

Title	線形計画論・ Simplex method
Sub Title	Linear programming : simplex method
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1956
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.49, No.1 (1956. 1) ,p.1(1)- 16(16)
JaLC DOI	10.14991/001.19560101-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19560101-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

書評及び紹介

今野源八郎著『道路交通政策』……………	増	井	健	一(三)
W. Hamburger, The Relation of Consumption to Wealth and Wage Rate. (Econometrica, Jan. 1955.)……………	鈴	木	諒	一(五)
有澤廣巳編『統計』(毎日ライブラリー)……………	佐	藤	保	(五)
平田富太郎著『社會政策論研究』……………	中	鉢	正	美(六)
石渡貞雄著『農民分解論』……………	常	盤	政	治(六)
鈴木讓一共著『損害保険經營論』……………	庭	田	範	秋(六)
市川久仁共著『損害保険經營論』……………	飯	田	鼎	(三)
家永三郎著『數奇なる思想家の生涯』……………	飯	田	鼎	(三)

線形計畫論・Simplex Method

福岡正夫

- はしがき
- 一、線形計畫とは
 - 二、線形計畫の解法 Simplex Method
 - (イ) degeneracy の生じない場合
 - (ロ) degeneracy の生ずる場合の處理法
 - (ハ) 要約
 - 三、計算過程の行列表示
- はしがき

比較的最近になつて、線形計畫 (Linear Programming) という分野がアメリカの一部の學者の關心をひき、わが國の人々も折にふれてその名前を耳にするようになった。この分野の研究がそもそもアメリカで盛になつた發端のひとつは、第二次大戰からその後にかけて、空軍省に屬する數學者のスタッフが行つた作戰もしくは國防のための「相互依存活動のプログラミング」にあるのだが、そのさいの中心的な學者の一人ダンチングの手になる數學的モデルがやが

線形計畫論・Simplex Method

て廣く知られるにおよんで、經濟學者の間でも、そういう軍事上の問題と、他方つとに行われていたコーンフィールド博士ティグラーの最適食費の問題やヒッチコックグループマンズの最適船舶輸送の問題などが全く理論様式を同じくすることが認識され、ひいてはワルラス・カッセルの生産理論、ラーナー・ランゲの資源配分理論、それからレオンティエフの産業連關論などの織りなす系譜に、このような理論様式による新しい生産のモデルを構想する動向が、謂うところの「活動分析」として大きく浮び上るにいたつたのである。かくして共通の意識に結ばれた經濟學者、統計學者、數學者および行政官が、二九四九年六月「線形計畫」の共通課題の下に、シカゴ、コウルス・コミッションの合同會議に參畫してこの分析の理論と實踐とを論じたとき、この動向は文字通り統一的に確立されたといつてよく、その會議に提出された論文を収録して公刊した『生産と配分の活動分析』はその一應の成果を示すものに他ならないのである。以來、線形計畫論はアメリカにおいてますます隆盛に向う趨勢にあり、首府ワシントンのペンタゴンで毎年催されるシンポジア

らには經濟學界、數學界から多數の學者の參集を得て、その分析的側面における諸問題が論ぜられるとともに、併せて小は一會社のガソリン混合の問題から大はネブラスカのダム運營の問題にいたるまでその適用の收穫が逐一報告されている現狀である。このような情勢を前にすれば、經濟學を勉強するひがこの議論の内容について何らかのことを知っておくのは望ましいことであらうし、また理論經濟學者とか經營經濟學者とか言われるひとがそれについて全く無知のままであることは怠慢の誇りを免れないであらう。しかし、不幸なことに、これまで専門の領域で線形計畫論について書かれた論文(例えば前記『活動分析』一卷に収録されている諸論文の如き)は概して高度な數學に裝備されて、はじめてそれに近づくひとを畏怖せしめることが多い。本稿およびその續稿は、その點を考慮して、凸集合とか多角錐とかいふ言葉に災い(?)をなれなくても線形計畫論の核心が理解できるように意圖された解説論文である。従つて、それ以上の目的をもつていないことについては、あらかじめ一部の讀者の諒承を得ておかなければならぬ。

(註1) T. C. Koopmans ed., *Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of a Conference*, 1951. 線形計畫論の沿革については、クーンマンズによる序論を詳し。

(註2) 線形計畫論の解説文献として二、三のものを掲げておく。全く予備知識なしの經濟學徒には、まじきまで Paul A. Samuelson, "Market Mechanisms and Maximization",

The RAND Corporation, 1949. の第一部第二部を推賞したいところだが、この文献は未だ一般には利用不可能である(但し、やがて公刊される筈のサムエルソン、ソロウ、ドルフマン共著の書物の中に収録される予定)。じきに Robert Dorfman, *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm*, 1951. は、企業の均衡の問題について傳統的な分析法と線形計畫による分析法とを對比しつつ新しいアプローチを説明している點で、經濟學徒には多分に親しみ易いであらう。A. Charles, W. W. Cooper and A. Henderson, *An Introduction to Linear Programming*, 1953. は總括的な入門書として極めてすぐれた書物である。その他、雜誌論文としては R. Dorfman, "Mathematical Programming", *American Economic Review*, December 1953, J. S. Chipman, "Linear Programming", *Review of Economics and Statistics*, May 1953. などの参照が有益であると思ふ。

一、線形計畫とは

線形計畫とは、數學者のいかめしい言葉に従つて、「ある線形の函數を同じく線形の不等式の制約の下で極大(もしくは極小)ならしめる」一切の計畫問題を取扱う分析技術のことである。といふとまことに窮屈に聞こえるが、經濟學者の觀點からしても經濟の(おそらく最も基本的な)主要問題のひとつは、「嗜好と障壁の對立」といふ「條件付極大」の問題にあるのだから、たまたまその問題が形式上右の規定に適うような形をとるときは、御馴染の經濟問題が即

ち線形計畫の問題となつて少しも不思議はない筈である。サムエルソンが言つたように、「多くのひとが一生散文という名前を知らないうでそれを喋舌つているのと同様、線形計畫の問題も、それとは意識されずに、既に幾世紀の間、經濟學の中に現われてきてきている」のである。それ故、經濟理論の觀點から線形計畫の何たるかを知るためには、二、三の簡単な經濟的事例から始めるのが最も早道であると思われ。

