつた。

㈢　更に又チェネリイに於いては技術の進步をも考慮しなければ生產函數の變移をより自律的に說明することは出來ないとの立場から、アグリゲイティブな經濟變量（勞働、資本、原料等）を工學的變數（硬度、直徑等）にまで分解して、經濟學的生產函數の基盤に工學的生產函數を導入しようとする畫期的な試みがなされた。

卽ち生產函數のより安定的なパラメタを計測する爲には、使用する經濟變量の資料自體の構成を明かにし、その變數の構成に關する變動要因を自律的に說明しなければ、經濟變量間の相互關係を安定的につかむことは出來ない。このチェネリイの考察は經濟測定者の硏究對稱に對する經濟變量使用の立場に限界を畫すると同時に、從來經濟變量間の相關關係の有無のみを扱つて來た經濟學の諸函數[註4]（生產函數、投資函數等）の意味に對し改めて再考を促す貢獻をなした。

例えば生產函數の計測と云う問題は、前記のように何れもその構造パラメタをより自律的に把握する爲の努力であつたけれども、これ等の計測された產業部門別生產函數は、勞働と資本と生產量の相關關係（生產性係數の獲得）のみを意圖して來た爲に、その分配函數としての役割を除いて、勞働と資本投入の生產物への變換函數としての意味は極めて稀薄であつた。チェネリイの工學的生產函數の登場と、一方產業聯關論に依る財の投入—產出自體の關係を分析する事の重要性が著しく着目されて來た最近の動向は、改めて生產函數自體の意味の再考を促す段階に來たものと云えよう。

㈣　筆者は先に「產業性の計測[註5]」と云う論題で、構造方程式系に依る產業生產函數の測定を製紙產業の資料に依つて試みた。傳統的な計測目的の一つである勞働と資本の彈力性係數に關しては從來よりも安定的なパラメタの値を得る事が出來たが、その際前記論文に於いては計測上の工夫の爲に導入されたスケイルファンクションの意味を不明瞭の儘に殘しておいた。本稿は具體的にこの函數の經濟學的意味を明らかにし、併わせてその均衡模型の性格を理論的な資本と勞働の相對價格の値の導出から再確認しようと思う。この意味に於いて本稿は前論文の續篇であるが、前稿迄の生產函數自體の意味の再考に關しては、次の樣な點を明らかにしたい。第一に單一方程式の最小自乘法適用に依る生產函數のもつ意味に對して、我々の測定した生產函數は構造方程式系推定の特質を具備している事を明らかにする。第二にこの事は生產性計測と同時に企業者行爲の確認を意味する爲、模型の檢證の結果逆に理論的市場賃銀率及び市場複合利子率を計量し得ることとなる。第三に經濟學的生產函數として經濟變量の相互關係を計測した爲に、經濟變量自體の內容變動に關する考察がなされ得ない。この事は、スケイルファンクションのパラメタの値の經濟學的說明はなし得てもその自律的變動を說明し得ない事を意味する。資本項目として採られるアグリゲイティブな變量をその構成要因迄分解し、工學的生產函數的に考察されなければならない理由である[註6]。經濟學的生產函數の計測分野に於ける限界點であろうと思われる。

（註1）　J. Marshak and W. H. Andrews, "Random Simul-

taneous Equations and the Theory of Production",
Vol. 12, Nov. 1944.

（註2） L. R. Klein, "Economic Fluctuation in the United States."

（註3） H. B. Chenery, "Engineering Production Functions", Q.J.E. 1949.

〃　"Overcapacity and the Acceleration Principle", Econometrica 1952.

Leontief and Others, "Studies in the Structure of the American Economy" の中の "Process and Production Functions."

（註4） 經濟學的生産函數と工學的生産函數の關係に就いては本特集小尾惠一郎氏「生産構造の計測と與件」に詳しく述べられている。なお氏は水力發電部門に於いて、獨自の工學的生産函數を展開されている。

（註5） 拙稿「産業生産性の計測」三田學會誌四十七卷十二號。

（註6） なお本稿の展開に關しては、辻村江太郎氏、小尾惠一郎氏から多くの助言を頂いた。

第二節　生産函數測定に關する模型

㈠理論的均衡模型(A)

經濟測定者が現實の經濟變量の資料を用いて經濟構造を實驗しようとする場合、第一になすべきことは、理論的變數を用いて檢證さるべき經濟構造模型(A)を構成することであり、次に模型(A)内の理論的變數と觀察された變數を對決させて、現實に對應する模型(B)を構成する爲の計測に關する工夫をなすことである（實驗計畫）。經濟觀測者は常に經濟行動の主體者ではない故に、經濟模型(A)には必ず主體者の行動函數が織り込まれなければならない。構造方程式系による推定の第一の本質が主體者の行動に關する假說の檢定にある所以であり、測定された技術的函數（生産函數）のパラメタの値は、經濟主體者の合理的行動に關する假說を反映しているものと考えられ、兩者は不可分のものである。この樣にして測定された生産函數は、凡ゆる規模の企業に共通の、勞働と資本の生産に對する貢獻の程度（投入—産出關係）を表わしているけれども、之を以て直ちに特定の企業者が自己の腦裡に浮かべている企業自體の生産關係であると斷定してはならない。各企業者は現實には恐らく多年の經驗に依つて獨自の生産を行つている。然しある産業に登場する企業者は好むと好まざるとに拘らず、その時代の、その社會に現存する技術的條件に支配されて、各々の利潤極大行爲に基く生産行爲を行う。つまり客觀的な生産條件（生産函數）に拘束されている。この樣な意味で吾々の測定した生産函數は寧ろその時代のその産業に於いて生産者行動を規制する「生産の場」と呼ぶことが適當であると考えられる。

