慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	線形計画論· Simplex method
Sub Title	Linear programming : simplex method
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1956
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.49, No.1 (1956. 1) ,p.1(1)- 16(16)
JaLC DOI	10.14991/001.19560101-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19560101-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

書評及び紹介

線形計畫論・Simplex Method

福岡正夫

はしがき
一、線形計畫とは
二、線形計畫の解法 Simplex Method
(イ) degeneracy の生じない場合
(ロ) degeneracy の生ずる場合の處理法
(ハ) 要約
三、計算過程の行列表示

はしがき

比較的最近になつて、線形計畫 (Linear Programming) という分野がアメリカの一部の學者の關心をひき、わが國の人々も折にふれてその名前を耳にするようになつた。この分野の研究がそもそもアメリカで盛になつた發端のひとつは、第二次大戰からその後にかけて、空軍省に屬する數學者のスタッフが行つた作戰もしくは國防のための「相互依存活動のプログラミング」にあるのだが、そのさいの中心的な學者の一人ダンチッグの手になる數學的モデルがやがて廣く知られるにおよんで、經濟學者の間でも、そういう軍事上の問題と、他方つとに行われていたコーンフィールド＝スティグラーの最適食費の問題やヒッチコック＝クープマンスの最適船舶輸送の問題などが全く理論樣式を同じくすることが認識され、ひいてはワルラス＝カッセルの生産理論、ラーナー＝ランゲの資源配分理論、それからレオンティエフの産業連關論などの織りなす系譜に、このような理論樣式による新しい生産のモデルを構想する動向が、謂うところの「活動分析」として大きく浮び上るにいたつたのである。かくして共通の意識に結ばれた經濟學者、統計學者、數學者および行政官が、一九四九年六月「線形計畫」の共通課題の下に、シカゴ、コウルス・コミッションの合同會議に參畫してこの分析の理論と實踐とを論じたとき、この動向は文字通り統一的に確立されたといつてよく、その會議に提出された論文を收錄して公刊した『生産と配分の活動分析』(註1)はその一應の成果を示すものに他ならないのである。以來、線形計畫論はアメリカにおいてますます隆盛に向う趨勢にあり、首府ワシントンのペンタゴンで毎年催されるシンポジァ

みには經濟學界、數學界から多數の學者の參集を得て、その分析的側面における諸問題が論ぜられるとともに、併せて小は一會社のガソリン混合の問題から大はネブラスカのダム運營の問題にいたるまでその適用の收穫が逐一報告されている現狀である。このような情勢を前にすれば、經濟學を勉强するひとがこの議論の內容について何らかのことを知つておくのは望ましいことであろうし、また理論經濟學者とか經營經濟學者とか言われるひとがそれについて全く無知のままでいることは怠慢の謗りを免れないであろう。しかし、不幸なことに、これまで專門の領域で線形計畫論について書かれた論文（例えば前記『活動分析』一巻に收錄されている諸論文の如き）は概して高度な數學に裝備されて、はじめてそれに近づくひとを畏怖せしめることが多い。本稿およびその續稿は、その點を考慮して、凸集合とか多角錐とかいう言葉に災い（?）されなくても線形計畫論の核心が理解できるように意圖された解説論文である。從つて、それ以上の目的をもつていないことについては、あらかじめ一部の讀者の諒承を得ておかなければならない。[註2]

（註1）T. C. Koopmans ed., *Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of a Conference*, 1951. 線形計畫論の沿革については、クープマンスによる序論に詳しい。