第一に、經濟學徒の誰もが知つているリカードオの比較生産費說そのものが、既に立派な線形計畫の問題である。いま著名な例に倣つて、イギリス、ポルトガル兩國が葡萄酒と羅紗とを生産し、イギリスでは一單位の葡萄酒を生産する資源から一・二單位の羅紗が生産され、ポルトガルでは同じく一單位の葡萄酒を生産する資源から〇・九單位の羅紗が生産されると想定しよう。そのときには、葡萄酒と羅紗の國際價格比は一對一・二と一對〇・九の中間に定まると考えられるから、兩國がその價格比の下でそれぞれ最も有效な生産を行おうとするかぎり、周知の命題のように、イギリスは完全に羅紗の生産に特化して、ポルトガルは葡萄酒の生産に特化する。かつ、このような特化によつて、兩國から成立つ世界全體の生産が最適となることも、よく知られておりである。そこで、いまこれらの命題を記號的に翻譯することにして、まずイギリスの葡萄酒と羅紗の生産量をそれぞれ x_1 , x_2 と書き、それらの國際價格比を p_1 , p_2 と書けば、イギリスの國民生産物は(羅紗の單位で測つて)

$$(1) \quad z = \frac{p_1}{p_2} x_1 + 1.0x_2$$

線形計畫論・Simplex Method

である。他方、イギリスでは葡萄酒一單位を羅紗一・二單位に變形し得るのであるから、適當な單位で測つた資源の數量を C と書けば、イギリスの生産は

$$(2) \quad 1.2x_1 + 1.0x_2 \leq C$$

という制約に服するわけである。その意味するところは、葡萄酒 x_1 および羅紗 x_2 の生産は $1.2x_1 + 1.0x_2$ だけの資源量が必要として、それは利用可能な資源量 C を超えることはできないということである。また、いふまでもなく x_1 , x_2 のいずれも負になることはできないから、當然

$$(3) \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

という制約も考慮されなければならない。かくして、イギリスにとつての問題は、このような制約に服しつつ出來得るかぎり有效な生産を行うこと、すなわち、(1)を(2)と(3)の下で極大ならしめることに他ならない。全く同様にして、ポルトガルにとつての問題も、その國民生産物

$$(4) \quad z = \frac{p_1}{p_2} x_1 + 1.0x_2$$

を

$$(5) \quad 0.9x_1 + 1.0x_2 \leq C$$

$$(6) \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

に服しつつ極大ならしめることとして表される。そしていふまでも

なく、これら兩國の問題が解かれるとき、世界の生産の問題、すなわち

$$(7) \quad Z = z_1 + z_2 = \frac{p_1}{p_2}(c_1 + s_1) + 1(c_2 + s_2)$$

を

$$(8) \quad 1.2z_1 + 1.0z_2 \leq C$$

$$0.9z_1 + 1.0z_2 \leq C'$$

$$(9) \quad s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$$

$$s_1' \geq 0, s_2' \geq 0$$

の下で極大ならしめる問題も同時に解かれることになる。さて、ここであらためて以上の問題の數學的形態に注目してみよう。イギリスの問題においても、ポルトガルの問題においても、また世界の問題においても、極大にされるべき函数(1)(4)(7)はいずれも線形の函数である。かつまた、その極大化を制約する条件式(2)(5)(8)はいずれも線形の不等式である。従つて、それら三つの問題はいずれも先に記した規定に適つており、従つてそれぞれが典型的な線形計畫の問題に他ならないのである。

第二に、今度は極小化の問題を考えてみよう。その便利な一例はステイグラの最低食費の問題である。いまわれわれが食事から攝取しなければならぬ栄養分がカロリーとビタミンの二種類に分たれるとしよう。そして標準の大人一人につき、カロリーは(年當り)最少限七〇〇、ビタミンは最少限四〇〇必要であると想定す

$$(13) \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

の形で表される線形の函数を、

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$(14) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

という線形の不等式および

$$(15) \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

の制約の下で極大ならしめることに他ならない。問題が極小の形をとるときは、いうまでもなく(14)の含む不等號は逆の方向を向くことになる。

そのようなものとしての線形計畫問題の解法を考察することが、以下における本稿の主題である。

註1) 下記の二つの事例は Samuelson, "Market Mechanisms" から借用。

二、線形計畫の解法 Simplex Method

これまで述べたところから知られるように、線形計畫の問題は一種の條件付極大(極小)の問題である。そしてそのような問題の解法として、經濟學者が従來馴染んできたのはラグランジュの未定乗數による方法であるから、線形計畫の問題にもそれが適用できないかを一應考えてみたい氣持にもなる。しかし不幸にして、いまの

線形計畫論・Simplex Method

る。また、食物の種類は五種類あつて、その各一單位はそれぞれ次の表の示す分量だけそれらの栄養分を含有し、かつそれらの價格は、それぞれ

栄養	食物	1	2	3	4	5
カロリー		1	0	1	1	2
ビタミン		0	1	0	1	1
		1	1	1	1	1

する。問題は、どのような食事をとつたら必要とされる栄養分を保ちつつ最も廉價な食費で済ませ得るかということである。そこで、食物の數量をそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 と書けば、結局その問題は、食費

$$(16) \quad Z = 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 12x_5$$

を

$$(17) \quad 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 \geq 700$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 \geq 400$$

$$(18) \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

の下で極小ならしめることとして表される。ふたたび(16)は線形の函数であり、(17)は線形の不等式であるから、この問題は典型的な線形計畫の問題である(極小の問題であるから、(17)の不等號が極大問題の場合とは逆向きになつてすることに注意)。

さて、以上に述べたところから、線形計畫問題の何たるかはもはや充分に明かになつたと思われる。すなわち、一般に c_i を變數、 b_j, a_{ij} を所與の常數とするとき、それは

