Title	生産構造の計測と与件 : 生産函数計測における工学的資料の援用について
Sub Title	Change in data and the measurement of production relations
Author	小尾, 恵一郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1956
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.49, No.5 (1956. 5) ,p.347(37)- 365(55)
JaLC DOI	10.14991/001.19560501-0037
Abstract	
Notes	計量経済学特集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19560501-0037

内閣統計局家計調査資料全國勞働者 （その2）

	所得階級	調査世帯数	實收入總額	貯蓄	實支出總額	飲食物費	その他の支出
昭和一一年九月—一二年八月	60	34	56.09	3.72	52.37	24.56	27.72
	70	131	65.64	5.68	59.96	27.12	32.84
	80	196	74.92	6.83	68.09	28.14	39.95
	90	214	84.95	8.89	76.06	30.04	46.02
	100	201	94.86	11.30	83.56	32.41	51.15
昭和一二年九月—一三年八月	60	34	57.12	3.90	53.22	25.15	28.07
	70	131	66.04	5.85	60.19	27.94	32.25
	80	196	75.21	7.96	67.25	30.10	37.15
	90	214	84.91	11.42	73.49	31.04	42.45
	100	201	94.86	13.74	81.12	32.82	48.80

註 昭和12—13年は調査世帯數資料がないため前年と同數とした。

朝日新聞社生計費指數

	p^1	p^2	$(p^1)^2$	$(p^2)^2$
昭和 6—7	1.000	1.000	1.000000	1.000000
7—8	1.044	1.023	1.089936	1.046529
8—9	1.104	1.045	1.218816	1.092025
9—10	1.193	1.049	1.423249	1.100401
10—11	1.267	1.059	1.605289	1.121481
11—12	1.319	1.099	1.739761	1.207801
12—13	1.407	1.165	1.979649	1.357225

p^1＝飲食物の價格指數

p^2＝その他の價格指數

生産構造の計測と與件

——生産函數計測における工學的資料の援用について——

小尾惠一郎

序　論——生産構造と與件の變化——

經濟構造の一つの極を形づくる（諸産業の）生産構造を把握しようとする場合に、必ず滿たされなければならぬ一つの條件は把握されたその構造が自律的なものであるということである。

解明しようとするある現象に關して、豫測（及び、又は統御）が可能であるためには、この現象の背後に潛在しこの現象を生み出したと考えられる機構を反映（記述）するような模型を組むことが要請される。この模型が實驗（又はこれに代る統計的推定操作）によつて計測された特定の値のパラメタ（構造の特性を示す）をもつ諸關係式として、具體的に把握されたときそれは構造系（structure）とよばれる。この構造系（例えば産業構造全體又はその一部）のパラメタが同一對象について繰返し計測されたとき、㈠パラメタの値が推定誤差の許容しうる範圍内で安定的な値を示すならば、㈡又はパラメタの値の變位の仕方が豫知しうる樣な方法でこの構造が把えられたならば、把えられた構造系は自律的であるといわれる。

消費者の選好が與えられており所得額及びその分布が決まつていればある價格體系の下で消費者行動を媒介として需要される財の種類・數量が決まり、この需要に對應して、生産者の生産者行動が媒介となつて、所與の技術的條件の下で産業分布及び雇用分布が決まり、そしてこの兩者の分布は再びはじめの所得額と分布を決めることとなつてここに經濟體系は完結する。從つて、この體系に於て經濟主體の行動（behavior）は生産と消費の二大極に集約される。周知の通りこの二つの極における主體の行動を基本的に制約している關係は消費面における消費者の選好と生産面における技術的投入産出の關係である。而して經濟構造分析のためのこれら二つの基本的關係のうち後者卽ち投入産出に關する基礎的關係たる生産函數を、許される限り自律的な形に於て把握しようとするのが本稿の目的である。[註1]

夙に前世紀末葉ヴィクセルによつて試論的に提示された對數線型の生産函數を用いて二〇年代にダグラスが貨幣タームによる資本項目表示の計測を行つて以來メンダースハウゼンの批判[註2]を經て四〇年代マルシャクが需要構造に關して安定的であるという意味に於て自律的な同時確率推定方式を發見して以來生産構造の自律的計測は顯著な進展を遂げた。[註3]

周知の如くダグラスの The Theory of Wages に於ける劃期的計測以來、生産函數における生産要素の各々は勞働、資本、（及び土地）というふうにアグリゲイトな項目によつて代表せしめられて來た。そして又經濟體系を總計量より成るものと觀、かつまた生産函數を短期的に妥當する分配論上の一要具と見做す限りに於てこの取扱いは、さしずめ不當なものと斷じるには當らないであろう。併し乍ら生産諸部門間における諸財の交流を解明し且つ又前記體系に高度の自律性を附與するという吾々の目的よりするならば、生産函數における資本項目の具體的な形態における把握と表示が必須のものとして要請されるのである。もし資本の具體的內容を構成する施設や機械の製作に關する技術水準が一定であり、且つその製作に要する諸材料の價格體系が不變であるならば、設備に投下された貨幣資本の具體的內容は生産せられる財の種類と生産の規模の決まると共に固定されるものと考えられる。併し乍らここに困難な問題が起こる。技術の進歩をしばらくおくとしても、具體的資本項目の相對價格の變動は貨幣單位で表わされた資本の內容に變容を與えひいて生産函數に變位を生じ、もしそれがダグラス型の生産函數ならば j の値、卽ちいわゆる資本の生産彈力性は〝豫知し難い仕方〟に於て變動する可能性を生ずるのである。この可能性は技術進歩に於て一層著しいであろう。卽ちこの場合には資本項目を具體的施設の測度（メジュア）で表わしても技術進歩は生産函數を變位せしめる。（例えば吾々は硫安工業に附隨するアンモニア生産の歴史に於けるガス法と電解法の代替消長に顯著な一例を見ることが出來る[註4]。）技術進歩と價格變化に基く生産構造の變化は資本—勞働—土地型の生産函數に屢々トレンドという形で導入されて來た。併し乍ら生産構造が單に「時の經過」というだけの理由で變位していくという考えは構造の自律的把握にとつていささかも有用な知識を加えるものではない。この他更に第三の要因として自然的條件が擧げられる。例えば電力生産の構造を水力發電の部門に關して把握しようとするときは、容易に察知されるように、この〝自然〟なる要因は投入産出の關係に全く支配的影響をもつものである。

電源開發の進展と共に「良地」は次第に稀少となつて、統計資料から計測された電力の生産函數は未知の仕方に於て——資源としての「良地」の涸渇を反映して——下方に變位するであろう。

デュウセンベリイは經濟諸變數（價格所得等）の變化よりも與件としての消費者の選好の變位の方がより緩漫であるという證據はないという立場からヘテロドクスな消費の理論と計測を展開したのであつたが[註5]、筆者の見る所ではこの提言は消費現象におけるよりもむしろ生産部門の或る種の産業についてより妥當するであろうと考えるものである。デュウセンベリイが消費者選好の「うつろいやすさ」を強調し、ファッショナブルな消費者需要の機構模型に基いて計測を展開したとき、その根底におかれた「消費行動模型」は現象説明のための一つの假説であつた故に擇一せられるべき他のもう一つの假説が嚴存するのである。[註6] 然るに生産に於ける關係式に生ずる變位の原因は、生産要素の價格變動と工學的—（並に企業管理における）技術進歩であり、そこに見られる生産函數の變位は假説ではなくして疑をさしはさむ餘地のない事實なのである。

斯樣にして吾々は經濟體系の機能を本質的に制約する條件としての投入産出關係（生産函數）を自律的な形で把えるためには經濟諸量と與件との相互關係を陽表的に探り上げざるをえない。いうまでもなく「自然」としての、又技術としての「與件」と經濟諸量の相互交渉は殆どの經濟現象に共通なものであり、これら與件が經濟諸變量を內容とする生産の構造に如何なる關係をもつか、前者の變動は後者に如何なる仕方で影響するかが明確に理解される樣な形で生産の構造が知られたとき吾々は生産の構造を最自律的な形に於て把え得たということが出來るのである。この意味に於て此の稿の目的が果されるならばそれは自ら與件と經濟量の交渉する機構を剔出し、定式化する事にもなるであろう。

上述の目的を達成するために二つの接近が可能であると思われる。その一つはH・B・チェナリイ[註7]に依つて投入産出分析における投入産出係數確定のための有力な手段として提出された『工學的生産函數』である。

