Title	線形計画論・ 双対性定理
Sub Title	Linear programming : the duality theorem
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1956
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.49, No.3 (1956. 3) ,p.169(1)- 178(10)
JaLC DOI	10.14991/001.19560301-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19560301-0001

書評及び紹介

加藤由作著『海上保險講義』……………………庭田範秋（四六）
ロバートソンをめぐる「效用」論爭……………………加藤寛（四九）
通商產業省編『わが國の產業連關表について』……………………鈴木諒一（五四）
ホーヴェルモー著 山田勇譯編『計量經濟學の確立的接近法』……………………鈴木諒一（五八）
C・W・フェルプス『アメリカの月賦購入金融』……………………片岡一郎（六一）
―― 販賣金融會社の機能 ――

線形計畫論・双對性定理

福岡正夫

一、双對性
二、双對性定理
三、計畫問題と鞍點問題
四、計畫問題における比較靜學分析

一、双對性

線形計畫の極大問題には、必ずそれに應ずる極小問題が存在し、また極小問題には、それに應ずる極大問題が存在する。その意味で線形計畫の問題は、つねに双生兒のような一對の問題から成立つわけであつて、その關係を專門の用語では双對性 (duality) といい、一方の問題は他方の問題に對して双對的 (dual) であるという。以下、ヨリ具體的に說明しよう。

まず極大問題を前稿の記號で、

(1) $Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$

を

(2)
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqq b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqq b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leqq b_m$$

および

(3) $x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ x_n\geqq 0$

に服しつつ極大ならしめる問題として表せば、それに双對的な極小問題は、

(4) $\bar{Z}=b_1y_1+b_2y_2+\cdots\cdots+b_my_m$

を

(5)
$$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots\cdots+a_{m1}y_m\geqq c_1$$
$$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots\cdots+a_{m2}y_m\geqq c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots\cdots+a_{mn}y_m\geqq c_n$$

および

(6)　$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ \cdots\cdots,\ y_m \geqq 0$

に服しつつ極小ならしめる問題として表せる。ここで y_1、y_2、……、y_m は新に登場した双對問題の變數である。さてこれら二つの問題を眺めて分ることは、その何れもが同一の係數 a_{ij}、b_i、c_j で構成されていることである。が、留意すべきは、それらの係數がそれぞれの問題に入り込むその入り込み方である。一方の問題の係數はすべて轉置された形で他方の問題に含まれている。すなわち、極大問題に含まれる a_{ij} は極小問題では a_{ji} となつて縱横（行と列）の關係が入れちがつているし、また同じく極大問題に縱に並んで含まれる b_i は極小問題では横に並んで含まれ、それに應じて極大問題に横に並んで含まれる c_j は極小問題では縱に並んで含まれる。要するに、すべてが縱横の關係を交替しているのである（更に(2)と(5)では不等號の向きがさかさまになつていることにも重ねて注意すべきであろう）。

二、双對性定理

さて、このような双對性に關しては、線形計畫にとつて極めて基本的な一、二の定理が確立している。以下本節ではそれらの證明を主題とするが、それに先立ち、記號の繁雜化を避けるために、われわれの問題を行列記號で略記しておくと、

極大問題は

(1)　$Z=c'x$

を

(2)　$Ax \leqq b$

(3)　$x \geqq 0$

の下で極大ならしめることであり、

極小問題は

(4)　$\bar{Z}=b'y$

を

(5)　$A'y \geqq c$

(6)　$y \geqq 0$

の下で極小ならしめることである。

それらの基本定理とは、次のようなものから成つている。[註1] まず

定理一（双對性定理）　(イ)もし極大問題に解が存在し、かつそれがZに有界の極大値を與えるものならば、それに双對的な極小問題にもまた解が存在し、かつそれは $\bar{Z}$ に有界の極小値を與える（同様に、後段の敍述が成立すれば、前段の敍述もまた成立する）。(ロ)(イ)が成立つときには

$$\mathrm{Max}\,Z=\mathrm{Min}\,\bar{Z}$$

である。

すなわち、要するに、有界の極大値（極小値）がある問題においては、極大（極小）問題が解ければそれに双對的な極小（極大）問題も必ず解けるのであつて、そのときのZの極大値は必ず $\bar{Z}$ の極小値に等しいのである。この基本定理の證明は、Simplex Method の成果を利用して、次のように行われる。