場合その方法がそのまま役立ち得ないことは直ちに明かである。何故なら、問題が線形であることによつて、折角ラグランジュの式をつくつてみても、それを變數で微分すれば、肝心の變數そのものが消えてしまふからである。そこで、このように、従來の解法が通用しないとなれば、われわれはそれに代るべき何らかの解法を見出さなければならぬ。そのために現在では既にいくつかの提案がなされてはいるが、その中でも最も確立した状態に到達しているのが、メンチングの考案になる所謂 Simplex Method である。われわれは以下において、この解法をなるべく分り易く解説する。

(1) degeneracy の生じない場合

まず、そのために不等式の制約条件(14)を等式のそれに書改めることから始めよう。(14)に含まれる式が不等號で成立する場合は、いままでもなくその式の右邊の方が左邊を超過するわけであるから、その超過分を丁度相殺する大きさのプラスの數を左邊に持込んでそれを新しい變數と看做せば、われわれは問題の一般性を失ふことなく、不等式を等式に書換えることができる。そのような便宜上の變數は、研究者たちによつて slack variable とか dummy variable とか呼ばれている(經濟的な觀點からは、それは例えば資源の過剰分をすべて吸収してゼロの價值を生産する擬制的な disposal activity の大きさなども解釋される)。ともかく、そのような變數を s_{j+1} で表すと、われわれの問題はあらためて

$$(19) \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m}$$

を線形の等式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 1x_{n+2} &= b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 1x_{n+m} &= b_m \end{aligned} \quad (14')$$

および

$$(15') \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$$

の下で極大ならしめる問題に轉形される(プラスの x_{n+i} はいずれまでもなくもとの制約式が不等號で成立つ場合に對應し、ゼロの x_{n+i} はそれが等號で成立つ場合に對應する)。Simplex Method は、問題のこの形態から出發する。

あらかじめ、二、三の用語を定義しよう。まず可能解 (feasible solution) および極大可能解 (maximum feasible solution) という用語について。もし一組の a_i が、必ずしも(15)の Z を極大ならしめないが、しかし(14)および(15)の制約条件を悉く満足せしめるならば、われわれはそれを可能解と呼び、またそういう可能解のあるものがとりわけ Z を極大ならしめるならば、それを極大可能解と呼ぶ。われわれが究極的に求めるのは、勿論この極大可能解である。次に、基 (basis) および基礎解 (basic solution) という用語について。いま(14)の係數から成る行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

しての任意の基および基礎解から出發して、 Z がなるべく増大するように一度に一個ずつベクトル $a_{(i)}$ および變數 $x_{(i)}$ の入れ替えを行い、もはやそれ以上 Z を増大することができなところまでその入れ替えを續行してゆく手續に存しているのである。

従つて、その手續によつて根本的な一つの要請は、そのときの基および基礎解には含まれていないベクトルおよび變數を新にそれに含ましめる毎に、これまでそれに含まれていたベクトルおよび變數を必ず一個ずつ落して、つねに m 個の一次獨立なベクトルと m 個のプラスの變數とを確保してゆくことである。このような要請が満たされない事態が生じたときは、線形計畫の用語では、degeneracy (もしくは tie) が生じたという。そういう事態の發生は、操作のシステムティックな遂行にある種の變則をもたらすから、さしあたり議論の前段では、それを排除するための次のような假定を設けることにする(これは説明の簡單化のための假定である。degeneracy が生じてもかまわない事情は本節の後段で取扱う)。

(Nondegeneracy の假定) 行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, n+m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, n+m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m, n+m} & b_m \end{bmatrix}$$

を構成する ($n+m+1$) 個の列ベクトルからとりだされたいか

線形計畫論・Simplex Method

を列ベクトル

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, a_{n+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の集合とみて

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}]$$

と略記すると、基というのは、これら $n+m$ 個のベクトルからとり出された m 個の一次獨立のベクトルの集合のことである。それを基と呼ぶのは、 m 次元空間の點は悉く、それら m 個のベクトルの一次結合として一義的に表されるからである。さて、そのような基がひとつ選ばれたものとして、それを假りに

$$[a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(m)}]$$

としよう。そのとき、それに對應して m 個のすべてプラスの

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}$$

から成る可能解があれば、それを基礎可能解あるいは簡單に基礎解と呼ぶ。Simplex Method の骨子は、要するにそのようなものと

なる m 個の列ベクトルも一次獨立である。^(註2)

この假定の下では degeneracy は生じないから、問題が可能であるかぎり、つねに精確に m 個のプラスの $x_{(i)}$ を確保してゆくことができる。さて、これだけの準備の下で、いよいよ Simplex Method の説明にとりかかろう。

まず、當初の基および基礎解をそれぞれ

$$a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(m)}$$

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}$$

とすると、(14)および(15)より

$$(16) \quad a_{(1)}x_{(1)} + a_{(2)}x_{(2)} + \dots + a_{(m)}x_{(m)} = b$$

$$(17) \quad c_{(1)}x_{(1)} + c_{(2)}x_{(2)} + \dots + c_{(m)}x_{(m)} = Z_0$$

次に基を構成する m 個のベクトルで ($n+m$) 個のすべてのベクトルを表すと

$$(18) \quad a_{(1)}y_{(1)j} + a_{(2)}y_{(2)j} + \dots + a_{(m)}y_{(m)j} = a_j \quad (j=1, 2, \dots, n+m)$$

ここでこれらの $y_{(1)j}, y_{(2)j}, \dots, y_{(m)j}$ を用ひて

$$(19) \quad c_{(1)}y_{(1)j} + c_{(2)}y_{(2)j} + \dots + c_{(m)}y_{(m)j} = z_j \quad (j=1, 2, \dots, n+m)$$