チェナリーは工學的資料及び諸關係を援用して、從來經濟學に於て扱われた生産函數における諸量を、その背後に於て生産技術の名によつてこれら諸量を生み出し規制している工學的次元の諸量に結びつけようと試みるのであつて、この試みはまさに前記マルシャクに依る統計的計測論における先驅的成果と共に生産構造計測の發展の上に銘記されるべき一里程を劃するものと思われる。併し乍ら吾吾は工學的生産函數の導入に基く分析を檢討するときこのアイディアルな處理を多樣な企業の現實[註8]と結びつけるものとしてなお第二に工程別經濟學的生産函數を計測する必要を認めるものである。

以下節を追つて、工學的生産函數の意味を明ならしめチェナリイの立場を出發點としてその周邊、ドーフマンによつて最スペシファイされたリニアプログラミングによる生産分析[註9]、シェパードによる連續的な單一工程生産函數[註10]との關連を明かにすると共に産業の性格に依ては經濟學的生産函數の工程別計測の併せて行われるべき所以を明かにし、最後に水力發電業における自然的條件の變化の影響を

定式化するという意味で最普遍的な生産函數を工學的資料の援用によつて導出しようと思う。

一　生産函數計測と工學的資料

（1・1）經濟學的及び工學的生産函數

或る對象に關しその形態や位置を變化せしめるためには物理的な條件としてエネルギーがこの對象に對して適用されねばならない。吾々は産業の施設を以て原料の流れとそれに對するエネルギーの適用という形で表現しうる。從つてプラントにはエネルギー源とそれを適用する施設がありこの施設を構成する單位は工學的設計の立場からは數多く存在するが、原材料や生産物の品質價格が變化した際、設計に重大な變化をうける様な主たる要素（技術的に相補的な要素は一個に統一される）だけを考慮することに依て施設部分から成る一つの群（グループ）をつくるときこの群によつて行われるエネルギー變化の系列を生産工程とよぶ。例えば紡績業における粗紡及び績紡工程、水力發電における、取水、導水、發電各工程の如きものはこれに相反する。投入される諸材のうちで原料（完成品の一部を物量的に形成するもの）はエネルギーを受けるがこの原料にエネルギーを與えるものを處理要素とよぶ。[註11]

まず一つの工程における工學的生産函數が定式化される。記號を次の樣に定める。

生産工程要素	要素の量	要素の質
1　原料	m	μ
2　處理要素　(a)資本材	k	
(b)勞　働	l	
(e)エネルギー	e	
（(a)(b)(e)を一括して）	y	ρ
3　生産物	x	ξ

原料の性質と生産物の性質が與えられると原料から生産物への變形に必要なエネルギーが對應する。即ち原料が生産物となるためには何が爲されねばならぬかを示す此の關係を原料變形函數（material transformation f.）と呼び（p s は生産物、原料の種類）

（1・1）　$\phi(X_p, \mu_s, \xi_p, E_r)=0$　（原料變形函數）

と表わす。E_rは變形のため要求されるエネルギー量であり、このエネルギー量をみたすため供給されるべきエネルギーの量は施設の設計の變化に伴つて異るから必要とされるエネルギーは處理要素の性質ρ_iの函數として表わされる。これをエネルギー供給函數とよぶ。即ち、

（1・2）　$E_r=E(\rho_i)$　（エネルギー供給函數）

ところで工程におけるエネルギー變換の諸過程は各々自然科學の諸法則の特殊な適用（これらの特殊な適用法則は設計法則 design law として施設の設計に實用されている）に他ならない。設計法則は原料、エネルギー及び施設の物理化學的性質を變數として含む。これらの變數を價格の直接附與しうる經濟量と區別するために工學的變數（engineering variable, or process v.）とよぶ。[註12] 扨て(1・2)のE_rを(1・1)に代入すると、

（1・3）　$\phi[X_p, \mu_s, \xi_p, E(\rho_i)]=0$　（工學的生産函數）

を得、この式は生産物及び原料の量及び質、とその變形に必要な處理要素の性格ρ_iの關係を示している。これは工學的生産函數（engineering production function）と名づけられる。この函數は次の投入函數と共に以下の吾々の分析に重要な役割を果たす。

次に工學的變數は、價格を附與しうる經濟學的ディメンジョンの量（經濟變數）と關係づけられねばならない。例えば水力發電における工學的變數たるダムの高さとその構築に必要とされる經濟量たるセメントの量との關係という類である。この關係を投入函數（input f.）と呼び、

（1・4）　$m=m(\pi_i)$；$y=y(\pi_i)$　（但しπ_iはρ_i, ξ_p, μ_sを一般的に示す）

mは原料の量（トン、バレル等で計られる）、yは施設を構成する財の量（例えばダム用セメント、鐵財の量等）である。第一の式は例えば紡績に要する原綿の量は紡がれる糸の番手、紡績機の性質、原綿の品質等により變化すること、第二の式は例えば水力發電用タービンの製作に要する諸材料は水の流量、落差、水車の特有速度等々により變化する事を示す。チェナリーも指摘する樣に勞働の投入函數の計測が最問題となろう。これに關しては後述する。

かくして投入される經濟量と生産物の關係を示す、從來のいわゆる「生産函數」とは工學的生産函數(1・3)と投入函數(1・4)との集合に對して名づけられるべきものであることが明かであろう。最簡單な場合には(1・3)式を單一生産物に關するものとして工學的生産函數(1・3)は次の樣になる。

（1・5）　$\phi_1(X_1, \pi_i)=0$

且つ又一つ一つの經濟量m_i y_iが夫々ただ一つの工學的變數π_1 π_2等により表わされる場合は(1・5)式は投入函數をそのまま代入して、

（1・6）　$\phi_1(X_1, m_1, k_1, l_1, e_1)=0$

と表わされよう。經濟量によつて表示された生産要素各項目の内容m_1 k_1 e_1はまさに相對價格と獨立に一義的に定まり、從つてこの樣な簡單な工學的關係の上に成立する産業があればその生産函數は從來の資本—勞働型で計測されたときでもなお十分自律的であることが理解される。然し乍ら斯樣な場合は施設の設計がこれを構成する價格變動に對して全く變更される餘地のないことを意味するのであるから、その樣に簡單な關係は殆ど存在しそうもないというべきである。

（1・2）工學的變數の最適値の決定及び經濟學的生産函數への變換

一般に工學的生産函數と投入函數に基いて、特定財の特定生産水準に對して生産費用を極小ならしめる樣な工學的變數の組合せが求められる。費用は經濟諸量m及びyの價格を夫々P^m P^yとして、

$$\sum_{j=1}^{J} p^{y}{}_{j}y_j+\sum_{k=1}^{K} p^{m}{}_{k}m_k$$

で與えられるからこの式のy及びmに投入函數(1・4)を代入して總費用Cは

(1・7)　$C=C(\pi_1,\cdots\pi_n,p_1,\cdots p_s)\equiv\sum_1^J p^{y}y(\pi)+\sum_1^K p^{m}m(\pi)$

(n は工學的變數の種類の數，s は經濟變數の種類の數 卽ちK＋J＝s)

工學的生産函數(1・3)のϕに於て生産量Xを一定値$\overline{X}_0$としたとき、ϕを制約條件として(1・7)の費用Cを極小ならしめる如きπ_iの値は周知のテクニクにより

$$z=C(\pi_1\cdots\pi_n)-\lambda\phi(\overline{X}_0,\pi_1\cdots\pi_n)\quad(\lambda;\ 未定常數)$$

とおき

(1・8)　$$\frac{\partial z}{\partial\pi_i}=\frac{\partial C}{\partial\pi_i}-\lambda\frac{\partial\phi}{\partial\pi_i}=0$$

卽ち、これよりえられるのは工學的變數に關する「限界生産力均等式」

(1・9)　$$\frac{\partial C}{\partial\pi_i}\Big/\frac{\partial C}{\partial\pi_1}=\frac{\partial\phi}{\partial\pi_i}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial\pi_1}\quad(i=2,\cdots,n)$$

に他ならない。(1・9)式の($n-1$)個の式と(1・5)式の工學的生産函數からn個の工學的變數π_iの最適値π_i^*が求められる。(ここに注意するべきことは、$\frac{\partial\phi}{\partial\pi_i}\gtreqless 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial\pi_i}\gtreqless 0$ であり、$\frac{\partial C}{\partial\pi_i}$も亦常數とは限らないことである。) これに對應して設計π_i^*の下に使用される經濟量 $m^*=m(\pi_i^*)$　$y^*=y(\pi_i^*)$ も亦定められる。