證明　極大問題から出發する。いま前稿で説明した[註2] slack variables $\bar{x}$ を導入すれば、不等式

(2)　$Ax \leqq b$

は

(2)′　$(A\ I)\begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix}=b$

という等式となり、それに伴つて

(1)　$c'x=Z$

は

(1)′　$(c\ 0)\begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix}=Z$

と書改められる。われわれは前稿第三節において Simplex procedure に含まれる諸關係を

(7)　$\begin{bmatrix} b & \bar{A} \\ 0 & -\bar{c}' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -c^{*\prime} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^* & \bar{Y} \\ Z & \bar{\gamma}' \end{bmatrix}$

という行列表示で表したが、[註3] そこに含まれる $\bar{A}$、$\bar{c}$ がそれぞれ

$\bar{A}=(A\ I)$

$\bar{c}'=(c'\ 0)$

に他ならない。そこでそれらの區分けに應じて $\bar{Y}$、$\bar{\gamma}$ をも適當に區分けすると、(7)はまた

(8)　$\begin{bmatrix} b & A & I \\ 0 & -c' & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -c^{*\prime} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^* & Y & \hat{Y} \\ Z & \gamma' & \hat{\gamma}' \end{bmatrix}$

とも書かれる。(8)から　$A^*\hat{Y}=I,\ c^*\hat{Y}=\hat{\gamma}$　であるから、

(9)　$\hat{Y}=A^{*-1}$

(10)　$\hat{\gamma}'=c^{*\prime}A^{*-1}$

であることが容易に知られる。さて、この形で Simplex procedure が進行し、Zに有界の極大値を與える x の極大解が到達されたものと考えよう。そのときの x を x^0 と記し、また　$\hat{\gamma}=c^*A^{*-1}$ を y^0 と記すならば、(8)は更に

(11)　$\begin{bmatrix} b & A & I \\ 0 & -c' & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -c^{*\prime} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^0 & Y & A^{*-1} \\ Z & \gamma' & y^{0\prime} \end{bmatrix}$

と書かれ、前稿で説明した Simplex criterion に從つて、いまや $\bar{\gamma}'=(\gamma',\ y^{0\prime})$　のすべての因子は非負であるから、この y^0 が

(6)　$y^0 \geqq 0$

という制約を滿足することは明かである。次に(11)から

(12)　$A=A^*Y$

(13)　$c'=c^{*\prime}Y-\gamma'$

であることによつて

(14)　$c' = c^{*\prime}A^{*-1}A - \gamma' = y^{0\prime}A - \gamma'$

しかるに　$\gamma \geqq 0$　なのであるから

(15)　$c' \leqq y^{0\prime}A$

すなわち y^0 は

(5)　$A'y^0 \geqq c$

という制約をも滿足する。かくして、極大問題が解けるならば、極小問題の制約條件を悉く滿足する y^0 の存在することが明かとなつた。

われわれが次に證明しなければならないのは、その y^0 が $\bar{Z}$ を極小ならしめるということである。まず

(16)　$b'y^0 = y^{0\prime}b = c^{*\prime}A^{*-1}b$

であるから、$x^0 = A^{*}b$　を考慮することによつて

(17)　$b'y^0 = c^{*\prime}x^0 = c'x^0$

他方(2)(3)(5)(6)を滿足する任意の x、y について、(2)から　$y'Ax \leqq y'b$、(5)から　$y'Ax \geqq c'x$、故に

(18)　$b'y \geqq y'Ax \geqq c'x$

この不等式はすべての x、y の可能解について成立つのであるから、

(19)　$b'y \geqq c'x^0$

もまた成立しなければならない。故に(17)から

(20)　$b'y \geqq b'y^0$

依つて y^0 は　$\bar{Z} = b'y$　を極小ならしめる。かつ $b'y^0$ の有界であることも明かである。以上で定理の(イ)の證明を終る（y^0 の存在から出發して x^0 の存在を證明することも全く平行的に行われる）。

次に假定によつて　$c'x^0$ は Max Z　であり、かつ上述のところから　$b'y^0$ は Min $\bar{Z}$　であることが證明されたのであるから、定理の(ロ)は(17)によつて自明である。依つて双對性定理の證明は完了する。