と定義しておく。さて(18)に θ をかけ、(19)から邊々引いて $a_{j\theta}$ を移項すると

$$\textcircled{20} \quad a_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij}) + a_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij}) + \dots + a_{im}(x_{im}-\theta y_{im}) + a_{ij}\theta = b$$

$$(j=1, 2, \dots, n+m)$$

を得る。同様に⑩に θ をかけ、⑦から邊々引いて兩邊に $a_{ij}\theta$ を加えると

$$\textcircled{21} \quad c_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij}) + c_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij}) + \dots + c_{im}(x_{im}-\theta y_{im}) + c_{ij}\theta = Z_0 + (c_{ij}-a_{ij}\theta)$$

$$(j=1, 2, \dots, n+m)$$

を得る。Simplex Methodの核心をなす基および基礎解の内容の入れ替えは次の要領で進行する。

新しい基の決定……(1)入れるベクトルの選擇。(2)に注目してみよう。もしそこで θ がゼロならば(2)は(1)にひとしく、われわれは當初と同じ Z_0 を得る。しかし、いまかりに $c_{ij}-a_{ij}\theta$ がプラスであるようなベクトルがあれば、 θ をプラスにとることによつて、われわれは明かに $Z_0 + (c_{ij}-a_{ij}\theta)$ を當初の Z_0 よりも大きくすることができ。それ故 Z_0 を増大せしめるには、そのようなベクトルを入れることが望ましい筈である。ところで、 $j=(1)(2)\dots(m)$ については明かに $a_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij})=1, y_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij})=0$ であるから $c_{ij}-a_{ij}\theta=0$ (⑩参照)、依つて採擇すべきベクトルは、もしあるとすれば、當初の基には含まれない残りのベクトルの中にある。そして、もしその中に $c_{ij}-a_{ij}\theta > 0$ の j がいくつもある場合には、 Z_0 をなるべく大きくする目的からして、その中で最も大きい $c_{ij}-a_{ij}\theta$ のものを選ぶのが當然であろう。かくして、新に基に加えるべきベクトル

は、それらの $c_{ij}-a_{ij}\theta$ の中から $\text{Max}(c_{ij}-a_{ij}\theta)$ であるような j を選ぶことによつて決定される。すなわち、そのような j が(2)であつたとすれば、 a_{ij} が導入されるべきベクトルである。(ii)抜かすベクトルの選擇。このようにして入れるベクトルは決められたが、基を構成するベクトルはつねに m 個であるから、われわれはどれか一つ當初の基のベクトルを抜かさなければならぬ。そのベクトルは次のようにして決められる。まず前段で決められた入るべきベクトルの番號(2)によつて、 $y_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij}), \dots, y_{im}(x_{im}-\theta y_{im})$ をしらべてみて、その中からプラスであるような $y_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij})$ を探す(何故プラスのものを採るかについては次のパラグラフ参照)。もし、そのような $y_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij})$ があれば、それらの中で a_{ij} と $y_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij})$ の比が最小となるような、すなわち $\text{Min}(a_{ij}/y_{ij}(x_{ij}-\theta y_{ij}))$ であるような(2)を求める。(何故ミニマムを求めるかについても次のパラグラフ参照)。もしその(2)が(2)であつたとすれば、 a_{ij} が抜かされるべきベクトルである。

新しい基礎解の決定……以上の手續を経て、もとの基からは a_{ij} が棄てられ、その代りに a_{ij} が補われて新しい基が出来上る。それに應じて、新しい基礎解は次のようにして定められる。まずわれわれは θ を

$$\textcircled{22} \quad \theta = \frac{a_{ij}(x_{ij})}{y_{ij}(x_{ij})}$$

となるところまで増大して、そのプラスの θ の値を新しい基礎解の a_{ij} の値とする。「22」は古い基礎解の中に含まれたのであるから

當然プラスである。故に a_{ij} (ii)がプラスとなるためには、 $y_{ij}(x_{ij})$ がプラスでなければならぬ。前のパラグラフでプラスの $y_{ij}(x_{ij})$ を探したのは、この理由による。さてそのときは、(2)によつて、 $a_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij})$ はゼロとなるから、抜かすべきベクトルに應ずる a_{ij} は、新しい基礎解の中からはおのずから消滅し、他の $(m-1)$ 個のプラスの $a_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij})$ が a_{ij} とともに新しい基礎解を構成することになる。 $[a_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij})=0]$ となるとき、残りの $a_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij})$ は新しい基礎解の中に残留するのであるから當然プラスでなければならない。われわれがさきに $a_{ij}/y_{ij}(x_{ij})$ の最小のものを選んで θ とした理由はここにある。かくして、われわれの基はあらためて

$$\textcircled{23} \quad a_{ij}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{im}$$

「23」は脱落に移り、それに應じて基礎解は

$$\textcircled{24} \quad a_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij}), \dots, y_{ij}(x_{ij}), \dots, a_{im}-\theta y_{im}(x_{im}), y_{ij}(x_{ij}), \dots, y_{im}(x_{im})$$

に移る [同時に y_{ij} もまた

$$\textcircled{25} \quad y_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij}), y_{ij}(x_{ij}), \dots, y_{im}-\theta y_{im}(x_{im}), y_{ij}(x_{ij}), \dots, y_{im}(x_{im})$$

に移ることが容易に知られる。これらの新しい基および基礎解を出発點として、ふたたび Z_0 を増大すべき入れ替えのステップが開始されてゆくのである。

繰返していえば、 Z_0 の増大がもはや不可能なところまでこのステ

ップを續行してゆく操作が、Simplex Methodの核心をなしている。では、そのプロセスが終了するのはいつであるか。あり得べき基の数はたかだか $(n+m)$ 個から m 個をとる組合せの数だけであつて、しかも同じ基が再現することはあり得ないから(何故なら Z_0 はステップ毎に増大してゆくのであるから、同じ Z_0 の値の再現することは不可能である)、計算に含まれるステップの数は有限個でなければならない筈である。ところで一方、讀者が既に知つたように、このステップが進行するためには、(i)一つには、そのときの基に含まれない a_{ij} によつてプラスの $a_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij})$ の見つかること、(ii)もう一つには、新しい基に入れられる a_{ij} によつてプラスの $y_{ij}(x_{ij})$ の見つかることが必要である。それ故、入れ替えのステップが有限個で終了しなければならぬとすると、ともかく有限のある段階で、(i)プラスの $a_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij})$ が見つからなくなるか、(ii)プラスの $y_{ij}(x_{ij})$ が見つからなくなるか、のいずれかが生じなければならぬ。そこで、まずプラスの $a_{ij}-\theta y_{ij}(x_{ij})$ は存在してその j から(2)は決まるが、その(2)に應ずる $y_{ij}(x_{ij})$ の中にプラスのものが見つかからないという事態が生ずる場合を考えてみよう。その場合には、明かに θ は任意に大きくできるから、 Z_0 の極大値はプラスの無限大となつて、有界の極大値は存在しない。従つて、 Z_0 に有界の極大値が存在する問題においては、逐次計算のステップは早晚必ずプラスの $c_{ij}-a_{ij}\theta$ の見つからなくなる段階に到達しなければならぬということになる。そして遂にその段階に到達したとき Z_0 の極大となるときであり、基礎解がわれわれの求める極大解となるときである。