かくして多くの企業者の動きから、生産函數を測定しようとする同時確率方程式體系の意味が明瞭となると同時に、生産の場の意味が明らかとなつた。

そこで第一段階の操作として理論的に次の樣な内部均衡模型（假說）を構成しよう。以下理論變數とは各企業を通じて等質的且つその經濟量を完全に代表する變數であると解釋し、小文字で表わすことにしよう。

(イ) 當該産業内の各企業は只一種の等質的な生産物 q を産出する

(ロ) 各企業は制度的與件或は該産業内の競爭條件等に依つて大規模から小規模に亙つてある企業分布を構成しており、各々は何等かの利潤極大行爲によつて既に計畫生産量 q_i を定めたものとする。（q は外生變數）

(ハ) q_i 量の生産達成の爲に原材料 m と勞働量 l と資本投入量 d を費用極小原理によつて雇用する。（原材料は假りに生産量 q に比例するものと考える。）

(ニ) l と d は規模に對して等質的であるから生産要素市場には勞働の價格 w（賃銀率）と資本の價格 r（後述）に對し w/r 一定なる理論的相對價格が成立している。（w/r は外生變數）

(ホ) 各企業者は投入—産出の技術的條件に制約されているが、この關係を對數線型で近似する。等質の性質から當然、勞働と資本の生産量に對する彈力性の和は一である。

以上は次の模型(A)にまとめられよう。

(A)
(A—1)　$q=bl^kd^j \quad k+j=1,\ k,j>0$　生産函數
(A—2)　$\Pi=lw+dr$　費用定義式
(A—3)　$\frac{\partial\pi}{\partial l}=0,\ \frac{\partial\pi}{\partial d}=0$　但し、$\pi=\Pi-\lambda q$
(A—4)　$\frac{k}{lw}=\frac{j}{dr},\ \frac{w}{r}=\mathrm{const}$　均衡方程式

外生變數；$\frac{w}{r}$, q　内生變數 $l.\ d.$

(ヘ) 各變數の意味は次の通りである。

l に就いては各規模の企業を通じて雇用された勞働者に質の差がない。つまり學歷、年令、家族構成、熟練の程度、その他の一切の環境條件が同じであると同時に雇用者側に於いても勞働一單位に對する福利厚生娛樂設備等の完備の程度や、勞務管理の狀況等が一定であると云う意味で勞働は等質的であり、更に利用度を考慮して l の單位は勞働時間ではかられるものとする。w は、その樣な勞働一單位に對する理論的賃銀率で當然各規模に對して一定である。

次に d は資本投入量を表わす變數で、クラインはこの d を結果的に見て資本ストックの減耗分（depreciation）と同一であると考えた。今規模別に見て各企業が、その有する機械、施設、建物等の種類、或は耐用年數等に就き同一の資本組成を有すると云う意味で等質化された理論的資本ストック量 R^* を保有し、同時にその利用度及び新資本投下部分の舊資本投下部分に對する比率も同一であると考えられる時には、

(4)　$d=a_2^*R^*$

なる關係式が成立し、資本の減耗分 d に對する等質化の意味が明らかとなる。同時に、R^* を物量單位で把えた時には a^* は R^* 一單位に對する減耗係數を表わしている。

この樣な減耗分 d 一單位に對する理論的市場價格を r とすれば、生産物一單位を産出するために要する原材料費を除いた費用は、(A—2) $\Pi=lw+dr$　で示されるが、その中 dr は(4)式を用いて、

(5)　$d\cdot r=a_2^*R^*\cdot r=R^*\cdot(a_2^*r)$

の様に書けよう。

$a^*\cdot r$は等質化された固定資本ストック一單位に對する理論的減價償却費を與え、R*を金額で把える時には、資本利子率と考える事も出來る。一方(5)式の左邊drは資本ストックR*から生ずる減耗分の金額表示であるから、R*の一定比率部分を稼動した時の修理費、檢査費、運轉費、殘りを遊休せしむる爲の補償費等を含めた補塡投資總額を意味し、この様な意味で、r自體は飽く迄資本ストックの提供する資本用役（物的減耗分）一單位に對する市場價格と考えなければならない。從つて借入資本と自己資本の錯雜した組成を有し、又舊機械設備と新機械設備の混成した複雜な現實の資本構造に對しては、夫々の態様に應じて、利子率或は新舊資本稼働部分に對する運轉費及びその修理費、遊休部分に對する補償費等を加算した減價償却費等の複合した内容を表わす（複合利子）ものと考えられ、之等の資の契約價等質化された時のR*に對し資本市場で成立すべき資本投入本組成が格と呼ぶことが出來よう。

(ト)　各企業に對する生産量qは生産函數（A—I）式に於いて、上記の様にdとlが等質化されている時、若し同一原材料を使用する限りに於いては既に等質化されている事に留意しておこう。

(チ)　さて模型(A)は以上の様に理想化された變數から構成されている。にも拘らず我々は計測さるべき實在として(A)の生産函數のパラメタkとjを採り上げ、或は又w/rに對應する企業の費用極小行爲を檢定しようと試みる。觀察變數の資料を使い乍ら計測の對稱は模型(A)のパラメタであり、且つより自律的なパラメタ値の獲得——即ちより安定した生産構造の把握と云う要請を、(A)の測定に依つて充たそうと考えるのである。（次節の模型(B)とこの(A)との關係は後に詳しく述べられる。）

(二)觀察さるべき模型(B)の構成

(イ)　以上の理論的模型(A)を現實の觀察可能な變數を用いて計測する爲には、理想的な模型(A)を現實の資料に對應する實驗模型(B)に組變えなければならない。何故ならば模型(A)に用いられた等質的な理論的變數は夫々現實には規模別に異質的な影響を受けた資料として實現するにも拘らず、經濟測定者は常に實驗資料を完全にコントロールし得るものではないから模型(A)に於ける理論變數の實驗値を得ることが出來ない。そこで觀察變數を理論的變數に變換する爲の種々の經濟學的要素を考慮して兩者を對決させる。以下その方法と檢定の手段に就いて述べよう。