次に定理一に附隨して

定理二　もし極大（極小）問題が解をもつが有界の極大値（極小値）をもたないならば、それに應ずる極小（極大）問題は解をもち得ない。

證明　極大問題が有界の極大値をもたないにもかかわらず、定理の主張に反して、極小問題が解をもち得たとしよう。そのときには

(18)　$b'y \geqq c'x$

から、$b'y$ は $c'x$ の上界でなければならない。しかるに假定によつて $c'x$ は上界をもたないのであるから、明かにこれは矛盾である。依つて極小問題は解をもち得ない（極大、極小問題の入れ替えを行つても趣旨は全く同樣である）。

最後に、經濟的な觀點から興味深いと思われるいま一つの定理を掲げておこう。

定理三　極大（極小）問題の k 番目の制約式がその極大解（極小解）において不等號で成立するときには、それに應ずる極小（極大）問題の k 番目の變數はその極小解（極大解）において必ずゼロである。また反對に、もしそのとき後者の問題の k 番目の變數が正であるならば、前者の問題の k 番目の制約式は必ず等號で成立する。

證明

(2)′　$Ax + I\bar{x} = b$

から

(21)　$y'Ax + y'\bar{x} = y'b$

しかるに、極大解 x^0、極小解 y^0 については、(17)(18)によつて

(22)　$c'x^0 = y^{0\prime}Ax^0 = y^{0\prime}b$

であるから、(21)から

(23)　$y^{0\prime}\bar{x}^0 = \sum_{i=1}^{m} y^0_i x^0_{n+i} = 0$

しかも y^0_i および x^0_{n+i} はすべて非負であるから、

(24)　$x^0_{n+i} > 0$　ならば必ず　$y^0_i = 0$

また

(25)　$y^0_i > 0$　ならば必ず　$x^0_{n+i} = 0$

でなければならない。

（同樣に(5)の slack variables を y_{m+j}（$j = 1、2、\ldots\ldots、n$）とすれば、

(26)　$y^0_{m+j} > 0$　ならば必ず　$x^0_j = 0$

また

(27)　$x^0_j > 0$　ならば必ず　$y^0_{m+j} = 0$

であることが知られる」。

以上の基本定理の意味するところは、これを經濟的事例に卽して解釋すれば、更に一段と明白になるであろう。そのために、いま x_j を第 j 番目の最終生產物の數量、c_j をその價格、y_i を第 i 番目の基本生產要素の價格、b_i をその要素の利用可能量、そして最後に a_{ij} をいわゆる生產係數つまり第 j 生產物一單位當りの生產に要する第 i 生產要素の數量と考えよう。そのときには、$c'x$ は最終生產物の總價値額（純國民生產物）であり、また Ax の各因子はそれらの生產物をつくり出すための各生產要素の總必要量であるから、われわれの極大問題は利用し得る基本資源の制約の下で純國民生產物を能うかぎり大ならしめる問題として解釋される。（序ながら、このような事例の設定の下では、それを解く Simplex procedure そのものも經濟的な解釋を容れる。例えばその計算に含まれる $c^{*\prime}Y$ の各因子は各生產物の機會費用を表すものと考えられ[註4]、從つて　$-\gamma' = c' - c^{*\prime}Y$　の各因子は各生產物の價格と機會費用の差を表す大きさである。依つてプラスの　$-\gamma_j$ を求め、その中 Max$(-\gamma_j)$ であるようなヴェクトルを新規に導入してゆく Simplex procedure は、他にあれば失われる機會費用よりも大きな價値を附加する生產物が

ば、つねにその超過價値の最大な生産物を選んで生産するという一種の模索を表している。そのような生産物を、いままで生産されていた生産物の一つがゼロとなるところまで、入れ違いに増産してゆく模索の過程がこの場合の Simplex procedure のもつ經濟的意味である」。

他方、極大問題に双對的な極小問題は、國民生産物をつくり出す總費用極小化の問題として登場する。そこにおける $A'y$ の各因子は各生産物一單位當りの平均費用を意味するから、$A'y \geqq c$ はどの生産物の生産においても、利潤 $c-A'y$ は正であってはならないということである。故に、定理一（双對性定理）(ｲ)の部分の意味するところは、國民生産物が極大となるときは、必ずその國民生産物の總費用を極小ならしめる非負の生産要素價格が存在し、しかもそれらの要素價格は各生産物について丁度利潤をゼロまたは負たらしめるに充分な高さであるということである。(ﾛ)の部分は、更にこの極小總費用が極大總生産物價値に一致すること、從って右の生産要素價格を支拂うことによって國民生産物が過不足なく各生産要素に歸屬することを示しているのである。