を他の任意の解とする。

$$(65) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n+m}x_{n+m} = b$$

$$(67) \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{n+m}x_{n+m} = Z$$

さて、(65)と(67)とから

$$(68) \quad \left(\sum_{j=1}^{n+m} y_j(x_j) \right) a(x) + \left(\sum_{j=1}^{n+m} y_j(x_j) \right) c(x) + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n+m} y_j(x_j) \right) a_{(m)} = b$$

また、仮定によつて、 b は必ず正の

$$c_j - z_j \leq 0$$

であるから、(68)の c_j を b に置換え、かつ(68)を斟酌すると

$$(69) \quad \left(\sum_{j=1}^{n+m} y_j(x_j) \right) a(x) + \left(\sum_{j=1}^{n+m} y_j(x_j) \right) c(x) + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n+m} y_j(x_j) \right) a_{(m)} \geq Z$$

とこゝで $a(x), a(x), \dots, a_{(m)}$ は一次独立であるから、(69)と(68)の係数はそれぞれひとしくなければならぬ。故に

$$(70) \quad \sum_{j=1}^{n+m} y_j(x_j) x_j = a(x)$$

故に(69)から

$$(71) \quad c(x)a(x) + c(x)c(x) + \dots + c_{(m)}a_{(m)} \geq Z$$

すなわち

$$(72) \quad Z_0 \geq Z$$

依つて、すべての Z_0 について $Z_0 \geq Z$ ならば、そのときの基礎解に應ずる Z_0 の値は極大となるべきことが判明する。

このように、すべての Z_0 について

$$c_j - z_j \leq 0$$

という規準は、 Z の極大を保證すべき重要な規準である。それは屢々 simplex criterion (ケルマン) あるいは optimality criterion (チャーンズ) などと呼ばれている。

(D) degeneracy の生ずる場合の處理法

これまでのところ、われわれは nondegeneracy の假定を設けて説明を進めた。しかし、そのような假定は實際にはつねに滿されとは限らない。では、もしあるステップで degeneracy が生じ、プラスの a_j をもつベクトルが m 個以下しか得られないような場合にはどうしたらよいであろうか。以下では、そのような場合の處理法として注目し値すると思われるチャーンズの Perturbation Technique (Epsilon Technique と呼ばれる) を説明して、われわれの以上の議論を補強しよう。

われわれはまず、もとの問題をそのまま解く代りに、計算のどのステップにおいても degeneracy の可能性を回避しつつ、しかももとの問題と同一の解を興えるような問題を構成する。そのため、いまプラスの未定常數を用いて

$$(80) \quad e^1 a_1 + e^2 a_2 + \dots + e^{n+m} a_{n+m} = \sum_{j=1}^{n+m} e^j a_j$$

という多項式をつくり、それを(68)の兩邊に加えて

$$(81) \quad a(x)a(x) + a(x)c(x) + \dots + a_{(m)}a_{(m)} + \sum_{j=1}^{n+m} e^j a_j = b + \sum_{j=1}^{n+m} e^j a_j$$

そゝに(80)を考慮すれば、(81)は精簡次のように書改められる。

$$(82) \quad a(x) \left(x(x) + \sum_{j=1}^{n+m} e^j y_j(x_j) \right) + a(x) \left(c(x) + \sum_{j=1}^{n+m} e^j y_j(x_j) \right) + \dots + a_{(m)} \left(x_{(m)} + \sum_{j=1}^{n+m} e^j y_{(m)}(x_j) \right) = b + \sum_{j=1}^{n+m} e^j a_j$$

同様に、(81)を改ざると

$$(83) \quad c(x) \left(x(x) + \sum_{j=1}^{n+m} e^j y_j(x_j) \right) + c(x) \left(c(x) + \sum_{j=1}^{n+m} e^j y_j(x_j) \right) + \dots + c_{(m)} \left(x_{(m)} + \sum_{j=1}^{n+m} e^j y_{(m)}(x_j) \right) = Z_e$$

この(82)がわれわれの新しい問題を形成する。その意味するところは、(80)のことである。もしもこの問題に degeneracy が生じて、 b を表すのに m 個以下のベクトルで足りてしまうような事態になつたならば、その b に perturbation を加えて、それを $b + \sum e^j a_j$ に移し、丁度 m 個のベクトルでそれが表せるようになる。そのようにしたのが(82)であつて、その e^j もとの問題の a_j は(82)の示すように $(a_j + \sum e^j y_j)$ となる。

さて、このような問題の構成が何故 degeneracy の克服に役立つ

つかを更に立入つて考へてみよう。先に見たように、Simplex Method による基のベクトルの入れ替えは、ひとたび導入すべきベクトルの番號(が)が決まつたあとでは、その(2)に應ずるプラスの $y_j(x_j)$ の中から $\text{Min} [a(x)/y_j(x_j)]$ を選ぶことによつて行われた。degeneracy は、そのとき同一の極小値をとる $a(x)/y_j(x_j)$ が複数個存在するときに發生する。例を以

$$(84) \quad \text{Min} \frac{a(x)}{y_1(x)} = \frac{a(x)}{y_1(x)} = \dots = \frac{a(x)}{y_2(x)}$$