斯くしてもし吾々が本來全く普遍的性格をもつ變形函數とエネルギー供給函數、卽ち工學的生産函數を知っているならば、技術の變化は該函數を特性づけているパラメタの値及び工學的變數の値のとりうる限界の變化(例えば高速の回轉を可能ならしめる原動機の導入、金屬の摩滅係數抗張力、對藥品强度、材の摩擦係數——これらはすべて設計法則(design law)におけるパラメタである——等における變化)となつて反映し、それが經濟學的生産函數に如何なる仕方で影響するかを豫知することが可能となるのである。

次に資本、勞働、原料といつたアグリゲイトされた項目に對する生産等量線($X=\overline{X}_0$に對應する無差別曲線)は、各項目ML等々の內部における經濟諸量の相對價格を一定とした場合についてグラフに畫ける。卽ち、

(1・10)　$$M=\sum mp^m=M(\pi_1\cdots\pi_n),\quad L=\sum lp^l=L(\pi_1\cdots\pi_n)$$
$$K=\sum kp^k=K(\pi_1\cdots\pi_n),\quad E=\sum ep^e=E(\pi_1\cdots\pi_n)$$

として、貨幣表示量MLKE間の代替が示される。所で(1・10)式のML等々の値はπ_i^*に對しては一義的に定められるが同一の總計量M—L…Eの組を與える如きπ_iの組みは一般に一義的には定まらない(複數組ありうる)。從つて$\overline{X}$に對するK—L平面の生産等量線は、L軸上にLの一定値L_1を定め他の總計量EMも亦一定として費用(この場合L_1EMは一定數) $\sum p^k k=K$ を極小ならしめるπ_iの組$\{\pi_i'\}$を求め $K(\pi_1',\cdots\pi_n')=K_1$ を以てL_1に對應せしめることによつてK—L上の等量線($X=\overline{X}$に對する)上の一點が求められる。この操作を繰返して(L_2K_2)(L_3K_3)等々を求めて總計量間の生産無差別曲線群(チェナリイはこれを經濟學的生産函數とよぶ)が畫かれてゆく。チェナリイによつて行われたこの計算はまことにエラボレイトなものといわばならぬが筆者はこの樣にして得られた總計量間の曲線が如何ほど計算の勞に價するかについては疑問なしとしない。計算の前提として項目內の相對價格$p^k{}_1\cdots p^k{}_K$等々は安定的なのであるから、直接に經濟量として觀測された勞働及び資本に關する總計的資料は共に一義的にして安定的な勞働の種類、施設の內容を保持しているわけであり、はじめに明かにした通り直接この資料から計測された生産函數は工學的關係まで遡るまでもなく價格變動に關する限り自律性の條件にかなつているものといわねばならない。チェナリイが總計量の生産等量線を畫く際に用いた條件が滿たされている限り、經驗的に容認しうる函數形(例えばダグラス型)のパラメタは安定的であろう。技術の變動を別とする限りチェナリイのいわゆる「經濟學的生産函數」の計測は工學的關係まで遡るに及ばないのであり、從つて吾々が工學的關係との關連に於て關心をもつものは $X=X(L,K,M,E)$ ではなくて、物量的經濟量 (physical input) の間の關係 $X=X(y_1\cdots y_J,m_1,\cdots m_K)$ である。

二　「工學的生産函數」、分析とその周邊

(2・1)　經濟學的生産函數と工學的生産函數との關係

前項に於て經濟學に於て從來扱われて來た資本—勞働型の生産函數が直接物量的經濟量によつて表わされるのは(1・6)式の示す樣に背後に存在する工學的關係が極めて特殊の條件をみたしたときに限られる。チェナリイは斯かる特殊な場合に於て兩者の關係を論じたに止まり、從來經濟學者の使用して來た生産函數はあまりに特殊なケースとしての烙印がおされているように見える。ダグラス型函數は右の特殊な場合のうちの更に特殊な場合なのであるか。この問題を明かにするためには物量單位によつて計測される經濟量間の關係$X=X(y,m)$と工學的生産函數の間に成立する關係を更に進んで考察せねばならない。吾々はこの關係を分析することに依つて生産の基盤をなす工學的關係と經濟諸量の相互交渉を明確に把握し生産構造系の基礎をなす生産函數の意味を明かならしめることが出來るはずである。新しい記號によつて工學的生産函數を

(2・1)　$X=\phi(\rho_1,\rho_2,\cdots\rho_I)$,　ρ_i 工學的變數 $i=1,\cdots I$

と書き、投入函數を

(2・2)　$y_j=H_j(\rho_1,\rho_2,\cdots\rho_I)$　y_j; 經濟變數卽ち價格の附與しうる物量及び勞働量 $j=1,\cdots,J$.

で表わそう。

(2・1・1)　I＝J　卽ち工學的變數と經濟變數の數の等しい場合はρ_iをy_jについて解いて

(2・3)　$\rho_i=H_j^{-1}(y_1,\cdots y_J)$　　$j=1,\cdots,I(=J)$

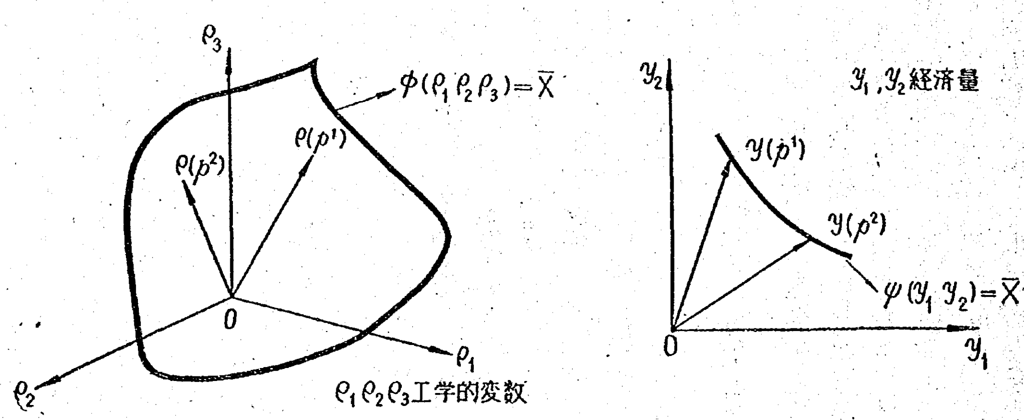
が求められこのρ_iを(2・1)に代入して

(2・4)　$X=\phi(y_1,\cdots y_J)$

を得る。特に(2・2)式が　$y_j=H_j(\rho_j)$　ならば(2・4)式はチェナリーが最簡單な場合として擧げた(1・6)式に相當するわけである。チェナリーはMLKEに關する生産函數を經濟學的生産函數と呼んだが、吾々は

第 1 圖

(a) 生産量を一定とした工學的生産函數等量面　　(b) 生産量を一定とした經濟學的生産函數等量線



これをより特殊的に貨幣表示による生産函數とも稱すべきものであると考える。吾々は、物量的經濟量 $y_1 \cdots y_J$ と生産量Xの間に成立する關係を「物量的生産函數」と呼び、經濟學的生産函數は物量表示及び貨幣量表示の二種類の生産函數の總稱と解することにしたい。依つて以下一般に

(2・5)　$X = \Psi(y_1, \cdots y_J)$

に依つて表わされる關係を「物量的生産函數」という名稱で呼ぶ。從つてこの表現を用いれば工學的生産函數が與えられ工學的及び經濟的變數の數が等しいとき物量的生産函數は經濟變數に附與される相對價格と無關係に決定されるといえる。これは、施設の設計が施設を構成する素材價格の如何に拘らず一義的に決定されざるをえない場合に相當する。