(ロ)　先ず勞働雇用量lと賃銀率wに就いて——現實には、大規模企業は小規模企業よりも勞働需要に際して、勞働者相互間に存在する質の差異の中、優秀なる能力を有する勞働者を自己企業に雇用する爲の努力を爲す。かくして各規模毎に福利厚生、娯樂施設の完備その他の實物給與等の狀態は異り、或は勞務管理の狀況にも差異が存在しよう。これ等の影響に依つて大規模と小規模の企業に雇用された勞働者の生産に與える能力には差異が生ずる。しかるにlに對する資料としては規模別には工場統計表に依る規模別從業者數(L)しか得られなかつた。この爲Lの能力の差異を等質化する爲に

(6)　$l=f_L(L)\cdot L$

なる變換式に依つて規模別等質化函數$f_L(L)$を未知の函數として導入した。これに對應してこのl（等質化された勞働時間一單位）に對する賃銀率wは、現實に勞働市場で成立すべき各企業毎の契約賃銀（貨物給與その他を含む）Wと次の様な關係にあると云えよう。(6)式の意味する所はある規模企業のL人の勞働者は基準規模企業の勞働者數に換算して$f_L(L)$倍の等質化された勞働者に匹敵する。從つて等質化された勞働量に對しては$(f_L(L)\cdot L)w$なる賃銀支拂總額を得る。かくして現實のL一單位に對する契約賃銀Wとは

(6)′　$lw=(f_L\cdot L)w=L\cdot(f_L\cdot w)=L\cdot W$

(6)″　$\therefore\ f_L\cdot w=W$

と表わすことが出來る。ここにWとは各規模企業の勞働者一單位に對し福利厚生費その他一切の實物給與をも加算した、現實に存在すべき筈の理論的契約賃銀であつて、各規模に對しては勞働能力の差異に應じて異る事が理解されよう。(6)、(6)′、(6)″を通じて$f_L(L)$なる等質化函數（スケイル・ファンクション）の有する意味が明らかとなつた。（資料としてWの値を規模別に得ることは出來ない。）

(ハ)　次に資本投入量dとその價格rに就いて述べる。それには先ず前節に補足して等質化された資本ストックR*の意味を明らかにしなければならない。

經濟學的諸函數の分析には屢々必然的にアグリゲイティブな變量を取扱うことが要請される。ここに採り上げられるダグラス生産函數の資本項目はその代表的なものであり、一口に資本ストックと呼稱するその内容は、生産方式に依る所謂生産工程（インダストリアル・プロセス）の結合、新舊機械の組合せ、稼動率、施設建物等の老朽化の程度等に依つて資本組成に複雜な差異をもたらす。この様にして同じ一千萬圓の資本金額投下も、新設機械の種類が例えば材料に異種類の金屬を用い、或は自働化（オートメイション）の程度が異り、或は又軸やパイプの直徑等の異る事に依つても異つた生産性を示すことになろう。（この方向が工學的生産函數の發展を要請したことは序文に述べた。）にも拘らず經濟學的生産函數はその複雜な組成に對する資本項目にアグリゲイティブな經濟變數Rを對應させる。Rの望まれる性格は、その資本ストックに大なる比重をもつて、全體をよく代表し得るものでなければならない。更にアグリゲイティブな變量を用いると云う事は、必然的に資本項目をその變數Rの單位で評價する事を意味している。（アグリゲイティブな資本項目は何等かの經濟變量で計量されなければならないと同時に、全體をよく代表する變量ならばどの變量で評價してもよいであろう。例えば固定資産額のこともあり、或は實働馬力數や消費電力量又は紡績に於ける錘數、印刷業に於ける印刷機臺數等。）前論文及び本稿では實働設備馬力數Rを工場統計表より使用した。つまり資本の投入量及びその規模別の異質性を馬力數の單位で測定しようと試みた事になる。この事は從來問題とされてきた産業内生産函數の測定に於ける勞働資本の生産性（kとj）計測に影響を與えるものではない。（何となればいかなる單位を用いようとも規模別に等質化されているからである。）しかし例えば紡績産業に於いて實働馬力數と、錘數を別に用いた場合では、その規模の特性を表わす規模函數のパラメタの値は異る。この事は生産性係數k・jのみならず生産函數全體を産業間で比較する時に特に注意さるべ

きであろう。

さて勞働項目に於いて基準産業の基準規模企業に於ける勞働時間lではかつた勞働投入量を理論變數として撰び得た如く、等質化された理論的資本ストックを表わす變數R*が存在すると考え、R*から生ずる資本用役の投入量をd、dに對する契約市場價格をrと定義しよう。（若し勞働項目に於けるlの如く、このR*が全産業に共通のものとして存在するならば、dに對する價格rも亦Wと同様全産業に共通の性格をもたねばならない。）直ちに次の關係式が成立ち、

$$(4)\qquad d=a_2{}^*\mathrm{R}^*$$

$a_2{}^*$は理論的減耗係數である。さて現實に得られた資料は規模別實馬力數Rであつた爲、R*及びdにRを變換する式を次の様に導入しよう。

$$(7)\qquad \mathrm{R}^*=f_{\mathrm{R}}{}^*(\mathrm{R})\cdot\mathrm{R}$$

$$(8)\qquad \therefore\quad d=a_2{}^*f_{\mathrm{R}}{}^*(\mathrm{R})\cdot\mathrm{R}=f_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})\cdot\mathrm{R}\ \ 但し\ a_2{}^*f_{\mathrm{R}}{}^*(\mathrm{R})=f_{\mathrm{R}}(\mathrm{R})$$

(7)式に於いて$f_{\mathrm{R}}{}^*$なる函數は設備馬力數（若しくは他の資本項目資料）がどの様な關係でどの程度に理論的變數R*を表わしているかの規模別特性を示し、(8)式に於けるf_{R}は實馬力數で表わされた資本ストックの資本用役投入量dに對するストック－フローの關係を含めての關係を示す。費用　$\Pi=lw+dr$　に於ける資本項目に關しては、

$$(9)\qquad dr=(f_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{R})r=\mathrm{R}\cdot(f_{\mathrm{R}}\cdot r)$$