であつたとすれば、 0 をそれと等置することによつて、 $a(x) - \theta y_1(x), a(x) - \theta y_2(x), \dots, a(x) - \theta y_m(x)$ は同時だゼロとなるが、新しい問題の構成においては、選ばれたのは $\text{Min} [a(x)/y_j(x)]$ ではなくて $\text{Min} [a(x) + \sum e^j y_j(x_j)/y_j(x_j)]$ である。そして、 $a(x) + \sum e^j y_j(x_j)$ の存在によつて、われわれは上記の degeneracy を免れようとするのである。とゞつては

$$(85) \quad \frac{a(x) + \sum e^j y_j(x_j)}{y_1(x)} = \frac{a(x)}{y_1(x)} + \frac{e^1 y_1(x)}{y_1(x)} + \dots + \frac{a(x) + \sum e^j y_j(x_j)}{y_2(x)} = \frac{a(x)}{y_2(x)} + \frac{e^1 y_1(x)}{y_2(x)} + \frac{e^2 y_2(x)}{y_2(x)} + \dots$$

であるから、たまたま $a(x)/y_1(x) = a(x)/y_2(x) = \dots = a(x)/y_m(x)$ であつても、残りの項によつて

$$\begin{aligned} & \frac{y_1(c_1)}{y_1(c_1)}, \frac{y_1(c_2)}{y_1(c_2)}, \dots \\ & \frac{y_2(c_1)}{y_2(c_1)}, \frac{y_2(c_2)}{y_2(c_2)}, \dots \\ & \frac{y_3(c_1)}{y_3(c_1)}, \frac{y_3(c_2)}{y_3(c_2)}, \dots \end{aligned}$$

を縦の一行毎に左から右へと眺めていつて、そのいずれかの列でユニークな極小値に初めて出あつたとき、その極小値をもつ行の番號で棄てるヴェクトルを決めればよいのである。何故左から右に進んでゆくかという、 ϵ の値を充分小さくとれば、その低次の冪は高次の冪より充分大きく、従つて(8)に含まれる ϵ の多項式は、最初に訪れる $y_1(c_1)/y_1(c_1)$ の相違でその全體の大きさを支配されるからである。そして $y_1(c_1) = 1, y_1(c_2) = 0, \dots, y_1(c_m) = 0$ であることを考慮すれば、そのようなユニークな極小値がいずれかの列に必ず存在することは明かである。

このような操作によつて、われわれはどのステップにおいても degeneracy に當面することなく、計算を進行することができる。そして先述の原則に従つて計算が終了したとき、そのときの解で $\epsilon = 0$ とおけば、それが求めるもとの問題の解であることはいふまでもない。かくして、degeneracy の問題は完全に解決する。

(4) 要約

敘述がいくぶん錯綜したから、計算の荒筋のみをレビューしておく。Simplex Method の手續は、要は次の如きものである。

1° ある任意の基および基礎解から出發する。

2° それについて $c_j - z_j$ を検討し、プラスの $c_j - z_j$ の中、 $c_j - z_j = \text{Max}(c_j - z_j)$ であるような (j) を新しく入れるべきヴェクトルの番號とする。

3° その (j) について $y_1(c_j)$ を検討し、プラスの $y_1(c_j)$ の中、 $x_1/c_1 = \text{Min}(x_1/c_1)$ であるような (q) を抜かすべきヴェクトルの番號とする。

4° そのさい degeneracy が生じたら、 $x_1/c_1 = y_1(c_1)$ のひたし極小値をもつ (q) について $y_1(c_1)/y_1(c_1)$ を各列毎に比較して、初めて (例えば第 (q) 番目の列で) ユニークな極小値があつたとき、その (q) を抜かすべきヴェクトルの番號とする。

5° 以上のようにして新しい基が定めれば、それに應ずる新しい基礎解を計算する。それは

$$\begin{aligned} (2) \text{ 中 } (q) \text{ については } & x_1(c_1) - \frac{x_1(c_1)}{y_1(c_1)} y_1(c_1) \\ (3) \text{ 中 } (q) \text{ については } & \frac{x_1(c_1)}{y_1(c_1)} \end{aligned}$$

である。

6° この新しい基および基礎解に基いて、ふたたび同様な計算を繰返し、逐次それを進行する。ワン・ステップ毎に Z_0 は増大する。

7° プラスの $c_j - z_j$ が見つからないときは、 Z_0 に有界の極大値がないときである。

8° プラスの $c_j - z_j$ が見つからないときは、 Z_0 が目標の極大値に到達したときである。計算はそこで終了し、そのときの解がわれ

われの求める極大解を提供する。以上。

(註1) Simplex Method についての最もオーソドックスな文献は George B. Dantzig, "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities", *Activity Analysis*, pp. 339-347, 1950. また Charnes, Cooper and Henderson, *An Introduction*, pp. 8-15, 58-61. をも参照せよ。

(註2) Dantzig, *op. cit.*, p. 340. 参照。この假定はドルフマンの三つの假定 (Dorfman, *op. cit.*, p. 27.) の第一と第三とを併せて包含する。ドルフマンの第一の假定とは、 $[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{1m}]$ からとられた、どの m 個の列ヴェクトルも一次獨立であるということであり、第三の假定とは、 $[a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, a_{2m}]$ からとられたどの $(m-1)$ 個の列ヴェクトルも制約式の右邊の列ヴェクトルと一次獨立であるということである。以下で取扱う degeneracy は、この第三の假定の満たされないことに由来する。すなわち、第一の假定とともにこの假定が満たされれば、(問題が可能であるかぎり) 解は正確に m 個のプラスの x_i を含むが、もしそれが満たされなければ、解は m 個以下のプラスの x_i を含まないことになる。

ドルフマンのもう一つの (第二の) 假定というのは、
 $[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{1m}]$ からとられたどの $(m+1)$ 個の列ヴェクトルも一次獨立であるということである。この假定は極大解が一意的であるかどうかにかかつてゐる。もしこの假定が満たされれば Z の極大は必ずある extreme point で一意的に到達され、従つて

線形計畫論・Simplex Method

極大解はただか m 個のプラスの x_i を含むが、もしそれが満たされなければ、 Z の極大はいわば面か稜の上で到達されて、同じ Z の極大値を興える解が他にも存在可能となり、しかもそれらは m 個以上のプラスの x_i を含む得る。それ故、極大解においてプラスの x_i の数が m 個またはそれ以下であることを線形計畫の基本定理と謳つて掲げる場合には、この假定が是非とも必要である。しかし Simplex Method は m と m と異なる任意の extreme point から出發して、extreme point から extreme point へと移つてゆく方法であるから、ドルフマンも述べているように (*op. cit.*, p. 27.)、計算の目的自體にとつてはこの假定は不要であろう。すなわち、計算の結果到達した終局の解と同じ Z の値を興える解が他に存在するとしても、それより大きな Z の値を興える解は他に存在しないことが保證されるのである。