（註2）線形計畫論の解說文獻として二、三のものを掲げておこう。全く予備知識なしの經濟學徒には、まつさきに Paul A. Samuelson, “Market Mechanisms and Maximization”, *The RAND Corporation*, 1949. の第一部第二部を推賞したいところだが、この文獻は未だ一般には利用不可能である（但し、やがて公刊される筈のサムエルソン、ソロウ、ドルフマン共著の書物の中に收錄される豫定）。つぎに、Robert Dorfman, *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm*, 1951. は、企業の均衡の問題について傳統的な分析法と線形計畫による分析法とを對比しつつ新しいアプローチを說明している點で、經濟學徒には多分に親しみ易いであろう。A. Charnes. W. W. Cooper and A. Henderson, *An Introduction to Linear Programming*, 1953. は總括的な入門書として極めてすぐれた書物である。その他、雜誌論文としては R. Dorfman, “Mathematical Programming”, *American Economic Review*, December 1953., J. S. Chipman, “Linear Programming”, *Review of Economics and Statistics*, May 1953. などの參照が有益であると思う。

一、線形計畫とは

線形計畫とは、數學者のいかめしい言葉に從うと、「ある線形の函數を同じく線形の不等式の制約の下で極大（もしくは極小）ならしめる」一切の計畫問題を取扱う分析技術のことである。というとまことに窮屈にきこえるが、經濟學者の觀點からしても經濟の（おそらく最も基本的な）主要問題のひとつは、「嗜好と障碍の對立」という「條件付極大」の問題にあるのだから、たまたまその問題が形式上右の規定に適うような形をとるときは、御馴染の經濟問題が即ち線形計畫の問題となつて少しも不思議はない筈である。サムエルソンが言つたように、「多くのひとが一生散文という名前を知らないでそれを喋舌つているのと同樣、線形計畫の問題も、それとは意識されずに、既に幾世紀もの間、經濟學の中に現われてきている」のである。それ故、經濟理論の觀點から線形計畫の何たるかを知るためには、二、三の簡單な經濟的事例から始めるのが最も早道であると思われる。[註1]

第一に、經濟學徒の誰もが知つているリカァドオの比較生產費說そのものが、既に立派な線形計畫の問題である。いま著名な例に倣つて、イギリス、ポルトガル兩國が葡萄酒と羅紗とを生產し、イギリスでは一單位の葡萄酒を生產する資源から一・二單位の羅紗が生產され、ポルトガルでは同じく一單位の葡萄酒を生產する資源から〇・九單位の羅紗が生產されると想定しよう。そのときには、葡萄酒と羅紗の國際價格比は一對一・二と一對〇・九の中間に定まると考えられるから、兩國がその價格比の下でそれぞれ最も有效な生產を行おうとするかぎり、周知の命題のように、イギリスは完全に羅紗の生產に特化して、ポルトガルは葡萄酒の生產に特化する。かつ、このような特化によつて、兩國から成立つ世界全體の生產が最適となることも、よく知られているとおりである。そこで、いまこれらの命題を記號的に飜譯することにして、まずイギリスの葡萄酒と羅紗の生產量をそれぞれ x_1、x_2 と書き、それらの國際價格比を p_1/p_2 と書けば、イギリスの國民生產物は（羅紗の單位で測つて）

(1)　$z=\frac{p_1}{p_2}x_1+1x_2$

である。他方、イギリスでは葡萄酒一單位を羅紗一・二單位に變形し得るのであるから、適當な單位で測つた資源の數量をCと書けば、イギリスの生產は

(2)　$1.2x_1+1.0x_2\leqq C$

という制約に服するわけである。その意味するところは、葡萄酒 x_1 および羅紗 x_2 の生產は　$1.2x_1+1.0x_2$　だけの資源量を必要として、それは利用可能な資源量Cを超えることはできないということである。また、いうまでもなく x_1、x_2 のいずれも負になることはできないから、當然

(3)　$x_1\geqq0,\ x_2\geqq0$

という制約も考慮されなければならない。かくして、イギリスにとつての問題は、このような制約に服しつつ出來得るかぎり有效な生產を行うこと、すなわち、(1)を(2)と(3)の下で極大ならしめることに他ならない。全く同樣にして、ポルトガルにとつての問題も、その國民生產物