なる式に依つて、實馬力數Rで表わされた當該規模企業の資本ストックに對する現實の契約市場價格（理論的減價償却費）は（$f_{\mathrm{R}}\cdot r$）に依つて與えられることになろう。この事は、(4)式　$a=a_2{}^*\mathrm{R}^*$と(9)式の比較から直ちに觀察し得るであろう。

(ニ)　上記考察から生産函數に入る諸要素の理論的變數と觀察變數の關係が明らかになつた。等質化された生産量qに對しては、略満足すべき生産金額資料Qが工場統計表から得られる。Qに對する規模別の等質化は規模別に同一原料を用いる限り生産函數の要素項目（勞働・資本）の等質化に依つて既に完了している事は云う迄もない。

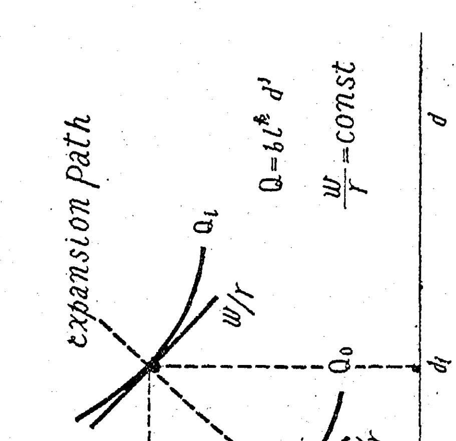
この様に生産函數を全産業相互間の關係で把えようとすれば、必然的に使用する資料の單位が問題となる。若し基準産業の基準規模に於ける企業の勞働及び資本一單位を標準として等質化し、それ等を全産業に及ぼして同一の單位（例えば、實働勞働時間・實働設備馬力數）で測定すれば得られた計測結果はw/rをも含めて産業間で同一に考察し得ることとなろう。しかし本稿での論議は産業内生産函數の論議が中心であるから問題は起らない。

(ホ)　さて觀察さるべき模型(B)を構成する爲、次の様な現實の企業者行動の假説を考察しよう。

各生産者が何等かの理由に依つて生産量Qを計畫し、Q（q）を産出する爲には等質化された勞働量l及び資本投入量dを費用極小行爲に依つて雇用するものとする。勞働市場、資本市場には夫々w及びrが現實の契約價格として存在し、企業者は意識すると否とに拘らずこの現存する相對價格w/rに對してlとdを撰擇する。雇用されたlとdは夫々企業者の各規模に應じて(3)式の變換に依りL人の雇用者とRなる實馬力數となつて實現するであろう。この事は模型(B)及び第1圖に依つて示される。

第　1　圖

生産のストラクチュア(1)



$$\left.\begin{aligned}\frac{l_i}{f_{\mathrm{R}}(\mathrm{L}_i)}&=\mathrm{L}_i\\ \frac{d_i}{f_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}_i)}&=\mathrm{R}_i\end{aligned}\right\}\ i\ 規模企業に雇用された勞働者數\ \mathrm{L}_i\ と實馬力數\ \mathrm{R}_i$$

$$l_i/l_o=d_i/d_o$$

$$(\mathrm{B})\begin{cases}(\mathrm{B}\text{—}1)\quad \mathrm{Q}=b(f_{\mathrm{L}}\cdot\mathrm{L})^k(f_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{R})^j & \begin{matrix}k+j=1\\ k,j>0\end{matrix}\\ (\mathrm{B}\text{—}2)\quad \Pi=(f_{\mathrm{L}}\cdot\mathrm{L})w+(f_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{R})r & 費用定義式\\ (\mathrm{B}\text{—}3)\quad \dfrac{\partial\pi}{\partial(f_{\mathrm{L}}\cdot\mathrm{L})}=0\quad \dfrac{\partial\pi}{\partial(f_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{R})}=0 & \text{rational behavior の式}\\ (\mathrm{B}\text{—}4)\quad \dfrac{k}{(f_{\mathrm{L}}\cdot\mathrm{L})w}=\dfrac{j}{(f_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{R})r} & 均衡方程式\end{cases}$$

（B—2）の定義及び（B—3）の behavior に關する假説の妥當性に就いては再び異つた觀點から次項で説明される。

(ヘ)　さて均衡模型(B)に於ける生産者行爲を次の様にも解釋し得ることを示そう（次頁第2圖）。

今現實の勞働及び資本市場に於いて各規模毎に夫々異つた契約賃銀W_i及び契約資本價格（利子率）$\mathrm{P}r_i$が成立しており、各企業者は各自の計畫生産量に對應して自己の企業に相應する質の異つた勞働L_iと實馬力數R_iで代表される資本ストックを撰擇する。

生産函數は不變であるが各規模毎に勞働と資本の相對價格は$\mathrm{W}_i/\mathrm{P}_{\mathrm{R}i}$となり、次の内部均衡模型(B′)が考えられる。