（2・1・2）　I>J の場合。第1圖(a)(b)は　I=3, J=2　なる場合について工學的生産函數と物量的生産函數の關係を示す。工學的生産函數(2·1)（又は(1·3)）に於て生産量Xを一定値X̄に固定した場合の等生産量面はこの圖(a)の ρ曲面に示されている。經濟變數 y_j の價格 p_j^y が與えられると投入函數(2·2)を用いて費用　$C=\sum p_j^y y_j=\sum p_j^y \cdot H_j(\rho_1\cdots\rho_I)$　を(2·1)の制約條件の下で極小ならしめる様な ρ_i の組 $\{\rho_i^*\}(i=1,2,3)$ が求められこれが圖の(a)の ρ曲面上の點　$\rho^*(p^1)$ によつて示されている。この點は既に述べた通り經濟量 y_j の價格が與えられたときの工學的最適設計を示すものである。次に、求められた最適値 $\{\rho_i^*\}$ を投入函數(2·2)　$y_j=H_j(\rho_1\cdots\rho_I)$ $\substack{i=1,2,3\\ j=1,2}$　に代入することにより最適設計の行われた際に使用されるべき（費用極小の）經濟量 y_j の値 y_j^* が知られる。これは圖の(b)の $y_1 y_2$ 平面における $y^*(p^1)$　によつて示されている。ρ^* は p_j^y をパラメタとして決まり從つて $y^*(\rho)$ も亦 p_j^y をパラメタとして決まる。從つて y_j の價格が p_j^1 から p_j^2 に變化したとすれば全く同様のプロセスを經て　$\rho^*(p^2)$　が決まると共に $y^*(p^2)$ が對應する。

工學的生産曲面上の點　$\rho^*(p^1)$　に關する工學的變數の最適値 $\{\rho_i^*\}$ を投入函數(2·2)に入れれば、y 空間の一點 $y\{\rho^*(p^1)\}$ が決まるのであるからこれを　$y_1^*=y_1(\rho_1^*,\cdots\rho_I^*)$　$y_2^*=y_2(\rho_1^*,\cdots\rho_I^*)$, ……, $y_J^*=y_J(\rho_1^*,\cdots\rho_I^*)$　としよう。ここに ρ_i^* は夫々 $y_1\cdots y_J$ の價格 $p_y^1\ p_y^2 \cdots p_y^J$ をパラメタとしてもつ。即ち　$\rho_1^*(p_y^1\cdots p_y^J)\cdots\rho_I^*(p_y^1\cdots p_y^J)$　である。施設が生産計畫主體によつてすべて最適設計されその事によつて建設される際は $\{\rho_i^*\}$ に對する最適施設が一義的に決定され實現されるであろう。併し施設が工作機械を主とする様な場合最適値 $\{\rho_i^*\}$ を完全にみたすものがなく、この最適値の近傍に於て複數個の群 $\{\rho_i\}$ より成る機械が市販されているとすれば、企業はこれら有限個の $\{\rho_i\}$ の組の中から二つを選んで並用することになる。[註13] 而してもし生産物一單位當りの y_j^* 即ち　$\frac{y_1^*}{X}=a_1$, $\frac{y_2^*}{X}=a_2$, $\cdots$, $\frac{y_J^*}{X}=a_J$　が生産量Xに對して無關係であるならば、これは線型計畫の扱う場合に他ならない。從つて工學的生産函數に基く生産分析は線型計畫を右に述べた意味に於て、一つの特殊な場合として抱含するものであることが理解される。

（2・2）　補論——ダグラス型生産函數について——

いま工學的生産函數が $\sum e_i$ 次のダグラス型とすると、(2·1)は

(2·1′)　$\underline{X}=\sum_{i=1}^{I} e_i\underline{\rho_i}+e \qquad \underline{X}\equiv\log X,\ \underline{\rho_i}\equiv\log \rho_i$　以下同様

$e_i,\ e$; 常數

投入函數も亦ダグラス型であるとすれば、

(2·2′)　$\underline{y_j}=\sum_{i=1}^{I}\alpha_{ji}\underline{\rho_i}+\alpha_j \qquad j=1,\cdots J$

費用Cは、

(2·6)　$C=\sum_{j=1}^{J}p_j^y H_j(\rho_1,\cdots\rho_I)=\sum_{j=1}^{J}p_j^y y_j=\sum_{j=1}^{J}\left\{p_j^y\prod_{i=1}^{I}\rho_i^{\alpha_{ji}}\alpha_j\right\}$

工學的變數に關する限界生産力均等式〔1・2〕項(1·9)式に

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i}=\frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1}^{J}p_j^y\alpha_{ji}y_j$$

及び(2·1′)から計算された $\frac{\partial \phi}{\partial \rho_i}$ を適用すれば、

(2・7)　$\frac{1}{e_i}\sum_{j=1}^{J}p_j^y\alpha_{ji}y_j-\frac{1}{e_1}\sum_{j=1}^{J}p_j^y\alpha_{j1}y_j=0$

なる費用極小の條件を得る。これは y_j に關する同次式であるから y_j 空間の生産擴張線（expansion path）は原點を通る直線である。このパスを示す ray の方向は y_j の相對價格の異ると共に異ることはいうまでもない。あらゆる可能的價格狀態に於て(2·7)をみたす y_j（圖(b)の生産可能軌跡）即ち(2·5)式の Ψ はダグラス型の物量的生産函數でおきかえることが出來る。所で(2·7)をみたす y_j は投入函數 $H_j(\rho_1\cdots\rho_I)$ を介して ρ_i に關係しているが、y_j の値が(2·7)における價格係數 p_j^y を正ならしめる如き ρ_i^* のみが工學的生産曲面のうちから選ばれなければならぬ。この意味に於て第1圖(b)の $y_1 y_2$ 平面上の物量的生産面上の點 $y^*(p_1)$　$y^*(p_2)$ 等は工學的生産（等量）曲面上の "efficient point" に對應するものと解せられる。

次に投入函數を線型とした際も容易に物量的生産函數 Ψ はダグラス型となることが知られる。[註14] 斯うして以上何れの場合もシェパードによつて single process production f. として用いられた、投入量を物量單位に依つて計測されたダグラス型生産函數に歸着する。シェパードは各プロセスを ray として與える "polyhedral corn" は凡ゆる可能的プロセスを考慮するならば "homothetic function" によつて連續曲面に置きかえられると考え、その特殊な場合としてダグラス型を物量單位の投入量に對して使用したのであつた。[註15] そしていま吾々が吟味し來つた場合に於てはシェパードの定式化が工學的關係まで掘り下げて見たとき妥當なものとして支持されるべきものであることが明かとなつたと考える。

（2・3）　經濟學的生產函數の工程別計測の必要性

ここで吾々は全項迄に扱われて來た生產の計畫主體の行動（behavior）の性格について考察する。計畫主體は所與の生產量を達成するのに最經濟的な（費用極小なる）施設の設計を行うのであり、その際施設を構成する素材たる經濟諸量の價格が斟酌されるのであるから、この行動が最も明確な形であてはまるのは大きな固定施設を要する產業部門（例えば製鐵業、重化學工業、發電業等）に於てであることは容易に察知される。これら產業に於て施設は〝構築される〟のであるが、一方施設の大部分を〝既製〟の機械設備の〝購入〟に依存する產業（紡績業とか主として工作機械を用いる諸產業）に於ては如何であろうか。勿論原理的にはこの場合の事情も前者と異る所はなく、計畫主體が最經濟的と見なす工學的變數をその屬性として有する機械が購入されるであろう。併し乍ら機械製作のための原材料價格を所與としての最小費用の機械の設計は實は多くの場合他の產業の企業に於て製品の設計として行われているのである。而して同一作業を行う機械は複數種類製作販賣されているのが事實である。このことは、上述の設計過程の原理を適用して述べるならば、この機械の作業と協同する種々のエネルギー適用作業に關する物量的經濟量の關係（投入函數及びエネルギー供給函數）を基礎としてこれら諸量の價格が種々の値をとつたときに夫々最適値として求められる様な工學的變數の値をもつように機械が設計され販賣されていることを示すものに他ならない。故に特定企業の一つの工程に於て如何なるタイプの機械が採用されるかはこの工程における勞働及びその他の原材料の價格の狀態に依存する。機械の種類と勞働（及び原材料）間の代替の樣相は工學的生產函數と勞働を含めての投入函數の形如何にかかつている。