(註3) 文字通り Z_0 を最も多く増大させるためには、 $\text{Max}(c_j - z_j)$ よりも、むしろ $\text{Max}(c_j - z_j) \theta$ を選ぶべきである。しかし、それにははるかに多くの計算が含まれるから、ヨリ少ない計算で済み、しかも結果においてあまり大差がないと思われる $\text{Max}(c_j - z_j)$ の規準の方が便利である。

(註4) $a_1(c_1) = a_{11}y_1(c_1) + \dots + a_{1m}y_m(c_1) + \dots + a_{1n}y_n(c_1)$ を求める

$$a_1(c_1) = -a_{11} \frac{y_1(c_1)}{y_1(c_1)} - \dots - a_{1m} \frac{y_m(c_1)}{y_m(c_1)} - \dots - a_{1n} \frac{y_n(c_1)}{y_n(c_1)}$$

それを

$a_j = a_{(1)}y_{(1)j} + \dots + a_{(q)}y_{(q)j} + \dots + a_{(m)}y_{(m)j}$
に代入して

$$a_j = a_{(1)} \left(y_{(1)j} - \frac{y_{(1)j}}{y_{(q)j}} y_{(1)j} \right) + \dots + a_{(q)} \left(\frac{y_{(q)j}}{y_{(q)j}} \right) + \dots + a_{(m)} \left(y_{(m)j} - \frac{y_{(q)j}}{y_{(q)j}} y_{(m)j} \right)$$

である。

(註c) Dantzig, *op. cit.*, p. 344. 及び Charnes, Cooper and Henderson, *op. cit.*, p. 60. 参照。

(註e) A. Charnes, "Optimality and Degeneracy in Linear Programming", *Econometrica*, April 1952, pp. 160-170. 及び Charnes, Cooper and Henderson, *op. cit.*, pp. 62-67. 参照。但しこの思想の萌芽は既に Dantzig, *op. cit.*, p. 340. の脚註②に見出されるように思われる。

三、計算過程の行列表示

本節では、以上で述べた Simplex Method の計算過程を、行列の形で neat に整理しておくことを試みよう。まず記號の簡便化のため、 a_1, a_2, \dots, a_{n+m} の構成する $m \times (n+m)$ の行列を A 、その中 $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(m)}$ の構成する $m \times m$ の行列を A^* 、 b_1, b_2, \dots, b_m の列ベクトルを b 、 $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(m)}$ の列ベクトルを a^* 、 $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(m)}$ の $m \times (n+m)$ の行列を Y 、 c_1, c_2, \dots, c_{n+m} の列ベクトルを C 、 $c_{(1)}, c_{(2)}, \dots, c_{(m)}$ の列ベクトルを c^* などと書き、かつ $r_j = c_j$ と定義してこれらの $r_1, r_2, \dots,$

r_{n+m} からなる列ベクトルを r と書けば、われわれの (6) (7) (8) 式はすべて次の關係の中に一舉に示されることが知られる。すなわ

$$(40) \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -c^{*T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* & Y \\ Z_0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & A \\ 0 & -c^T \end{bmatrix}$$

や (9)

$$(41) B = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -c^{*T} & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} a^* & Y \\ Z_0 & r \end{bmatrix}$$

と略記すれば、上の關係は

$$(42) BH = \begin{bmatrix} b & A \\ 0 & -c^T \end{bmatrix}$$

である。ここで右邊の行列は所與の A, b, c, r から成立つており、その線形計畫問題のいわば與件を形成している。Simplex Method の骨子は出發點の B_0, H_0 から始めて

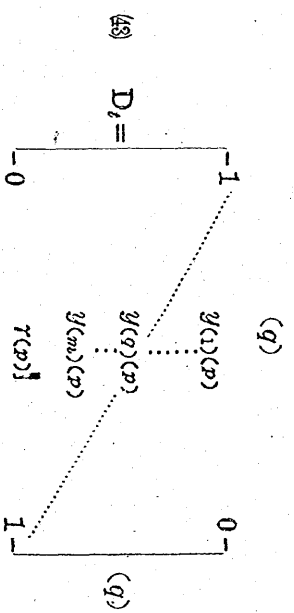
$$B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_{\text{final}}$$

$$H_0 \rightarrow H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \dots \rightarrow H_{\text{final}}$$

という逐次變換を行つてゆくところに存している。

さて、 k 段階の B_k から $k+1$ 段階の B_{k+1} に移るさいに、本文の規則どおり r と Y の視察によつて、入れるべきベクトル番號 (q)

と抜かすべきベクトル番號 (q) が決められたとしよう。すなわちその場合には、 B_k からその第 (q) 列 $a_{(q)}$ および $-e_{(q)}$ が除かれ、その場所を $a_{(q)}$ および $-e_{(q)}$ が補つて B_{k+1} が出来る。この入れ替えを行列記號で表すと、計算して容易に確め得るよう、 B_k に右か

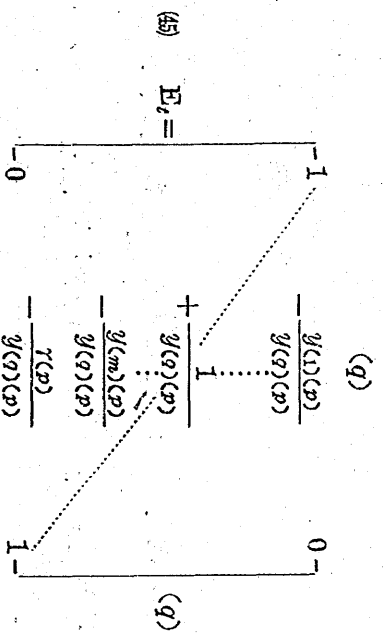


という行列をかけて B_{k+1} を得ることにすなわち

$$(44) B_{k+1} = B_k D_k$$

とすること他ならぬ。ここで D_k はその第 (q) 列に $y_{(1)(q)}, \dots, y_{(q)(q)}, \dots, y_{(m)(q)}, r_{(q)}$ をもち、対角線に $1, \dots, 1, \dots, 1$ 、他の箇所すべて 0 をもち、 $(m+1) \times (m+1)$ 非特異の行列である。