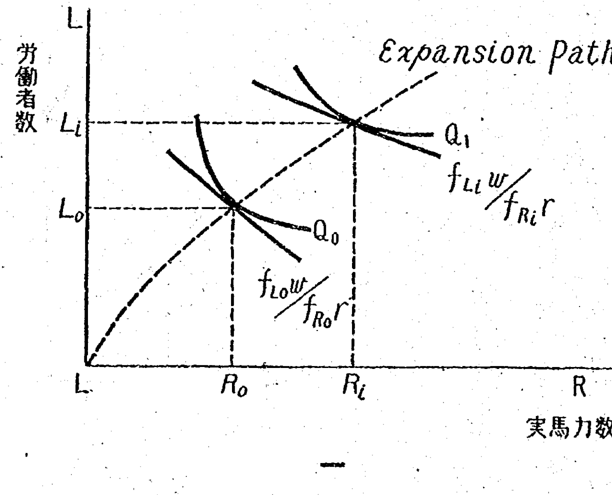
$$(\mathrm{B}')\begin{cases}(\mathrm{B}'\text{—}1)\quad \mathrm{Q}=b(f_{\mathrm{L}}\cdot\mathrm{L})^k(f_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{R})^j\quad k+j=1,k,j>0\\ (\mathrm{B}'\text{—}2)\quad \Pi=\mathrm{L}_i\cdot\mathrm{W}_i+\mathrm{R}_i\cdot\mathrm{P}_{\mathrm{R}i}\\ (\mathrm{B}'\text{—}3)\quad \dfrac{\partial\pi}{\partial\mathrm{L}_i}=0\quad \dfrac{\partial\pi}{\partial\mathrm{R}_i}=0\ 但し\ \pi=\Pi-\lambda\mathrm{Q}.\\ (\mathrm{B}'\text{—}4)\quad \dfrac{k}{\mathrm{L}_i\mathrm{W}_i}=\dfrac{j}{\mathrm{R}_i\cdot\mathrm{P}_{ri}}\end{cases}$$

しかるに(6)′、(8)の兩式より　$\mathrm{W}=f_{\mathrm{L}}\cdot w,\ \mathrm{P}_{\mathrm{R}}=f_{\mathrm{R}}\cdot r$　を考えれば（B′—2）式は　$\Pi=\mathrm{L}\cdot f_{\mathrm{L}}\cdot w+\mathrm{R}\cdot f_{\mathrm{R}}\cdot r$　となり、（B′—3）式は

$$\frac{k}{f_{\mathrm{L}}\cdot\mathrm{L}w}=\frac{j}{f_{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{R}\cdot r}$$

となつて、結局(B′)は(B)と同一のものに歸着する　模型(B)に於いて、等質化された勞働lと資本用役dを撰擇すると云う生産者行爲の公準の意味はここに述べられた(B)模型の現實的な行爲と同一のものとなり、これで第1圖と第2圖の關係が明らかになつたものと思われる。

第　2　圖
生産のストラクチュア(2)



$$Q=b(f_L\cdot L)^k\cdot(f_R\cdot R)^j \qquad \frac{L_i}{L_o}\neq\frac{R_i}{R_0},\quad \frac{l_i}{l_o}=\frac{d_i}{d_o}$$

$$\frac{W_i}{P_{Ri}}=\frac{f_L\cdot w}{f_R\cdot r}\neq\text{const.} \qquad f_L(L_i)\cdot L_i=l_i,\quad f_R(R_i)R_i=d_i$$

(ト)分配率開差に就いて——この様に考えると勞働分配分は理論的に次式で與えられるべきであろう。

$$\frac{k}{k+j}=\frac{(f_L\cdot L)w}{(f_L\cdot L)w+(f_R\cdot R)r}=\frac{LW}{LW+dr}$$

この理論値は時系列に亙つて一定であるが、現實に於けるこれの變動は一企業を考えると自らの規模に對する$f_L f_R$のパラメタの値を錯誤した結果、支拂われるべきWに對し異つたW'しか支拂われない事に起因する。然し長期的に觀測した分配率は$\frac{k}{k+j}$に收斂すると考えられる。

(チ)かくして觀察さるべき模型(B)又は(B')が計測されるのであるが、これは變數が觀察變數に置き換えられた事を除けば(A)と同一のものである。

我々の目的は(A)の構造係數(ストラクチュラル・パラメタ)の測定であるが、ここに述べられた(B)を通して(A)を測定すると云う測定の特質は次の様に要約出來よう。

第一に生産函數の彈力性の和を一にとることを公理化する事に依り、$f_L f_R$なる函數を導入してクロスセクション・データを等質化する。(從來、クロスセクション・データの使用に對し難點とされて來た所。)そこで$k+j=1$は勞働と資本の等質化と同義語になり、逆に得られたf_L・f_Rの函數型及びそのパラメタの値から、大規模生産に關する收益遞增等と云う現象の本質を計量的に明らかにし得る。第二に、より自律的な構造係數の把握と云う計量經濟學の要請を、模型(A)の構造係數の測定と云う形で充たし得る。第三に之は次節で述べられる事であるが、均衡模型の確認から第1圖に於ける理論的相對價格w/rを計測し得た爲に、賃銀理論及び資本の價格と云う概念へ計量經濟學的な立場からの考察が爲し得た事である。

第三節　統計的操作と計測結果に依る生産函數の再考

(一)統計的操作の概要

模型(B)の觀測に關する技術的な操作が前論文に於ける主題であつた。簡單にその概要と特徴を述べておく。ストラクチュアは模型(B)

である。

$$\text{(B)}\begin{cases} Q=b(f_L\cdot L)^k(f_R\cdot R)^j\cdot u_1 \\[4pt] \dfrac{k}{(f_L\cdot L)w}=\dfrac{j}{(f_R\cdot R)r}\cdot u_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} k+j=1,\ k,j>0 \\ L,R;\ \text{內生變數} \\ \dfrac{w}{r}=\text{const.}\ Q;\ \text{外生變數} \end{array}$$

ここにu_1とu_2は夫々分散$\sigma_{u_1}^2$、$\sigma_{u_2}^2$、共分散$\sigma_{u_1u_2}$を有し、對數正規分布をすると假定された structural shock である。ストラクチュア(B)は一時點クロスセクション分析に依る測定に關しては、若しw/rの値が得られれば just identifiable であるがw/rの觀察資料を得ることは出來なかつた。これを補う爲クロスセクションと時系列分析の併用と云う統計的工夫に依つて、最後迄あたかもw/rを與えられた外生變數として取扱い乍ら、實際の統計的計算の途上ではw/rを迂回しつつkとjを測定した。得られたkとjの計測値は次年度の豫測と云う検定に對して極めて高い安定度を示した。しかるにkとjが得られた爲に逆に未知の外生變數w/rの時系列を模型から理論的に導出する事が出來た。この點に前論文に於ける計測の最大の特質があつたと思われる。