處で生產函數を變位せしめる要因と考えられる技術的進步とよばれるものの內容は二つに區別されよう。第一は現在一部で行われている技術が次第に廣汎に普及するという場合であり、第二は今迄に存在しなかつた技術が新に發見導入される場合である。吾々が原料變形函數及びエネルギー供給函數の形を十分詳しく知つているならば、兩者の意味での技術的變化が經濟學的生產函數に與える諸影響を豫知しうるであろう。而して工學的生產函數は設計法則及びエネルギー供給函數が或る程度明確に定式化されている產業（例えば重化學工業とか發電業等）に於ては、これを導くことはさほど困難ではない。けれども設計法則とエネルギー供給函數の明確ならざる諸產業（例えば紡績業とか工作機械を主體とする諸產業）に於ては、その導出が容易ではないことが豫想されよう。從つて後者の場合吾々は第二の意味における技術變化によつておこる經濟學的生產函數の變位を豫知することは可成りに困難であると考える。斯樣な場合に於ては、吾々の意圖する自律的生產函數の計測は容易な事ではない樣に見えるかもしれない。併し乍ら實際の問題として吾々の直面する經濟學的生產函數の變位は多くの場合は導入された新技術の普及過程から生ずるものと考えられる。例えば紡績業における技術的變位要因の主たるものは一部に行われていたラージパッケイジやニューマティククリアラーの普及、ハイドラフトと代るスーパーハイドラフトの普及[註16]という類のものである。そうしてこれらの變容は夫々精紡工程及び粗紡工程に於ける投下資本の量の變化として把握出來る。吾々がクロスセクション分析によつて規模別に勞働―資本の總計項目で（經濟學的）生產函數を計測した場合に、もし計測された函數が各期間又は若干期間每に變位するという事實を見出したならば、その變位の原因となつた技術的變化の大部分は、總計項目に含まれる資本勞働の工程別に見たときの比率が（資本設備の價格を媒介として）各企業の規模（一定の生產水準に對する資本勞働の具體的內容）の異るにつれて異つて來るという事情（卽ち新技術の普及）によつて說明されるはずである。

玆に吾々は生產函數を工程別に計測せねばならぬという要請を見るのである。卽ち各工程に於ける工學的生產函數はこれを直接計測し難い場合でも工程別に經濟學的生產函數を計測して、以て第一の意味における變位要因を各工程における資本設備の勞働に對する消長（capital intensity の變化）を見る事によつて剔出し得るであろう。

それでは右の場合各工程に於ける經濟學的生產函數は如何なる形で把えられるべきか。特定の函數形を作業假說として設置してこれを生產者行動の模型の假說と共に檢定する方法が考えられる。そして幸なことに吾々はここに同時に檢定されるべき二つの假說のうち一つをアプリオリに許容しうると考えるべき理由をもつ。というのは前項補論に於て考察した樣に、工學的生產函數が對數線型で、投入函數が對數線型又は線型函數で近似しうるならば（そしてこの近似は可成りに一般的であろう）、凡ゆる價格に對應する最適設計の efficient point の軌跡としての物量的經濟學的生產函數はダグラス型として與えられるからである。

吾々はかくて工學的生產函數の導出困難なる場合（これは特に勞働―資本間の代替の著しい工程より成る產業を扱う場合である）の工程別經濟學的生產函數の計測を强調したい。そして工程別函數の計測は一つの系として職種別賃金格差の解明をも與えるのであるが、これら計測については次稿に於て詳論したいと考える。

（2・4）　施設の繰業の分析

（1・1）―（2・3）節に於ては一定の生產量Xに對して費用を極小ならしめる樣な工學的變數の値とこれに對應する經濟變數の値が決定される機構が解明されたのであるから、この機構に對應する企業行動は右の過程から導かれる（長期）費用函數を介してプラントの新投資現象に關するものというべきである。この項では既設の施設が如何なる仕方に於て利用されるかについて（卽ち繰業）の問題を考察したい。

〔1・1〕の記號に從つて原料變形函數及びエネルギー供給函數を夫々

$$X=\phi(\xi,\mu,E_r) \qquad (2\cdot4\cdot1)$$

$$E_r=E(\rho_i) \qquad (2\cdot4\cdot2)$$

とし、原料、設備、勞働及び動力に關する投入函數を

(2·4·3)　$m_k=m_k(\xi,\mu,\rho_i)$,　$y_j=y(\xi,\mu,\rho_i)$,　$l_n=l(\xi,\mu,\rho_i)$,

$e_\varepsilon=e(\xi,\mu,\rho_i)$　$(\rho_i;\rho_1\cdots\rho_I)$

としよう。處でエネルギー供給函數は、E_sを以て供給されるエネルギーとし、ηを以て效率を表わすならば、次の様に書いてよい。

(2·4·2′)　$E_\gamma=\eta\cdot E_s$,　$\eta=\eta(\rho_i)$

卽ち一定の性質の原料を生産物に變形する工程に於て物理及び化學的に要求されるエネルギーは(2·4·1)式により決まつているが、一方これに對して供給されるエネルギーは工學的變數ρ_iの値によつて變化するのであつてその施設の特性ρ_iが與えるエネルギー效率ηが1に近いほどその施設は工學的に優秀なものであることを意味している。最一般的な表現としてはρ_iは施設を構成する素材の品質（例えばボイラーをつくる金屬の物理化學的性質）までも含むのであるから、(2·4·2′)式は生產技術のあらゆる可能的集合の限界を示すものというべきである。チェナリイはかかる一般的場合に於ける資本投下の行爲を分析しているのであるが、吾々はこの一般的表現を更に特定化することが出來る。卽ちここに選擇の對象となる二つの"技術"がありこれを新技術(1)及び舊技術(2)と呼ぶならば、兩者の技術は、ρ_iのうちI'個の$\rho_1\cdots\rho_{I'}$に夫々$\rho_1^{(1)}\cdots\rho_{I'}^{(1)}$及び$\rho_1^{(2)}\cdots\rho_{I'}^{(2)}$という相異る値を與えることによつて表現される。〔これは不連續プロセスの選擇問題（その特殊のものが線型計畫である）におけるプロセスの特定化を工學的基礎まで掘り下げて一層自律的に一般化したものに他ならない。〕そうすれば新技術に基くエネルギー供給函數は、(2·4·2) より　$E_\gamma=E_\gamma(\rho_1^{(1)},\cdots\rho_{I'}^{(1)},\cdots\rho_I)$　となりこれを$E_\gamma^{(1)}$とかけば、$E_\gamma=E_\gamma^{(1)}(\rho_i)\cdots$を(2·4·1)に代入して新施設に對する工學的生產函數は

(2·4·1′)　$X=\phi[\xi,\mu,E^{(1)}(\rho_i)]\equiv\phi^{(1)}(\xi,\mu,\rho_i)$

同様にして舊施設に關しては

(2·4·1″)　$X=\phi[\xi,\mu,E^{(2)}(\rho_i)]\equiv\phi^{(2)}(\xi,\mu,\rho_i)$

なる工學的生產函數が定められる。ここで吾々は工學的變數を二つの群に分け、投入函數のうち、y_iにのみ含まれるものを$\rho^{(v)}$、m_k l_n e_εにのみ含まれるものを$\rho^{(c)}$とする。前者は施設の規模を表わす工學的變數、後者は繰業度に關するそれと定義される。こうして$\rho^{(c)}$は既に$\rho^{(c)*}$なる値に定められているから繰業の行動は

$$X=\phi_1(\xi,\mu,\rho_1^{(v)},\rho_1^{(c)*})+\phi_2(\xi,\mu,\rho_2^{(v)},\rho_2^{(c)*})$$

なる制約の下に收益

$$PX-\sum_k p^m[m_k(\rho_1^{(v)},\rho_1^{(c)*})+m_k(\rho_2^{v},\rho_2^{(c)*})]-\sum_k p^c[l_n(\rho_1^{(v)},\rho_1^{(c)*})+l_n(\rho_2^{(v)},\rho_2^{(c)*})]-\sum p^e[e(\rho_1^{(v)},\rho_1^{(c)*})+e(\rho_2^{(v)},\rho_2^{(c)*})]$$

を極大ならしめる$\rho_1^{(v)}$ $\rho_2^{(v)}$の値$\rho_1^{(v)*}$ $\rho_2^{(v)*}$を求める過程によつて全く普遍的に表現される。右の生產函數の左邊Xをパラメタとして最後の式の第二項以下の和（費用）を極小ならしめる手續の下にえられる費用の軌跡は短期費用曲線に他ならない。

三　自律的生產函數の導出

――水力發電に於ける例――

如何なる產業もそのおかれる環境（資源の豐度を含めて）自然的條件によつて影響されぬものはないが特にこの部門に於ける生產構造は河川の流量、流域の狀況等水力資源の條件の多樣性の故に屢々case by caseの考察を行う他ない樣に見える。電源の開發の進展に伴い次第に「良地」が涸渇して、統計資料より計測された生產函數は豫知し難い仕方に於て下方に變位するであろう。