(4)　$z'=\frac{p_1}{p_2}x'_1+1x'_2$

を

(5)　$0.9x'_1+1.0x'_2\leqq C'$

(6)　$x'_1\geqq0,\ x'_2\geqq0$

に服しつつ極大ならしめることとして表される。そしていうまでも

なく、これら兩國の問題が解かれるとき、世界の生産の問題、すなわち

(7)　$Z=z+z'=\dfrac{p_1}{p_2}(x_1+x'_1)+1(x_2+x'_2)$

を

(8)　$1.2x_1+1.0x_2\leqq C$

$0.9x'_1+1.0x'_2\leqq C'$

(9)　$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0$

$x'_1\geqq 0,\ x'_2\geqq 0$

の下で極大ならしめる問題も同時に解かれることになる。さて、ここであらためて以上の問題の數學的形態に注目してみよう。イギリスの問題においても、ポルトガルの問題においても、また世界の問題においても、極大にされるべき函數(1)(4)(7)はいずれも線形の函數である。かつまた、その極大化を制約する條件式(2)(5)(8)はいずれも線形の不等式である。依つて、それら三つの問題はいずれも先に記した規定に適つており、從つてそのそれぞれが典型的な線形計畫の問題に他ならないのである。

第二に、今度は極小化の問題を考えてみよう。その便利な一例はスティグラーの最低食費の問題である。いまわれわれが食事から攝取しなければならない榮養分がカロリーとヴィタミンの二種類に分たれるとしよう。そして標準の大人一人につき、カロリーは（年當り）最少限七〇〇、ヴィタミンは最少限四〇〇必要であると想定する。また、食物の種類は五種類あつて、その各一單位はそれぞれ次の表の示す分量だけそれらの榮養分を含有し、かつそれらの價格は、それぞれ $p_1=2$、$p_2=20$、$p_3=3$、$p_4=11$、$p_5=12$ であるとする。

榮養＼食物	1	2	3	4	5
カロリー	1	0	1	1	2
ヴィタミン	0	1	0	1	1

問題は、どのような食事をとつたら必要とされる榮養分を保ちつつ最も廉價な食費で濟ませ得るかということである。そこで、食物の數量をそれぞれ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 と書けば、結局その問題は、食費

(10)　$Z=2x_1+20x_2+3x_3+11x_4+12x_5$

を

(11)　$1x_1+0x_2+1x_3+1x_4+2x_5\geqq 700$

$0x_1+1x_2+0x_3+1x_4+1x_5\geqq 400$

(12)　$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ x_3\geqq 0,\ x_4\geqq 0,\ x_5\geqq 0$

の下で極小ならしめることとして表される。ふたたび(10)は線形の函數であり、(11)は線形の不等式であるから、この問題は典型的な線形計畫の問題である（極小の問題であるから、(11)の不等號が極大問題の場合とは逆向きになつていることに注意）。

さて、以上に述べたところから、線形計畫問題の何たるかはもはや充分に明かになつたと思われる。すなわち、一般に x_j を變數、c_j、b_i、a_{ij} を所與の常數とするとき、それは

(13)　$Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$

の形で表される線形の函數を、

(14)　$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqq b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqq b_2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leqq b_m$