さて(B)の reduced form equation は次の如くなるであろう。

(對數記號を省略して文字の上に BAR をつける。)

$$\text{(B—II)}\begin{cases} \overline{Q}=\overline{(f_L\cdot L)}=\overline{b\left(\dfrac{wj}{rk}\right)^{j}}+\overline{u_1\cdot u_2^{\,j}} \\[4pt] \overline{Q}=\overline{(f_R\cdot R)}+\overline{b\left(\dfrac{wj}{rk}\right)^{-k}}+\overline{u_1u_2^{\,-k}} \end{cases}$$

この(B—II)式の觀測が極めて高い相關度を示した事と、(B—II)の函數型及びw/r一定の假定を綜合して、勞働と資本に關する規模函數に就き次の函數型を導出した。

$$\text{(B—III)}\quad f_L(L)=a_1L^{s_1},\quad f_R(R)=a_2R^{s_2}$$

かくして構造係數と誘導形係數の關係は、次式(B-IV)(B-IV')(B-V)で示される。

$$\text{(B—IV)}\begin{cases} \overline{L}=\dfrac{1}{1+s_1}\overline{Q}-\left(\dfrac{\overline{B}}{1+s_1}+\dfrac{j\overline{A}}{1+s_1}\right)-\dfrac{1}{1+s_1}(\bar{u}_1+j\bar{u}_2) \\[4pt] \overline{R}=\dfrac{1}{1+s_2}\overline{Q}-\left(\dfrac{\overline{B}}{1+s_2}-\dfrac{k\overline{A}}{1+s_2}\right)-\dfrac{1}{1+s_2}(\bar{u}_1-k\bar{u}_2) \\[4pt] \text{但し}\ B=ba_1^{k}a_2^{j},\quad A=\dfrac{a_1jw}{a_2kr} \end{cases}$$

$$\text{(B—IV')}\quad \overline{L}=\alpha_L\overline{Q}-\beta_L+v_L,\quad \overline{R}=\alpha_R\overline{Q}-\beta_R+v_R$$

(B-IV')に於けるv_L、v_Rは reduced form shock である。

$$\text{(B—V)}\begin{cases} \alpha_L=\dfrac{1}{1+s_1},\quad \beta_L=\alpha_L(\overline{B}+j\overline{A}) \\[4pt] \alpha_R=\dfrac{1}{1+s_2},\quad \beta_R=\alpha_R(\overline{B}-j\overline{A}) \\[4pt] \text{var}(v_L)=\alpha_L^2(\sigma_{u_1}^2+j^2\sigma_{u_2}^2+2j\sigma_{u_1u_2}) \\ \text{covar}(v_L,v_R)=\alpha_L\alpha_R\{\sigma_{u_1}^2-kj\sigma_{u_2}^2+(j-k)\sigma_{u_1u_2}\} \\ \text{var}(v_R)=\alpha_R^2(\sigma_{u_1}^2+k^2\sigma_{u_2}^2-2k\sigma_{u_1u_2}) \end{cases}$$

各年度毎にクロスセクション分析によつて得られた(B-V)の關係式[註7]を更に時系列に並べて使用する事に依つてkとjの計測値が得られた。(詳細は拙稿前掲論文參照。)

第一表

Scale Function のパラメタの測定値

	製紙		生糸		綿織物	
	s_1	s_2	s_1	s_2	s_1	s_2
昭和６年	0.536	−0.066	0.055	0.141	0.192	−0.143
〃　７年	0.595	−0.066	0.086	0.103	0.206	0.035
〃　８年	0.529	−0.108	0.092	0.375	0.390	0.216
〃　９年	0.642	−0.040	0.041	0.309	0.226	0.121
〃　10年	0.543	−0.118	0.071	0.334	0.188	0.053
〃　11年	——	——	0.188	0.327	0.178	0.076

（* 製紙11年は豫測檢定に使用された爲，s_1s_2 を導出しなかつた）

この方法を、製紙、生糸、綿織物の諸産業に適用して得られた結果を第一表に示そう。

s_1 と s_2 は各産業內に於ける規模別企業の質の差を表わしている。その中、勞働の質の差が s_1 で示され、製紙に於いては大規模企業と小規模企業の格差は烈しく、次いで綿織、生糸の順になつており、生糸に至つては、規模間に殆どその差が少ない。産業別の特性に依つて生糸では勞働（特に女工の影響）が殆ど同種の職種に携つているものと考えられる。s_2 は設備馬力數Rがどの程度等質化された R^* を代表しているかを示し、零に近い程、資本をよく代表している。s_2 は製紙が最も小さく、次いで綿織、生糸の順に大きくなり、製紙では實馬力數がよく R^* を代表し、生糸では實馬力數が R^* を代表していないという測度はその製造工程に依るものと考えられるであろう。

㈡計測結果から得られた若干の結論

三産業に於ける計測結果は、$f_L=a_1L^{s_1}$, $f_R=a_2R^{s_2}$ なる函數型を具體化した。この項ではそれ等の各々に就いて考察を進めたい。$f_L f_R$ は共にLとRの等質化と同時に逆に f_Lw f_Lr と考えると、市場價格に格差を附與すると云う二重的性格をもつている事に留意しておかねばならぬ。