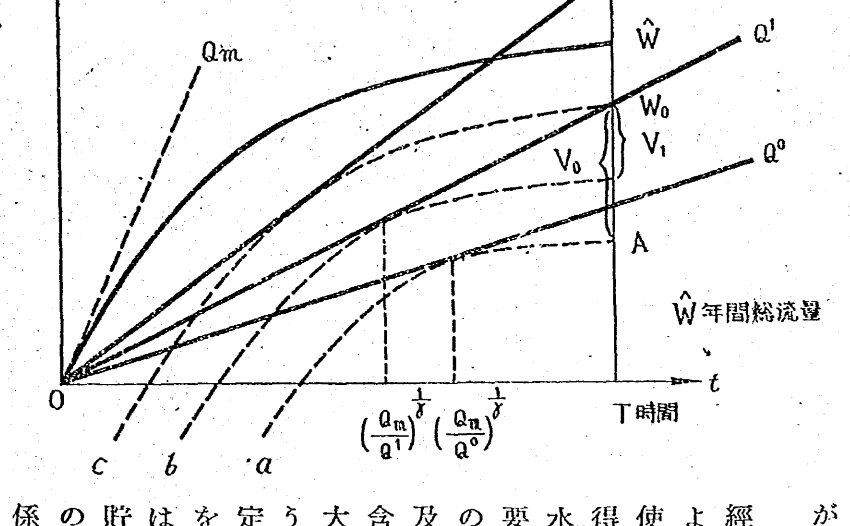
一方この部門はプラント設置の企業行動について勞働投入函數についての問題（2・3）にわずらわされることがなく、從つて生產構造把握のため最有效に工學的資料を援用しうる分野といえよう。

（3・1）　工程別生產函數及びその綜合

周知の樣に生產工程は河川の取水及び貯水、落差を得るための導水路、水壓管を流下した水により廻轉される水車と直結する發電機より成る。吾々はこれら諸工程における工學的生產函數及び投入函數を（水力學上の）設計法則によつて設定し、(註17) 全工程を綜合する生產函數を導いた。その結果は第一表（次頁）に示す如くである（各式についてはその表脚註參照）。

綜合生產函數（3·10）は貯水量、計畫取水量、導水路勾配、導水路徑、水壓管徑、總落差(取水口―放水口)、水車及び發電機效率と發電量Xとの關係を示す水力發電に關する全く一般的な工學的生產函數であり、如何なる自然的工學的條件の下に於ても普遍的に成立するものであることはいうまでもない。而してこの部門の特性として生產函數（3·10）は（1・1）節(1·1)式に於て$X\equiv E_\gamma$にエネルギー供給函數$E_\gamma=E_\gamma(\rho_i)=\eta E_s$を代入した形式となつていることがわかる。

第　2　圖



扨て吾々の經濟學的見地よりすれば、使用水量W_0を得るための取水工程が最重要である。この工程はダム及び導水路を含み建設費(註20)の大半をおおう。而して一定の使用水量を得るためには取水量Q_0と貯水ダム高H_Dの間に代替關係f (3·1)式が存する。此の稿に於ては自然的條件の一つを特定化し第一に河川の年間流量分布がunimodal、累積流量が第2圖の$O\hat{W}$で近似し得、第二に總落差がダ

第一表

工程	工學的變數及びパラメタ	經濟變數	工學的生産函數 (a)　投入函數 (b)
取水及び貯水 (1)	V；貯水容量 H_D；貯水ダム高さ Q_0；水路流量（計畫取水量）（中介變數） D；〃直徑 W_0；使用水量 a, b　河幅上下（パラメタ）	$V_c^{(1)}$ ダム用コンクリート體積 （$V_c^{(1)}$ の價格はこれと比例的に使用される鐵筋費，掘削費を含む）	(3·1) $f(V,Q_0)=W_0$ ……(a) （貯水，取水量の代替關係—3·2 節參照） (3·2) $V_c^{(1)}=(a+2b)(H_D+1.5)^2\cdot 0.18$ ……(b) (註 19) (A) $D^*=\xi_D\cdot Q_0^{\frac{3}{7}}$ （η_D を極大ならしめる D と Q_0 の關係，ここに ξ_D は X の價格及び $V_c^{(1)}$ の價格に依存するパラメタ）
導水路 (2)	X_1；導水量×有效落差 η_D；水路效率 $\hat{H}$；總落差 l；水路長	$V_c^{(2)}$ 水路用コンクリート體積 （$V_c^{(2)}$ の價格はこれと比例的に使用される鐵筋費掘削費を含む）	(3·3)(註 18) $\eta_D=\left(1-\frac{\alpha_1 Q_0^2}{D^5}\cdot\frac{l}{\hat{H}}\right)$, $X_1=\eta_D\cdot\hat{H}\cdot f(V,Q_0)$ (α_1 const) ……(a) (3·4) $V_c^{(2)}=\xi_D\cdot D^2$ (ξ_D; const) ……(b)
水壓管 (3)	X_2；水壓管導水量×有效落差 η_P；〃 效率 d；〃 直徑 θ；〃 勾配	W_P；水壓管重量	(註 20) (3·5) $X_2=\eta_P\cdot X_1$ (註 18) $\eta_P=\left(1-\frac{\alpha_2 Q_0^2}{d^5}\mathrm{cosec}\,\theta\right)$ (α_2; const) ……(a) (3·6)(註 19) $W_P=\xi_P\cdot d^2\bar{H}^2$, $d\propto Q^{\frac{3}{7}}$ ……(b) ξ_P; const. （$\bar{H}$；平均有效落差）
水車，發電機 (4)	η_T；水車效率 η_g；發電機效率	X；發電量 W_T；水車重量 W_g；發電機重量	(3·7) $X=\eta_g\eta_T X_2$ ……(a) (註19) (3·8) $W_T=\xi_T\cdot X_2^{\alpha_T}$ ……(b) (3·9) $W_g=\xi_g\cdot X_2^{\alpha_g}$ ……(b) ($\xi_T\xi_g$, α_T, α_g；パラメタ)
全工程綜合生産函數 (5)	(3·10) $X=\eta_g\eta_T\left(1-\frac{\alpha_1 Q_0^2}{D^5}\cdot\frac{l}{\hat{H}}\right)\left(1-\frac{\alpha_2 Q_0^2}{d^5}\mathrm{cosec}\theta\right)\cdot f(V,Q_0)\hat{H}$ ……(a)		

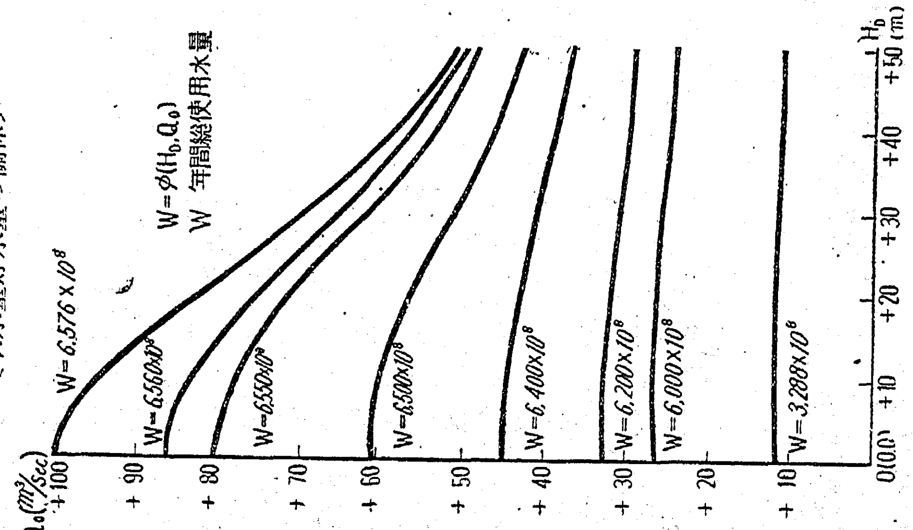
ム高に對して十分大なる場合のみを扱う。第2圖の累積總流量 $\widehat{W}$ のうち流量W_0を利用する場合，計畫取水量をQ_0とすれば$\widehat{OW}$に平行なαAとOQ_0との切點より原點側では取水流量は容量Q_0を超え反對側では容量以下である。從ってW_0を使用するには貯水量V_0を必要とする。同樣に計畫量をQ_1とすればV_1が對應する。この關係を定式化すれば(註21)

$$(3\cdot1\cdot1)\quad W_0=V+\frac{Q_m}{1-\gamma}T^{1-\gamma}+\frac{\gamma}{\gamma-1}Q_m^{\frac{1}{\gamma}}Q_0^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

$$\left(W_t=\frac{Q_m}{1-\gamma}t^{1-\gamma}-\gamma\right);\ \gamma<1$$

Q_m；年間最大流量（m^3/日），Q_0 計畫取水量（m^3/日），W_0；年間使用水量（m^3），T=365日

第 3 圖
水力發電工程の工學的生産函數
〔取水量貯水量の關係〕



貯水量は水路斷面を梯形で近似して，（記號は第一表參照）

$$(3\cdot1\cdot2)\quad V=C\cdot\frac{a+b}{2}H_D^2\cot\theta\ \ (\theta；河川勾配，C；修正係數)$$