という線形の不等式および

(15)　$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ x_n\geqq 0$

の制約の下で極大ならしめることに他ならない。問題が極小の形をとるときは、いうまでもなく(14)の含む不等號は逆の方向を向くことになる。

そのようなものとしての線形計畫問題の解法を考察することが、以下における本稿の主題である。

註1）　下記の二つの事例は Samuelson, "Market Mechanisms" から借用。

二、線形計畫の解法 Simplex Method

これまで述べたところから知られるように、線形計畫の問題は一種の條件付極大（極小）の問題である。そしてそのような問題の解法として、經濟學者が從來馴れ親しんできたのはラグランジュの未定乘數による方法であるから、線形計畫の問題にもそれが適用できないかを一應考えてみたい氣持にもなる。しかし不幸にして、いまの場合その方法がそのまま役立ち得ないことは直ちに明かである。何故なら、問題が線形であることによつて、折角ラグランジュの式をつくつてみても、それを變數で微分すれば、肝心の變數そのものが消えてしまうからである。そこで、このように、從來の解法が通用しないとすれば、われわれはそれに代るべき何らかの解法を見出さなければならない。そのために現在では既にいくつかの提案がなされているが、その中でも最も確立した狀態に到達しているのが、ダンチッグの考案になる所謂 Simplex Method である。(註2) われわれは以下において、この解法をなるべく分り易く解說する。

(イ)　degeneracy の生じない場合

まず、そのために不等式の制約條件(14)を等式のそれに書改めることから始めよう。(14)に含まれる式が不等號で成立する場合は、いうまでもなくその式の右邊の方が左邊を超過するわけであるから、その超過分を丁度相殺する大きさのプラスの數を左邊に持込んでそれを新しい變數と看做せば、われわれは問題の一般性を失うことなく、不等式を等式に書換えることができる。そのような便宜上の變數は、研究者たちによつて slack variable とか dummy variable とか呼ばれている（經濟的な觀點からは、それは例えば資源の過剩分をすべて吸收してゼロの價値を生産する擬制的な disposal activity の大きさなどとも解釋される）。ともかく、そのような變數を x_{n+i} で表すと、われわれの問題はあらためて

(13)'　$Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+0x_{n+1}+0x_{n+2}+\cdots+0x_{n+m}$

を線形の等式

$$
\text{(14)}' \quad
\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n+1x_{n+1} \qquad\qquad =b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n \quad +1x_{n+2} \qquad =b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n \qquad\qquad +1x_{n+m}=b_m
\end{array}
$$

および

$$
\text{(15)}' \quad x_1\geqq0,\ x_2\geqq0,\cdots,x_n\geqq0,\ x_{n+1}\geqq0,\ x_{n+2}\geqq0,\cdots,x_{n+m}\geqq0
$$

の下で極大ならしめる問題に轉形される（プラスの x_{n+i} はいうまでもなくもとの制約式が不等號で成立つ場合に對應し、ゼロの x_{n+i} はそれが等號で成立つ場合に對應する）。Simplex Method は、問題のこの形態から出發する。

あらかじめ、二、三の用語を定義しよう。まず可能解（feasible solution）および極大可能解（maximum feasible solution）という用語について。もし一組の x_i が、必ずしも(13)′の Z を極大ならしめないが、しかし(14)′および(15)′の制約條件を悉く滿足せしめるならば、われわれはそれを可能解と呼び、またそういう可能解のあるもののがとりわけ Z を極大ならしめるならば、それを極大可能解と呼ぶ。われわれが究極的に求めるのは、勿論この極大可能解である。

次に、基（basis）および基礎解（basic solution）という用語について。いま(14)′の係數から成る行列

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & 1 & 0\cdots0 \\
a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & 0 & 1\cdots0 \\
\vdots & \vdots \quad\ \ \vdots & \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots \\
a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & 0 & 0\cdots1
\end{bmatrix}
$$

を列ヴェクトル

$$
a_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\cdots,a_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},
$$

$$
a_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\cdots,a_{n+m}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

の集合とみて

$$
[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\cdots, a_{n+m}]
$$

と略記すると、基というのは、これら $n+m$ 個のヴェクトルからとり出された m 個の一次獨立のヴェクトルの集合のことである。それを基と呼ぶのは、m 次元空間の點は悉く、それら m 個のヴェクトルの一次結合として一義的に表されるからである。さて、そのような基がひとつ選ばれたものとして、それを假りに

$$
[a_{(1)}, a_{(2)}\cdots\cdots, a_{(m)}]
$$

としよう。そのとき、それに對應して m 個のすべてプラスの

$$
x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots\cdots, x_{(m)}
$$

から成る可能解があれば、それを基礎可能解あるいは簡單に基礎解と呼ぶ。Simplex Method の骨子は、要するにそのようなものとしての任意の基および基礎解から出發して、Z がなるべく増大するように一度に一個ずつヴェクトル $a_{(i)}$ および變數 $x_{(i)}$ の入れ替えを行い、もはやそれ以上 Z を増大することができないところまでその入れ替えを續行してゆく手續に存しているのである。