最後の定理から、われわれはまた次のことをも知る。すなわち、最適點においては、過剰生産要素の價格は必ずゼロであり、また正の價格をもつ生産要素は必ず完全に利用される。と同時に、負の利潤をもつ生産物は決して生産されず、現に生産されている生産物の利潤は必ずゼロである。

（註1）　以下の敍述については、次の諸文献を參照した。A. Charnes, W. W. Cooper and A. Henderson, *An Introduction to Linear Programming*, 1953, Part II, pp. 72-74, G. B. Dantzig and A. Orden, "A Duality Theorem Based on the Simplex Method", in *Symposium on Linear Inequalities and Programming*, 1951. *ditto*, "Duality Theorems" in *Notes on Linear Programming*, *The* RAND *Corporation*, 1953.

（註2）　前稿「線形計畫論・Simplex Method」（三田學會雜誌第四十九卷第一號）五頁參照。

（註3）　同上、一四頁參照。

（註4）　前稿（三田學會雜誌第四十九卷第一號七頁の⒅は第 j 生産物を一單位新に生産するために他の生産物の生産から奪われてこなければならない生産要素の數量を示すものと解釋され、從って $y_{(1)j}$, $y_{(2)j}$, ……, $y_{(m)j}$ はそのために現に生産されている生産物の減らされなければならない數量である。故に同頁⒆の $c_{(1)}y_{(1)j}+c_{(2)}y_{(2)j}+\cdots\cdots+c_{(m)}y_{(m)j}$ は第 j 生産物一單位の生産のために他の部門において失われなければならない價値、すなわちその機會費用に他ならないことが知られる。

三、計畫問題と鞍點問題

われわれは双對性の定理から、極大計畫問題とそれに應ずる極小計畫問題とが同時に解をもち、かつそれらの解 x^0、y^0 がそれぞれ同一の Z の値を與えることを知った。このような知識はわれわれに、x^0、y^0 が何らかの函數の鞍點 (saddle point) であることを豫想させる。ここで鞍點とは、詳しくは續稿で遊戯論を論ずる際に説明する豫定だが、要するにある函數 $\phi(x, y)$ を x については極大ならしめ y については極小ならしめるような、すなわち

$$⑱\quad \phi(x, y^0) \leqq \phi(x^0, y^0) \leqq \phi(x^0, y)$$

を成立たしめるような點 (x^0, y^0) のことである。ところで、この豫想は今日においては確乎たる定理として既に確立されている。そこで本節ではこの點に少しく立入って、計畫問題と鞍點問題との關連を考察してみたいと思う。[註1]

定理四（等値定理）　線形計畫の極大問題すなわち $c'x$ を $Ax \leqq b$, $x \geqq 0$ の下で極大ならしめる問題の極大解 x^0 は、ラグランジュの函數

$$㉙\quad \phi(x, y)=c'x+y'(b-Ax)$$

の非負の鞍點 (x^0, y^0) の x^0 と等値である。また線形計畫の極小問題すなわち $b'y$ を $y'A \geqq c'$, $y \geqq 0$ の下で極小ならしめる問題の極小解 y^0 は、同じく $\phi(x, y)$ の非負の鞍點 (x^0, y^0) の y^0 と等値である。

證明　われわれはまず $x^0 \geqq 0$, $y^0 \geqq 0$ について

$$㉚\quad \phi_x{}^0=c-A'y^0 \leqq 0,\ \phi_x{}^{0\prime}x^0=(c'-y^{0\prime}A)x^0=0$$

$$㉛\quad \phi_y{}^0=b-Ax^0 \geqq 0,\ \phi_y{}^{0\prime}y^0=(b'-x_0{}'A')y^0=0$$

の成立つことが、(x^0, y^0) の鞍點であるための必要かつ充分條件であることを明かにしよう。いま㉚㉛が成立していれば、

$$㉜\quad \phi(x, y^0)=c'x+y^{0\prime}(b-Ax)$$

$$\begin{aligned}
&=c'x^0+y^{0\prime}(b-Ax^0)+(c'-y^{0\prime}A)x-(c'-y^{0\prime}A)x^0\\
&\leqq c'x^0+y^{0\prime}(b-Ax^0)\\
&=\phi(x^0, y^0)\\
&=c'x^0+y'(b-Ax^0)-y'(b-Ax^0)+y^{0\prime}(b-Ax^0)\\
&\leqq c'x^0+y'(b-Ax^0)\\
&=\phi(x^0, y)
\end{aligned}$$