これを(3·1·1)に代入して自律的生産函數を得る。

$$(3\cdot1\cdot1')\quad W_0=f=C\frac{a+b}{2}H_D^2\cot\theta+\frac{Q_m}{1-\gamma}T^{1-\gamma}+\frac{\gamma}{\gamma-1}Q_m^{\frac{1}{\gamma}}Q_0^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

第3圖はこれより畫かれるH_DとQ_0の關係を示す。更に投入函數を介して吾々の求めようとする物量的生産函數（等量線）第4圖（次頁）を書きうる。

（3・2）補論――取水導水工程綜合と工學的變數の最適値――

（3・1）でfが知られたから工程(1)―(2)を綜合する工學的生産函數（第一表）(3·3)式の具體的形が明かとなった。吾々は第3圖又は第4圖の無差別曲線に價格線を切せしめることにより最適値$H_D^*D^*$を求めうる。費用

$$(3\cdot2\cdot4)\quad K=\pi_{vc}^{(1)}V_c^{(1)}+\pi_{vc}^{(2)}V_c^{(2)}$$

（$\pi_{vc}^{(1)}$ $\pi_{vc}^{(2)}$は夫々$V_c^{(1)}V_c^{(2)}$(註22)の價格第一表工程(1)(2)第2欄參照。）

に投入函數第一表(3·2)(3·4)を代入して，

$$(3\cdot2\cdot4')\quad K=\pi_{vc}^{(1)}(\alpha+2\delta)(H_D+1.5)^2+\pi_{vc}^{(2)}\xi_D\cdot D^2=\pi_{vc}^{(1)}(\alpha+2\delta)(H_D+1.5)^2+\pi_{vc}^{(2)}\xi'_D Q^{\delta}$$

第二の式は計算の便宜上第一表工程(1)(A)式を用い[註23]DをQ_0に書き變えてある。（3・1）に限定した所によつてfはそのままXに比例すると見なしうる。從つて（3·1·1'）の制約の下に[註24]（3·2·4'）を極小ならしめればよい。その結果は、$H_D^*=0$を與える。即ち（3・1）に制限づけた自然的條件の下では貯水ダムの構築に代うるに取水ダムを以てすべきことが示される。從つてQ_0の最適値は（3·1·1'）にH_D^*を代入して

$$(3\cdot2\cdot5)\quad Q_0^*=\left[\frac{1}{\gamma}Q_m^{1-\frac{1}{\gamma}}T^{1-\gamma}+\frac{\gamma-1}{\gamma}Q_m^{-\frac{1}{\gamma}}X\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

これを（3·2·4'）に代入して工程(1)—(2)の費用函數

$$(3\cdot2\cdot6)\quad K=\pi_{vc}^{(2)}\xi'_D\left[\frac{1}{\gamma}Q_m^{1-\frac{1}{\gamma}}T^{1-\gamma}+\frac{\gamma-1}{\gamma}Q_m^{-\frac{1}{\gamma}}X\right]^{\frac{\delta\gamma}{\gamma(\gamma-1)}}$$

を得る。限界費用は遞增することが知られる。$\left(\frac{d^2K}{dX^2}>0\right)$

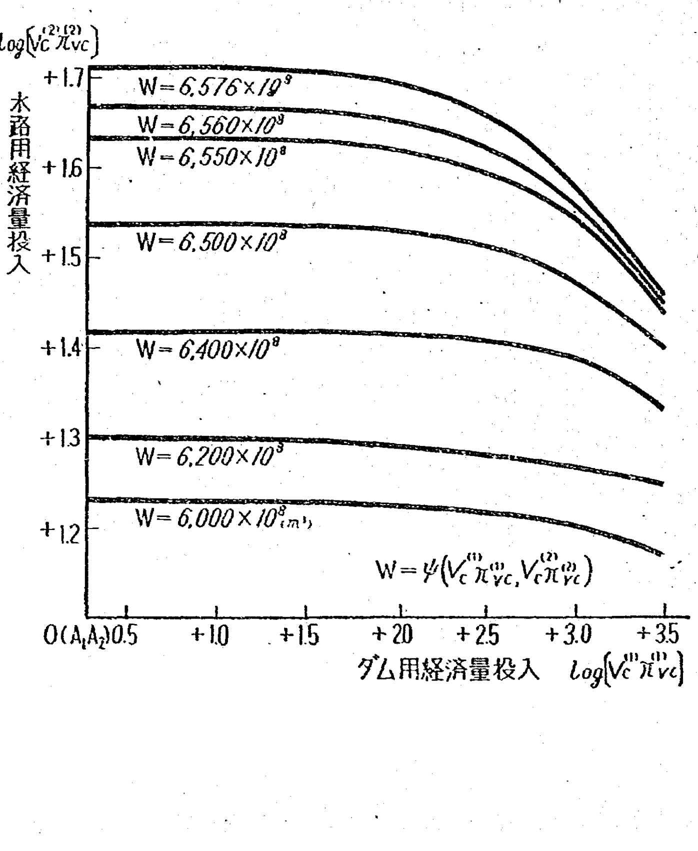
工程(3)—(4)を併せて考慮すれば[註25]

$$(3\cdot2\cdot7)\quad K'=\pi_{vc}^{(2)}\xi'_D\left[\frac{1}{\gamma}Q_m^{1-\frac{1}{\gamma}}T^{1-\gamma}+\frac{\gamma-1}{\gamma}Q_m^{-\frac{1}{\gamma}}X\right]^{\frac{\delta\gamma}{\gamma(\gamma-1)}}+\pi_w\xi_p X^{\frac{\delta}{\gamma}}+\pi_g\xi_g X^{\alpha_g}+\pi_T\xi_T X^{\alpha_T}$$

（π_w, π_g, π_T 水壓管，發電機，水車，單位當り價格）

として發電規模と建設費の關係をうる。これより（電力價格）×（發電量）−K'を極大ならしめる規模X*、また、この規模に對する自然的要因γQ_mの影響を知りうる。又逆に一定の發電量に對して費用を極小ならしめる如き自然的條件を知ることが出來る。[註26]

第　4　圖
水力發電〔工程(1)—(2)〕の經濟學的生産函數
〔ダム用投入經濟量—水路用投入經濟量の關係〕



最後にここに導かれた生産函數の性格について附け加えておきたい。一般に經濟學的諸關係式が定式化されたときそれは巨視的關係か微視的關係か、アグリゲイションはどうかについていつも問題と

される。この項の生産函數は（3・1）に述べた制限の範圍でQ_m及びγ等によつて表わされる凡ゆる自然的並に工學的條件、凡ゆる生産規模に關してこれらパラメタの値が特定される毎に妥當する普遍的關係である。良好な水力地點の稀少化はQ_m, γに、技術的變化は第一表の技術的諸パラメタに夫々陽表的に反映され、これが第3圖第4圖に如何に影響するかを豫知しうる。從つて各河川について適用された右の關係の與える結果の總和が總計量に他ならない。而して發電規模の分布を決定するものは各發電企業に對する需要の分布である。[註27]

結　語

生産構造分析の基礎となる生産函數は他の諸分野の關係に比して與件の影響を比較的容易に反映せしめられるものであるかも知れない。工學的資料の援用結果はこのことを裏書する如くである。而して吾々は經濟學と工學乃至生産技術の分野との緊密な接觸と更に高度の計算能力を俟つてこそこの線の延長上に有用な成果が期待出來るであろう。いうまでもなく殘された問題は少いとはいい難い。工學的資料の援用のみに依て生産函數が最自律的に導かれるための條件は（2・1）（2・3）に述べた通りである。水力發電はその代表的一例であるが、筆者はなおエネルギー供給函數に於ける工學的變數の變化が投入勞働量に顯著に影響する様な部門に於ては工程別經濟學的生産函數を計測する必要を認めるものである。而してこれは發電部門におけるより一般的な處理〔（3・1）の制限の除去〕と共に筆者にとつては次稿に課された問題である。（一九五六・三）

（註1）　自律的構造式系と「政策」「實驗」の關係は、
Ed. by Koopmans "Statistical inference in dynamic Economic Models" 1950.
Ed. by Hood & Koopmans "Studies in the Econometric Method" 1953.
特に兩書 Marschack に依る項に論ぜられている。

（註2）　H. Mendershausen; On the Significance of prof. Douglas' Production Function, Econometrica Ap. 1938.