從って、その手續にとって根本的な一つの要請は、そのときの基および基礎解には含まれていないヴェクトルおよび變數を新にそれに含ましめる毎に、これまでそれに含まれていたヴェクトルおよび變數を必ず一個ずつ落して、つねに m 個の一次獨立なヴェクトルと m 個のプラスの變數とを確保してゆくことである。このような要請が滿されない事態が生じたときは、線形計畫の用語では、degeneracy（もしくは tie）が生じたという。そういう事態の發生は、操作のシステマティックな遂行にある種の攪亂をもたらすから、さしあたり議論の前段では、それを排除するための次のような假定を設けることにする（これは說明の簡單化のための假定である。degeneracy が生じてもかまわない事情は本節の後段で取扱う）。

（Nondegeneracy の假定）行列

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1,\,n+m}\ ; & b_1 \\
a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2,\,n+m}\ ; & b_2 \\
\vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{m,\,n+m}\ ; & b_m
\end{bmatrix}
$$

を構成する（$n+m+1$）個の列ヴェクトルからとりだされたいかなる m 個の列ヴェクトルも一次獨立である。(註2)

この假定の下では degeneracy は生じないから、問題が可能であるかぎりは、つねに精確に m 個のプラスの x_i を確保してゆくことができる。さて、これだけの準備の下で、いよいよ Simplex Method の說明にとりかかろう。

まず、當初の基および基礎解をそれぞれ

$$
a_{(1)}, a_{(2)}, \cdots\cdots, a_{(m)}
$$

$$
x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots\cdots, x_{(m)}
$$

とすると、(14)′および(13)′より

$$
\text{(16)} \quad a_{(1)}x_{(1)}+a_{(2)}x_{(2)}+\cdots\cdots+a_{(m)}x_{(m)}=b
$$

$$
\text{(17)} \quad c_{(1)}x_{(1)}+c_{(2)}x_{(2)}+\cdots\cdots+c_{(m)}x_{(m)}=Z_0
$$

次に基を構成する m 個のヴェクトルで（$n+m$）個のすべてのヴェクトルを表すと

$$
\text{(18)} \quad a_{(1)}y_{(1)j}+a_{(2)}y_{(2)j}+\cdots\cdots+a_{(m)}y_{(m)j}=a_j \qquad (j=1,2,\cdots n+m)
$$

ここでこれらの $y_{(1)j}, y_{(2)j}, \cdots\cdots y_{(m)j}$ を用いて

$$
\text{(19)} \quad c_{(1)}y_{(1)j}+c_{(2)}y_{(2)j}+\cdots\cdots+c_{(m)}y_{(m)j}=z_j \qquad (j=1,2,\cdots,n+m)
$$

と定義しておく。さて(18)に θ をかけ、(16)から邊々引いて $a_j\theta$ を移項すると

(20) $a_{(1)}(x_{(1)}-\theta y_{(1)j})+a_{(2)}(x_{(2)}-\theta y_{(2)j})$
$$+\cdots\cdots+a_{(m)}(x_{(m)}-\theta y_{(m)j})+a_j\theta=b \qquad (j=1,2,\cdots,n+m)$$