(イ) $f_L=a_1L^{s_1}$ に關して

(6)式に於いて或る産業の特定規模企業に雇用された勞働量Lに對する契約賃銀をWとすれば

$$(6'')\qquad f_L\cdot w=a_1L^{s_1}\cdot w=W$$

なる關係式が成立つた。基準規模企業に對する現實契約賃銀を W_0 とし、W_i/W_0 の比を作れば

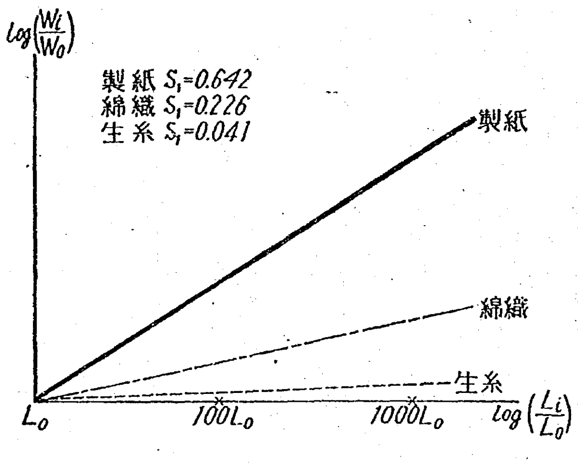
$$W_i/W_0=\frac{f_L(L_i)}{f_L(L_0)}=\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^{s_1}\quad\therefore\quad \log\left(\frac{W_i}{W_0}\right)=s_1\cdot\log\left(\frac{L_i}{L_0}\right)$$

となつて、勞働の規模函數 f_L は直ちに産業內賃銀格差を理論的に說明する。三産業に就いて昭和五年に於ける $(L_i/L_0)^{s_1}$ ——つまり産業內賃銀格差の理論値を例示すれば第3圖（次頁）の如くなつた。このWは當然名目賃銀の他に實物給與の實質額を加算された値に對應する理論値でなければならない。

第3圖から製紙産業に於いては、大規模小規模間の質の差が大きく、之が契約賃銀格差となつて實現し生糸では殆どその格差が見られない事を示している。之は生糸では女工による職種が殆ど規模別に同等で企業間に差のないことを示すものであろう。

第　3　圖

昭和九年度産業內賃銀格差の理論値



$$\frac{W^i}{W_0}=\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^{s_1}$$

$$\log\left(\frac{W_i}{W_0}\right)=S_1\log\left(\frac{L_i}{L_0}\right)$$

次に基準産業に就いては、$f_L^i\cdot w=W^i$ の關係があるから $W^i/W^0=f_L^i/f_L^0$ で以て同一規模を比較した時の産業間賃銀格差の理論的說明が可能となる。今基準産業の基準規模企業に雇用された勞働賃銀率 W_0^0 を以て w に置き換え、全産業をこの W_0^0 で測定すれば　$W_0^0=w=1$　とおいてこの單位系に於ける相對的産業間賃銀格差は

$$W_0^i=\frac{f_L^i(L_0)}{f_L^0(L_0)}$$

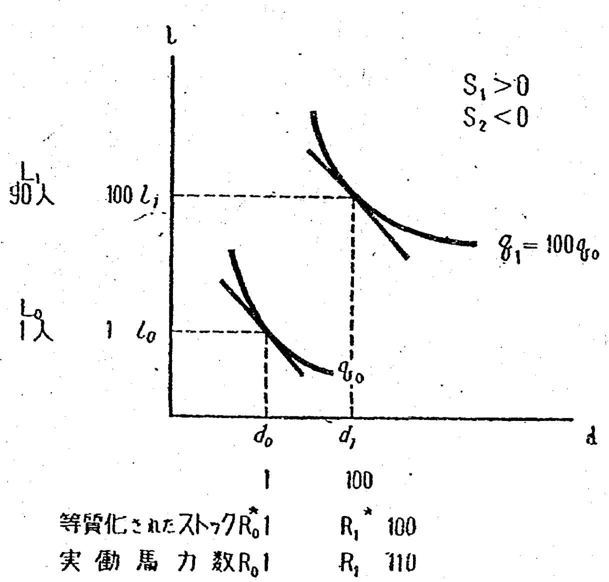
で以て理論的に說明され得るであろう。

(ロ) $f_R=a_2R^{s_2}$ の觀測結果について

若し設備馬力數以外の單位で等質化された資本ストックをよく代表する指數 R^* が存在するならば(4)式により

$$(4)\qquad d=a_2^*R^*\quad\therefore\quad f_R^*=a_2^*$$

第　4　圖



$$\left.\begin{array}{lll} q=bl^kd^j & k+j=1 & l=a_1L^{1+s_1} \\ & k_1j_1>0 & d=a_2R^{1+s_2}\end{array}\right\}$$

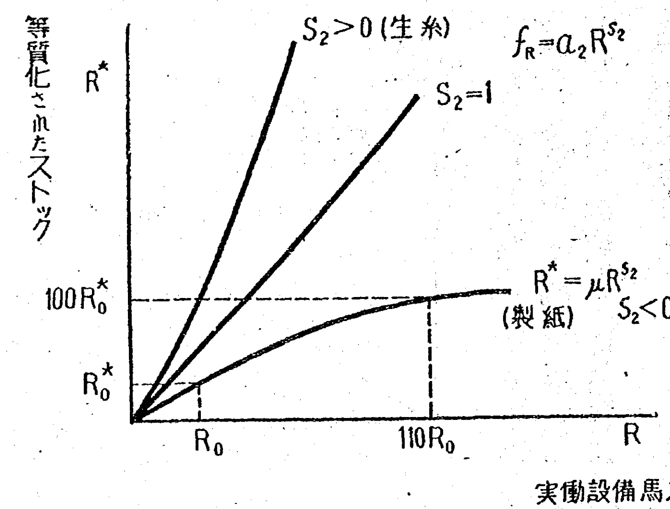
$\frac{w}{r}$=const.　で $s_1>0$, $s_2<0$ の例