（註3）　Marschack "Random Simultaneous Equations and the Theory of Production." Econometrica 1944, No 3—5.
この線に沿う最新の展開は本誌尾崎氏の稿に於て精細に論ぜられるであろう。又利用度蓄積の動學的 path に於ける構造式系計測法については拙稿「蓄積利用度及生産函數の計測」日本統計學會年報昭和28年に論ぜられている。

（註4）　「勞働生産性調査—硫安工業」勞働省、昭三〇。

（註5）　Leontief & Others "Studies in the Structure of the American Economy", 1953. Part V. Duesenberry "The Role of demand in the economic structure.

（註6）　辻村江太郎氏「習慣形成」經濟研究5卷4號。

（註7）　H.B. Chenery "Engineering production functions" Q.J.E. 1952.
〃　Over capacity and the Acceleration principle Econometrica Jan. 1952.
〃　Process and Production Functions from En-

gineering Data, Studies in the Structure the American Economy Part Ⅳ.

（註8）　特に勞働の質、プラントのレイアウト管理能力の問題等が考慮される。前者については「賃金基本調査」（東洋經濟新報）拙稿第十章辻村氏第十一章參照。

（註9）　Dorfman "Application of Linear programing to the theory of the Firm." 1951.

（註10）　Shepherd "Cost and production functions" (1951).

（註11）　處理要素は次の如く分類出來る。

①（エネルギーを供給するもの）
- a 動物
- b 燃料
- c 水力
- d 藥品

②（エネルギーの形を變えるもの）
- a 爐（燃料を熱に）
- b ボイラー，リアクター（熱傳導）
- c 電動機（熱又は電氣エネルギーを運動に）
- d 發電機（回轉を電氣エネルギーに）
- e 機　械（回轉を特定の運動に）
- f 主動機等

③（制御するもの）
- a 人間
- b 機械

（註12）　（1・2）に關しては Chenery ibid. を參照されたい。工學的變數は夫々原料施設等に關して

〔原　料〕
- (a) 固體（純度，硬度，濃度，重さ）
- (b) 流體（體積，比重，粘度）

〔施　設〕
- (a) 機械（型，重さ，馬力，速さ）
- (b) 構築物（型，厚さ，抗力，熱抵抗）

〔エネルギー源〕
- (a) 燃料（熱容量，燃燒，溫度）
- (b) 電力（電壓，サイクル數）

〔勞　働〕
熟練度

（註13）　既存施設へ加える新投資行動は次の樣になる。即ち（2・4）節 $(2{\cdot}4{\cdot}1'')$ 式及び $(2{\cdot}4{\cdot}1')$ 式の和を $\overline{X}$（一定）とおきこの制約の下に、$\rho^{(2)}$（同項參照）は既設として定められているから、（2・1）に於ける費用極小の手續きにより $\rho^{(1)}$ の最適値 $\rho_c^{(1)}\ \rho_v^{(1)}$ を定めうる。

（註14）　投入函數　$y_j=\sum_{i=1}^{I}\alpha_{ji}\rho_i$　より　$\dfrac{\partial c}{\partial\rho_i}=\sum_{j=1}^{J}\alpha_{ji}p_j{}^y$　故に極小條件は　$\rho_i\sum_{j=1}^{J}p_i{}^y\alpha_{ji}-\rho_1\sum_{j=1}^{J}p_j{}^y-\alpha_{j1}=0$　この關係と工學的生產函數から ρ_i^* が求められ　$\overline{X}=\phi(\rho_1)$ or $\rho_1=\phi^{-1}(\overline{X})$　一方投入函數はこの關係を用いて、

$$\rho_1=\beta_1y_1=\cdots\beta_Jy_J\,(\beta;\ \mathrm{const})\quad よって\quad \phi^{-1}(X)=\beta_jy_j\,(j=1,\cdots J)$$

よって $\dot{\Psi}$ はダグラス型で表わしうる。

（註15）　Shepherd. ibid.

（註16）　「勞働生產性調査―綿紡績業―」勞働省昭三〇參照。

（註17）　この項に引用された資料の所在等については中央電力研究所生產函數小委員會の方々より有益な information を戴いたことを記して謝意を表させて戴く。

（註18）　水力學における摩擦損失の關係から導かれるものを效率の形になおした。一般の水力學に關するテキスト例えば、物部「水力學」、奧村「水力學及水力機械」參照。

（註19）　電力經濟研究所水火力併用經濟研究小委員會水力部會報告書「水力發電所建設工事費の計算法」所載の關係。

（註20）　前掲「工事費の計算法」參照。

（註21）　一般のテキストに依れば工學的設計の慣習はすべて取水量の決定後における最適設計を扱う。發電工學のテキストは取水量の設計自體を扱わないようである。併し乍ら吾々の立場よりすれば取水工程の代替關係こそ重要である。第2圖點線 $a\ b\ c$ は

$W_t=\dfrac{Q_m}{1-\gamma}(t^{1-\gamma}-\gamma)-b$　（b；截片）を表わしており、これは

$(Q_m/Q_i)^{\frac{1}{\gamma}}\,(i=0,1,2)$　に於て夫々 $Q_0\,Q_1\,Q_2$ に切するから、

$b=Q_i^{1-\frac{1}{\gamma}}Q_m^{\frac{1}{\gamma}}\dfrac{1}{1-\gamma}$　となる。いまA點について見ればこの縱座標は　$W_T=\dfrac{Q_m}{1-\gamma}(T^{1-\gamma}-\gamma)+\dfrac{\gamma}{\gamma-1}Q_0^{1-\frac{1}{\gamma}}Q_m^{\frac{1}{\gamma}}$　となり從って年間使用水量として（3・1・1）式を得る。

（註22）　ダム掘削量 $\propto(a+2b)(H_D+1.5)^2$

$$導水路掘削量\propto D^2(\varepsilon+1)\qquad \varepsilon=\frac{厚さ}{水路徑}$$

$$〃\quad コンクリート量\propto\frac{3.36}{4}D^2\cdot\varepsilon$$

詳細は前掲水力發電所建設費計算法參照。

（註23）　取水量に對する水路徑は導水效率を最大ならしめる如く決められる。なお事情を明確にするため水力學に基く慣行の設計技術上の問題について補足すべきであると考えるが紙數の制約上これを割愛せざるを得ない。

（註24）　この場合ラグランジュ未定常數法は使えない。簡略化して書けば生產函數は　$X=aH_D{}^2-bQ_0{}^{-2}+\delta$　費用式は　$K=cH_D{}^2+d\cdot Q_0{}^{-\frac{6}{7}}=H_D{}^2+d\cdot\left(\dfrac{b}{aH_D{}^2-X+\delta}\right)^{\frac{3}{7}}$,　$\dfrac{dK}{dH_D}=0$　より　$H_D=0$　このときに限り $\dfrac{d^2K}{d^2H_D}>0$

（註25）　$W_T\propto X$　なる關係は建設計畫上實用されている。但し嚴密には落差の變化は水車の特有速度を變えて重量に影響するというべきであろう。併し乍らこゝで扱う場合は有效落差が近似的に一定である故右の關係は妥當である。發電機の設計はそれ自體完結せる體系の下で行われる故投入函數は重量と發電量に關するものと見てよい。（1・1）の工程の定義より主要な工學的變數は H_D と D である。

（註26）　この計算は一般的には解き難い。實際には數値算することになるから高度の計算能力が要請される。又最適規模の決定に當っては $(3{\cdot}4)$ $(3{\cdot}6)$ 式の ξ_D 及び ξ_P が電力價格を含むことに注意せねばならぬ。

（註27）　此處には火力發電の併用の問題が介入する。