を得る。同様に(19)に θ をかけ、(17)から邊々引いて兩邊に $c_j\theta$ を加えると

(21) $c_{(1)}(x_{(1)}-\theta y_{(1)j})+c_{(2)}(x_{(2)}-\theta y_{(2)j})$
$$+\cdots\cdots+c_{(m)}(x_{(m)}-\theta y_{(m)j})+c_j\theta=Z_0+(c_j-z_j)\theta \qquad (j=1,2,\cdots,n+m)$$

を得る。Simplex Method の核心をなす基および基礎解の内容の入れ替えは次の要領で進行する。

新しい基の決定……(i) **入れるヴェクトルの選擇**。(21)に注目してみよう。もしそこで θ がゼロならば(21)は(17)にひとしく、われわれは當初と同じ Z_0 を得る。しかし、いまかりに c_j-z_j がプラスであるようなヴェクトルがあれば、θ をプラスにとることによつて、われわれは明かに $Z_0+(c_j-z_j)\theta$ を當初の Z_0 よりも大きくすることができる。それ故 Z_0 を増大せしめるには、そのようなヴェクトル a_j を入れることが望ましい筈である。ところで $j=(1)(2)\cdots\cdots(m)$ については明かに $y_{(i)(i)}=1,\ y_{(i)j}=0\ (i\neq j)$ であるから $c_{(i)}-z_{(i)}=0$（(18)(19)參照）、依つて採擇すべきヴェクトルは、もしあるとすれば、當初の基には含まれない殘りのヴェクトルの中にある。そして、もしその中に $c_j-z_j>0$ の j がいくつもある場合には、Z_0 をなるべく大きくする目的からして、その中で最も大きい c_j-c_j のものを選ぶのが當然であろう。かくして、新に基に加えるべきヴェクトルは、それらの c_j-z_j の中から $\mathrm{Max}(c_j-z_j)$ であるような j を選ぶことによつて決定される。すなわち、そのような j が (p) であつたとすれば、$a_{(p)}$ が導入されるべきヴェクトルである。(註3) (ii) **抜かすヴェクトルの選擇**。このようにして入れるヴェクトルは決められたが、基を構成するヴェクトルはつねに m 個であるから、われわれはどれか一つ當初の基のヴェクトルを抜かさなければならない。そのヴェクトルは次のようにして決められる。まず前段で決められた入れるべきヴェクトルの番號 (p) について、$y_{(1)(p)}, y_{(2)(p)},\cdots, y_{(m)(p)}$ をしらべてみて、その中からプラスであるような $y_{(i)(p)}$ を探す（何故プラスのものを探すかについては次のパラグラフ參照）。もし、そのような $y_{(i)(p)}$ があれば、それらの中で $x_{(i)}$ と $y_{(i)(p)}$ の比が最小となるような、すなわち $\mathrm{Min}(x_{(i)}/y_{(i)(p)})$ であるような (i) を求める。（何故ミニマムを求めるかについても次のパラグラフ參照）。もしその (i) が (q) であつたとすれば、$a_{(q)}$ が抜かされるべきヴェクトルである。

新しい基礎解の決定……以上の手續を經て、もとの基からは $a_{(q)}$ が棄てられ、その代りに $a_{(p)}$ が補われて新しい基が出來上る。それに應じて、新しい基礎解は次のようにして定められる。まずわれわれは θ を

(22) $$\theta=\frac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}$$

となるところまで増大して、そのプラスの θ の値を新しい基礎解の $x_{(p)}$ の値とする〔$x_{(q)}$ は古い基礎解の中に含まれたのであるから

當然プラスである。故に $x_{(p)}$ $(=\theta)$ がプラスとなるためには、$y_{(q)(p)}$ がプラスでなければならない。前のパラグラフでプラスの $y_{(i)(p)}$ を探したのは、この理由による〕。さてそのときは、(22)によつて、$x_{(q)}-\theta y_{(q)(p)}$ はゼロとなるから、抜かすべきヴェクトルに應ずる x_i は、新しい基礎解の中からはおのずから消滅し、他の $(m-1)$ 個のプラスの $x_{(i)}-\theta y_{(i)(p)}$ $((i)\neq(q))$ が $x_{(p)}$ とともに新しい基礎解を構成することになる〔$x_{(q)}-\theta y_{(q)(p)}=0$ となるとき、殘りの $x_{(i)}-\theta y_{(i)(p)}$ は新しい基礎解の中に殘留するのであるから當然プラスでなければならない。われわれがさきに $x_{(i)}/y_{(i)(p)}$ の最小のものを選んで θ とした理由はここにある〕。