であるから、㉚㉛が充分條件であることは明かである。また (x^0, y^0) が非負の鞍點であれば、$\phi(x, y^0) \leqq \phi(x^0, y^0)$ から、x^0 のゼロの成分については $\phi_x{}^0 \leqq 0$ が成立ち、プラスの成分については $\phi_x{}^0=0$ が成立たなければならない。同様に $\phi(x^0, y^0) \leqq \phi(x^0, y)$ から、y^0 のゼロの成分については $\phi_y{}^0 \geqq 0$ が成立ち、プラスの成分については $\phi_y{}^0=0$ が成立たなければならない。故に、㉚㉛が必要條件であることも明かである。

かくして㉚㉛は、(x^0, y^0) が非負の鞍點であるための必要かつ充分條件である。それ故、われわれは以下において、x^0、y^0 がそれぞれ線形計畫の極大、極小問題の解であるためには、同じく㉚㉛の成立つことが必要にしてかつ充分であることを證明する。もしそれが證明されれば、計畫問題と鞍點問題の等値が證明されるわけである。

そこでまず、x^0 が極大問題の解であるために㉚㉛が必要にして充分なことを證明しよう。はじめに充分なことの證明。㉚㉛が成立していれば、いかなる $x \geqq 0$ についても

$$㉝\quad c'x+y^{0\prime}(b-Ax) \leqq c'x^0$$

であることが容易に分る。しかるに $b-Ax\geqq 0$ を滿足するいかなる x についても $y^{0\prime}(b-Ax)\geqq 0$ であるから、當然に

$$c'x\leqq c'x^0 \tag{34}$$

故に(30)(31)が成立つていれば、x^0 は $b-Ax\geqq 0,\ x\geqq 0$ の下で $c'x$ を極大ならしめる。

次に必要なことの證明。x^0 は問題の解であるから、

$$b-Ax^0\geqq 0,\ Ix^0\geqq 0 \tag{35}$$

いまこれを制約の有效なものと無效なもの、すなわち

$$b_1-A_1x^0=0,\ I_1x^0=0 \tag{36}$$

$$b_2-A_2x^0>0,\ I_2x^0>0 \tag{37}$$

の二つの部分に分ける。さて(36)については、制約が實際に到達されているのであるから、明かに

$$-A_1(x-x^0)\geqq 0,\ I_1(x-x^0)\geqq 0 \tag{38}$$

という條件が成立たなければならない。さて(38)の下で $c'x^0$ が極大であるということ、すなわち

$$-c'(x-x^0)\geqq 0 \tag{39}$$

であるということは、いわゆるミンコフスキイ＝ファルカスの補助定理(註2)によつて、ある $y_1^0\geqq 0,\ \bar{y}_1^0\geqq 0$ について

$$-A_1'y_1^0+I_1'\bar{y}_1^0=-c \tag{40}$$

が成立つことに等しい。そして、いま $y_1^0,\ \bar{y}_1^0$ の成分に、いままで觸れずにおいた(37)に含まれる制約の數だけそれぞれゼロを加えて $y^0,\ \bar{y}^0$ とすれば、(40)は書換えられて

$$-A'y^0+\bar{y}^0=-c \tag{41}$$

となる。それ故、

$$c'-y^{0\prime}A\leqq c'-y^{0\prime}A+\bar{y}^{0\prime}=0 \tag{42}$$

同時に $\bar{y}^{0\prime}x^0=\bar{y}_1^{0\prime}I_1x^0+0I_2x^0=0$ であるから

$$(c'-y^{0\prime}A)x^0=(c'-y^{0\prime}A+\bar{y}^{0\prime})x^0=0 \tag{43}$$

また假定からして、もともと

$$b-Ax^0\geqq 0 \tag{44}$$

であり、かつ

$$y^{0\prime}(b-Ax^0)=y_1^{0\prime}(b_1-A_1x^0)+0(b_2-A_2x^0)=0 \tag{45}$$

(42)(43)は(30)、(44)(45)は(31)に他ならないから、依つて(30)(31)の必要なことが分る。

それ故、(30)(31)は x^0 が極大問題の解であるための必要かつ充分な條件である。x、y の極大、極小の役割は $\phi(x,y)$ を $-\phi(x,y)$ に置換えれば入れ違いになるから、以上と全く同樣の議論によつて、(30)(31)はまた y^0 が極小問題の解であるための必充條件でもある。かくして、計畫問題と鞍點問題とは同一の必充條件を介して等値であることが判明する。