ところで、これに伴つて H_k の方はどういふ風に H_{k+1} に移るか。これも計算してみれば、 H_k に左から



をかけることによつて、 H_{k+1} の得られることが確められる。故に $H_k \rightarrow H_{k+1}$ の計算は

$$(45) H_{k+1} = E_k H_k$$

によつて與えられる。 E_k は D_k と同じように、その第 (q) 列に $\frac{y_{(1)(q)}}{y_{(q)(q)}}, \dots, \frac{1}{y_{(q)(q)}}, \dots, \frac{y_{(m)(q)}}{y_{(q)(q)}}, \frac{r_{(q)}}{y_{(q)(q)}}$ をもち、対角線に $1, \dots, 1, \dots, 1$ 、他の箇所すべて 0 をもち、 $(m+1) \times (m+1)$ 非特異の行列である。

明かに

$$(46) E_k = D_k^{-1}$$

であるから、(44) はまた

$$(48) B_{k+1}^{-1} = E_k B_k^{-1}$$

とも書くことができる。従つて(8)を

$$(8) \quad H = B^{-1} \left[\begin{array}{c|c} b & A \\ \hline 0 & -C' \end{array} \right]$$

の形に書き直せば、Simplex Method の計算過程は、この兩邊に左から E_0, E_1, E_2, \dots を順次にかけてゆく過程であることが分る。そしてこの掛け算の進行によつて H, H^2, H^3 が得られたとき、その第1列を見れば、求める z_0 の極大解とそれに應ずる Z_0 の極大値とが知られるのである。

(註一) この議論は Alex Orden, "Application of the Simplex Method to a Variety of Matrix Problems", Symposium on Linear Inequalities and Programming, 1951. に負うところが大きい。

(註二) この掛け算を行えば、 B_{i+1} の第 i 列 $\sum a_{i(j)} y_{(j)}(p)$, $\dots, \sum a_{m(j)} y_{(j)}(p)$ および $-\sum c_{(j)} y_{(j)}(p) + r(p)$ が入るが、それらは本文の(9)および(10)によつてそれぞれ $a_{(p)}, \dots, a_{m(p)}$ および $c_{(p)}$ に他ならぬ。
(註三) H_1, H_2 をかけると

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} x_{(1)} - \frac{x_{(q)}}{y_{(q)}(p)} y_{(1)}(p) \\ \dots \\ x_{(q)} \\ \dots \\ x_{(m)} - \frac{x_{(q)}}{y_{(q)}(p)} y_{(m)}(p) \\ \hline Z_0 - \frac{x_{(q)}}{y_{(q)}(p)} r(p) \end{array} & \begin{array}{c} y_{(1)1} - \frac{y_{(q)1}}{y_{(q)}(p)} y_{(1)}(p) \dots y_{(1)n+m} - \frac{y_{(q)n+m}}{y_{(q)}(p)} y_{(1)}(p) \\ \dots \\ y_{(q)1} \\ \dots \\ y_{(m)1} - \frac{y_{(q)1}}{y_{(q)}(p)} y_{(1)}(p) \dots y_{(m)n+m} - \frac{y_{(q)n+m}}{y_{(q)}(p)} y_{(1)}(p) \\ \hline r_1 - \frac{y_{(q)1}}{y_{(q)}(p)} r(p) \dots r_{n+m} - \frac{y_{(q)n+m}}{y_{(q)}(p)} r(p) \end{array} \end{array}$$

が得られる。これが H_{i+1} であることについては本文第二節九頁を見よ。

日本綿業における中小機業の地位

——地方体制の崩壊と問屋制の再編成——

青 沼 吉 松

中小機業の現状はわが國中中小工業問題の核心をかなり典型的に表している。これは大資本に對する中小工業の從屬という内容をもつ。従つてこれに焦點を合わせるならば、商工合體の綿業體制において織布工程の全部ではないが、その過半を分擔している中小機業の從屬的地位が注目されなくてはならぬ。

紡績業は日本工業のうちでも最も早く近代化されたものの一つであり、生産の大部分は舊紡十社といった大企業に集中されている。東西特に大阪の綿業關係問屋はこの業種の發展に伴つて、輸出入商或は集散地卸商として近代化され、在來問屋の殻を破つて近代的商社となつた。綿業商社のうちにはわが國有力商社の多くがみられ、それらの若干は總合商社への道を進んでさえている。これら二つの分野での資本集中化のはつきりした傾向に反して、紡績會社兼管織布工場に對する專業織布業という意味での中小機業では、中小乃至は零細業者の分散的存在が克服されていない。これらの多くは企業以下の家庭的水準にある。一方における集中と他方での分散が、わが國綿業體制の特質の一つを構成している。このような跛行性を含ん

日本綿業における中小機業の地位

だ體制において、中小機業がいかなる地位を占めているか。その内容が問題となる。

今次大戦前における中小機業體制の性格は、一言でいえば、問屋制を基軸とする地方産業と規定することができる。産地問屋を軸として、各機業地は獨自性をもつた一つの纏りであつた。即ちそれはいまだ大資本の有機的一環に編入されていなかった。ところが、戦後紡績會社・貿易商社等の大資本の機業地への食い込みによつて、この地方體制は崩壊し、全國的規模の綿業體制が確立された。全國的體制の支配權は大資本特に大紡績會社の掌中に握られ、かつての地方體制時代の支配者はこれの下部支配機構としてのみ存在を許容されているにすぎなくなつてゐる。紡績資本はそれ自體として工業的であるが、その機業地支配では、資本の商業的充用による中小機業の前期的支配といった性格がかなり強く出ている。つまり、體制規模の擴大過程において、問屋制は再編成された型で温存されているようだ。換言すれば、支配・從屬關係が展開される場面は變つたが、その本質は依然として繼承されているようにみえる。戦前