かくして、われわれの基はあらためて

(23) $$a_{(1)},\cdots\cdots,a_{(p)},\cdots\cdots a_{(m)}$$

〔$a_{(q)}$ は脱落〕に移り、それに應じて基礎解は

(24) $$x_{(1)}-\frac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}y_{(1)(p)},\cdots,\frac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}},\cdots,x_{(m)}-\frac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}y_{(m)(p)}$$

に移る〔同時に $y_{(i)j}$ もまた

(25) $$y_{(1)j}-\frac{y_{(q)j}}{y_{(q)(p)}}y_{(1)(p)},\cdots,\frac{y_{(q)j}}{y_{(q)(p)}},\cdots,y_{(m)j}-\frac{y_{(q)j}}{y_{(q)(p)}}y_{(m)(p)}$$

に移ることが容易に知られる〕。(註4) これらの新しい基および基礎解を出發點として、ふたたび Z_0 を増大すべき入れ替えのステップが開始されてゆくのである。

線返していえば、Z_0 の増大がもはや不可能なところまでこのステップを續行してゆく操作が、Simplex Method の核心をなしている。では、そのプロセスが終了するのはいつであろうか。あり得べき基の數はたかだか $(n+m)$ 個から m 個をとる組合せの數だけであつて、しかも同じ基が再現することはあり得ないから（何故なら Z_0 はステップ毎に増大してゆくのであるから、同じ Z_0 の値の再現することは不可能である）、計算に含まれるステップの數は有限個でなければならない筈である。ところで一方、讀者が既に知つたように、このステップが進行するためには、(イ)一つには、そのときの基に含まれない a_j についてプラスの c_j-z_j の見つかること、(ロ)もう一つには、新しい基に入れられる $a_{(p)}$ についてプラスの $y_{(i)(p)}$ の見つかることが必要である。それ故、入れ替えのステップが有限個で終了しなければならないとすると、ともかく有限のある段階で、(イ)プラスの c_j-z_j が見つからなくなるか、(ロ)プラスの $y_{(i)(p)}$ が見つからなくなるか、のいずれかが生じなければならない。そこで、まずプラスの c_j-z_j は存在してその j から (p) は決まるが、その (p) に應ずる $y_{(i)(p)}$ の中にプラスのものが見つからないという事態が生ずる場合を考えてみよう。その場合には、明かに θ は任意に大きくできるから、Z_0 の極大値はプラスの無限大となつて、有界の極大値は存在しない。從つて、Z_0 に有界の極大値が存在する問題においては、逐次計算のステップは早晩必ずプラスの c_j-z_j の見つからなくなる段階に到達しなければならないということになる。そして遂にその段階に到達したときが Z_0 の極大となるときであり、基礎解がわれわれの求める極大解となるときである。

そのことは次のようにして證明される。(註5) いま $x'_1, x'_2,\cdots\cdots, x'_{n+m}$

を他の任意の解とすると

$$a_1x'_1+a_2x'_2+\cdots\cdots+a_{n+m}x'_{n+m}=b \tag{26}$$

$$c_1x'_1+c_2x'_2+\cdots\cdots+c_{n+m}x'_{n+m}=\mathrm{Z} \tag{27}$$

さて、(26)と(18)とから

$$\left(\sum_{j=1}^{n+m}y_{(1)j}x'_j\right)a_{(1)}+\left(\sum_{j=1}^{n+m}y_{(2)j}x'_j\right)a_{(2)}+\cdots\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n+m}y_{(m)j}x'_j\right)a_{(m)}=b \tag{28}$$