（註1）次の諸文献參照。D. Gale, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, "Linear Programming and the Theory of Games", *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951, pp. 317-325, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming", *Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1951, pp. 481-487. および M. Beckmann, "A Lagrangean Multiplier Rule in Linear Activity Analysis and Some of its Applications", *Cowles Commission Discussion Paper*, November 1952, pp. 3-6.

（註2）ミンコフスキイ＝ファルカスの補助定理というのは、ミンコフスキイによつて示唆されファルカスによつて初めて證明された次のような主張をいう。$Ax\geqq 0$ を滿足するすべての x について $c'x\geqq 0$ であることと、ある $y\geqq 0$ について $A'y=c$ であることとは等しい。Gale, Kuhn and Tucker, *op. cit.*, p. 318 の Lemma 1 を見よ。

四、計畫問題における比較靜學分析

以上の結果を利用して、線形計畫問題における比較靜學的分析を行つてみよう。いまA、b、c という與件に應ずる解を x^0、y^0 とし、これらの與件が變化して $A+\varDelta A,\ b+\varDelta b,\ c+\varDelta c$ になつたとき、解もまた $x^0+\varDelta x,\ y^0+\varDelta y$ に變化すると考える。x^0、y^0 がもとの與件の下での鞍點であることから、

$$c'x^0+y^{0\prime}(b-Ax^0)\geqq c'(x^0+\varDelta x)+y^{0\prime}[b-A(x^0+\varDelta x)] \tag{46}$$

すなわち

$$(c'-y^{0\prime}A)\varDelta x\leqq 0 \tag{47}$$

また $x^0+\varDelta x,\ y^0+\varDelta y$ が新しい與件の下での鞍點であることから、

$$\begin{aligned}(c+\varDelta c)'x^0+(y+\varDelta y)'[(b+\varDelta b)-(A+\varDelta A)x^0]\leqq\\(c+\varDelta c)'(x^0+\varDelta x)+(y+\varDelta y)'[(b+\varDelta b)-(A+\varDelta A)(x^0+\varDelta x)]\end{aligned} \tag{48}$$

すなわち

$$-\varDelta c'\varDelta x+(y^0+\varDelta y)'\varDelta A\varDelta x+\varDelta y'A\varDelta x\leqq(c'-y^{0\prime}A)\varDelta x \tag{49}$$

故に(47)と(49)から

$$-\varDelta c'\varDelta x+(y^0+\varDelta y)'\varDelta A\varDelta x+\varDelta y'A\varDelta x\leqq 0 \tag{50}$$

である。次に以上と同樣の議論を y についても行えば、

$$c'x^0+y^{0\prime}(b-Ax)\leqq c'x^0+(y^0+\varDelta y)'(b-Ax) \tag{51}$$

すなわち

$$\varDelta y'(b-Ax)\geqq 0 \tag{52}$$

また

$$\begin{aligned}(c+\varDelta c)'(x^0+\varDelta x)+y^{0\prime}[(b+\varDelta b)-(A+\varDelta A)(x^0+\varDelta x)]\geqq\\(c+\varDelta c)'(x^0+\varDelta x)+(y^0+\varDelta y)'[(b+\varDelta b)-(A+\varDelta A)(x^0+\varDelta x)]\end{aligned} \tag{53}$$

すなわち

(54)　$-\Delta y'\Delta b+\Delta y'\Delta A(x^0+\Delta x)+\Delta y'A\Delta x\geqq\Delta y'(b-Ax)$

故に(52)と(54)から

(55)　$-\Delta y'\Delta b+\Delta y'\Delta A(x^0+\Delta x)+\Delta y'A\Delta x\geqq0$