と考えられる。しかるに我々の使用した資料は實馬力數Rであり、これと R^* の關係は觀測の結果　$d=(a_2R^{s_2})R=a_2^*R^*$

$$(7)'\qquad\therefore\quad a_2R^{1+s_2}=a_2^*R^*$$

である事が知られ、製紙、生糸、綿織の諸産業に於ける計測結果は第一表（前掲）の如くであつた。製紙産業に於けるs_2の負値は(7)式から、設備馬力数が規模別に見て等質的なR*に對し過大に評價されすぎた指數である事を示す。（第4圖、第5圖）第4圖はs_1が正、s_2が負の例えば製紙産業に於ける圖示であつて、基準企業に對し一〇〇倍の生産量Qを計畫した大企業は、一〇〇倍のlとdを必要とするが、勞働能力の差異は一〇〇倍のlに對し九〇倍のLの雇用で以て足り、一〇〇倍のR^*に對しては、實馬力數では一一〇倍で表現される事を示している。

第　5　圖



又第5圖はs_2の値が1に近づく程撰ばれた指數（實馬力數）Rがその産業内の規模に對しよく等質化されている事を示す。

しかし、眞の資本ストックR*は何等かの經濟變量で把えられなければならない事を考えれば、産業内規模別特性を示す指標としては實働設備馬力數Rの尺度に依る　$f_R=a_2R^{s_2}$　の函數型自體を以て觀察するより他に手段はない。

さて(4)式に於いてa^*は物量的減耗係數を示し　$\frac{1}{a_2^*}=\frac{R^*}{d}$　はR^*の單位に於いて特にストックR^*の耐用年限を示しているものと云えよう。この事を　$d=f_R\cdot R$　の式で云えば、f_Rは實馬力數で計られた資本ストックRの減耗係數を示すものに他ならない。更に(7)式に於いて成立した　$dr=a_2^*R^*=R^*(a_2^*r)$　の式は次式の様な形をとる。

$$dr=(f_R\cdot R)\cdot r=R\cdot(f_R\cdot r) \qquad (10)$$

$f_R\cdot r$をPRと置けば　PRは實馬力數單位で計られた資本一單位の理論的償却費を示し、同時にR一單位を保有する爲の、運轉費、修理費等一切の費用（ケインズの使用者費用）を示すものと云えよう。

(ハ)導出されたw/rの計測値に就いて

ストラクチュア（B-I）の reduced form equation（B-II）に於いて　$B=ba_1^ka_2^j$,　$A=\frac{a_1jw}{a_2kr}$　なる式が觀測され得る。このAとBの觀測値に得られたkとjの値を代入し、基準年度のbを1とすればBよりa_1/a_2、更にAよりw/rの基準年度に對する時系列値を導出する事が出來るであろう。製紙産業に於けるa_1/a_2、w/rの値は第二表（次頁）の如くであつた。このw/rの計測値は、當該産業内に於いては一定しているものと假定されて得られa_1/a_2の比が時系列に對し制度的に一定しているものと假定されて得られたものであるが、若しこの假定が正しい（近似的に成立する）とみられる限り、勞働と資本の市場に現存する理論的相對價格であると名付けて良いであろう。

第二表
製紙産業に於けるa_1/a_2 w/rの計測値

a_1/a_2	
0.7823	
w/r	
昭6年	1.000
〃7年	1.790
〃8年	2.428
〃9年	2.743
〃10年	2.919

a_1は規模別に對する勞働時間（利用度）の差異に依つて影響され、a_2は又設備馬力數の資本組成に對する時系列的變化、操業度、機械設備の不均衡的老朽化過程度に依り影響を蒙ると考えられる。しかし、一般にアグリゲイティブな經濟變量を資料として用いる限り、規模函數のパラメタa_1 a_2 s_1 s_2の自律的變動を説明する事は出來ない。この點を明らかにする爲には資本項目を更に分解し、各プロセス毎の段階に於いて工學的變數を用い、資本項目の内容を明らかにする事を必要とする。これが工學的生産函數の重要性の存する理由であつて、經濟學的生産函數の測定に於いては、各時點について得られたs_1 s_2或はa_1 a_2の値から逆にその時點に於ける産業構造の規模別特性を計量的に觀測し得ると云う段階に留まる。

ともあれ一定の假定の下ではあるが、我々はw/rの理論値系列を得た。この値a_1/a_2は各産業間に就いて理論的には同一のものでなければならない。各産業部門の獨立的觀測から各自得られたw/rを比較する事に依つて、我々は生産函數のパラメタの安定性のみならず、企業の内部均衡のモデル自體の存在を確認し得る。産業部門別内部均衡のモデルは、その外生變數を媒介として、産業相互間の關係に迄擴張されなければならない。w/rの計測は、この方向に一つの示唆を與え得るものと信ぜられるのである。

（註7）　これは年度毎の reduced form porswetor を測定した上でそれ等の推定値を時系列に並べる事に依つて構造パラメタを推定する方法である。この方法は、辻村江太郎氏「習慣形成」經濟研究五巻四號に於ける消費構造の計測から示唆を受けたものである。

結　語

ダグラス函數　$Q=bL^kR^j$　の測定に對して、勞働と資本に關するスケイルファンクションの意味は明らかになつたと思う。然し之等は産業内生産函數とも呼ばれるものであつて、未だ投入―産出の構造關係を完全に表わしているとは云えない。それには從來しわ寄せ項としてその經濟學的意味が抹殺されて來た常數項bを幾つかの構造係數の結合項に分解しなければならない。この事は原材料項目の陽表的導入に依つてなされるが、これに依つて序文に述べた生産函數の投入―産出關係自體の意味が明らかとなるであろう。規模別原材料項目の資料缺除からこの點に關しては未だ計測を行つていない。筆者により今後に殘された課題の一つである。

本稿では構造方程式系に依る構造パラメタの安定的獲得への努力は同時に經濟行動者の合理的行動自體の確認を意味する事が強調された。内部均衡の模型はその外生變數を媒介として模型相互の關係に迄擴張されなければならない。計測の結果理論的に導出されたw/rの確認は、産業相互間の關連に我々の模型を擴張する緒口を開くと同時に、賃銀理論、資本利子の理論に對する計量經濟學の立場からの一つの理論的武器となるものと考えられる。