である。さて(55)から(50)を邊々相減ずることによつて、われわれは次のような不等式を得る。

(56)　$(\Delta c'-y^{0\prime}\Delta A)\Delta x-\Delta y'(\Delta b-\Delta Ax^0)\geqq0$

これが線形計畫問題における比較靜學の基本不等式である。

第二節で與えた經濟的解釋を容れれば、(56)のΔxの係數は生産物價格および生産係數の變化に伴う利潤量の變化を表しており、Δyの係數は資源存在量および生産係數の變化に伴う資源過剩量の變化を表している。この一般的表現を種々の仕方で特定化することによつて、われわれはさまざまな比較靜學的命題を得ることができる。例えばもしAのみが變化するものとすれば、われわれは

(57)　$-(y^{0\prime}\Delta A)\Delta x+\Delta y'(\Delta Ax^0)\geqq0$

を得る。すなわち、技術の進歩は生産物をヨリ増大せしめるか資源をヨリ低廉ならしめるかその何れかの效果をもたらす。次にbのみが變化するものとすれば

(58)　$\Delta y'\Delta b\leqq0$

すなわち、資源の存在量の増加はそれらの價格を下落せしめる。またcのみが變化するものとすれば

(59)　$\Delta c'\Delta x\geqq0$

すなわち、生産物の價格の騰貴はそれらの生産量を増大せしめる。これらの命題は、單に小域の變化のみならず、また大域の變化にも妥當する。

サムエルソンは(註1)かつて(58)および(59)の導出を試みたが、(56)のような一般的な關係を導いていない。計畫問題と鞍點問題との等値關係を利用したこのような一般化はベックマン(註2)を俟つて初めて行われた。

（註1）P. A. Samuelson, "Comparative Statics and the Logic of Economic Maximizing", *Review of Economic Studies*, 1946-47, Vol. XIV (I); *ditto*, "The Le Chatelier Principle in Linear Programming", *The RAND Corporation*, August 1949, pp. 1-18, esp. pp. 8-9 and p. 18.

（註2）M. Beckmann, "The Generalized (Weak) Le Chatelier Principle in Linear Activity Analysis", *Cowles Commission Discussion Paper*, December 1953.

經濟計畫と價値法則の利用

加藤　寛

一

よく知られているように自由競爭の經濟を理論的に支える論理として、價格のパラメーター機能がある。すなわち、各個人は所與の價格にもとづいて財を需要し、また他の個人はその同じ價格を所與として財を供給する。その集計が總需要と總供給を形成し、前者が後者を超過するとき、價格は騰貴する。逆の時は反對に價格が下落する。この騰貴または下落した新價格は個人の行動に反映し、總需要と總供給を變化させる。そして再び何れかが超過するときに、また價格が變化し、これをくり返すことによつて需給のバランスが實現される。これは自由競爭經濟のメカニズムであるが、社會主義經濟でも、もし資源の合理的配分を行なおうとするなら、このような價格のパラメーター機能を考えなければならないというのが、自由制社會主義者（バローネ、ランゲ等）の共通した結論であつた。

マルクス理論では、この經濟計算の問題は餘り問題とならず、社會主義社會では計畫が市場にとつて代ることによつて、貨幣や價格

が廢止されるであろうと、漠然と考えていたにすぎない。そのため革命直後の「戰時共産主義」段階では、經濟計算の體系が崩壞し、これが、内戰と外國軍隊の干渉のためやむを得なかつた事情ありとしても、食糧徵發・收奪など、破壞をより一層强める原因となつたのであつた。一九二一年に始まるネップは資本主義への逆行だという非難を受けたが、ともかく經濟計算の秩序を恢復する目的をもつものであつた。こうしてソ連邦の社會主義計畫經濟の運營には著しく資本主義的要素――企業の市場經濟的活動・貨幣經濟・獨立採算制――が位置を占めるようになつた。

かかる資本主義的要素の存在はどこに根據をもつのであろうか。スターリンの答はだいたい次の通りであつた。現代ソ連には二つの社會主義的所有の形態がある。その一つは國有國營企業で、他の一つは農業の大部分を占めるコルホーズ的所有である。だから國營企業の生産物すなわち社會主義國家の所有する生産と、コルホーズ生産物すなわちコルホーズの所有する生産物との交換は賣買を通してなされねばならない。このようにコルホーズから國家の手に入る農