また、假定によつて、もはやすべての

$$c_j-z_j\leqq 0$$

であるから、(27)の c_j を z_j に置換え、かつ(19)を斟酌すると

$$\left(\sum_{j=1}^{n+m}y_{(1)j}x'_j\right)c_{(1)}+\left(\sum_{j=1}^{n+m}y_{(2)j}x'_j\right)c_{(2)}+\cdots\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n+m}y_{(m)j}x'_j\right)c_{(m)}\geqq\mathrm{Z} \tag{29}$$

ところで $a_{(1)}, a_{(2)}, \cdots\cdots, a_{(m)}$ は一次獨立であるから、(11)と(28)の係數はそれぞれひとしくなければならない。故に

$$\sum_{j=1}^{n+m}y_{(i)j}x'_j=x_{(i)} \tag{30}$$

故に(29)から

$$c_{(1)}x_{(1)}+c_{(2)}x_{(2)}+\cdots\cdots c_{(m)}x_{(m)}\geqq\mathrm{Z} \tag{31}$$

すなわち

$$\mathrm{Z}_0\geqq\mathrm{Z} \tag{32}$$

依つて、すべての j について $c_j-z_j\leqq 0$ ならば、そのときの基礎解に應ずる Z_0 の値は極大となるべきことが判明する。

このように、すべての j について

$$c_j-z_j\leqq 0$$

という規準は、Zの極大を保證すべき重要な規準である。それは屢々 simplex criterion（ドルフマン）あるいは optimality criterion（チャーンズ）などと呼ばれている。

(E) degeneracy の生ずる場合の處理法

これまでのところ、われわれは nondegeneracy の假定を設けて說明を進めた。しかし、そのような假定は實際にはつねに滿されるとは限らない。では、もしあるステップで degeneracy が生じ、プラスの x_i をもつヴェクトルが m 個以下しか得られないような場合にはどうしたらよいであろうか。以下では、そのような場合の處理法として注目に値すると思われるチャーンズの Perturbation Technique（Epsilon Technique とも呼ばれる）(註6) を說明しつつ、われわれの以上の議論を補强しよう。

われわれはまず、もとの問題をそのまま解く代りに、計算のどのステップにおいても degeneracy の可能性を回避しつつ、しかももとの問題と同一の解を與えるような問題を構成する。そのため、いまプラスの未定常數 ε を用いて

$$\varepsilon^1a_1+\varepsilon^2a_2+\cdots\cdots+\varepsilon^{n+m}a_{n+m}=\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^ja_j \tag{33}$$

という多項式をつくり、それを(16)の兩邊に加えて

$$a_{(1)}x_{(1)}+a_{(2)}x_{(2)}+\cdots\cdots+a_{(m)}x_{(m)}+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^ja_j=b+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^ja_j \tag{34}$$

さらに(18)を考慮すれば、(34)は結局次のように書改められる。

$$a_{(1)}\left(x_{(1)}+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^jy_{(1)j}\right)+a_{(2)}\left(x_{(2)}+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^jy_{(2)j}\right)+\cdots\cdots+a_{(m)}\left(x_{(m)}+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^jy_{(m)j}\right)=b+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^ja_j \tag{35}$$

同樣に、(17)になぞらえて

$$c_{(1)}\left(x_{(1)}+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^jy_{(1)j}\right)+c_{(2)}\left(x_{(2)}+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^jy_{(2)j}\right)+\cdots\cdots+c_{(m)}\left(x_{(m)}+\sum_{j=1}^{n+m}\varepsilon^jy_{(m)j}\right)=\mathrm{Z}_\varepsilon \tag{36}$$

この(35)(36)がわれわれの新しい問題を形成する。その意味するところはこういうことである。もしもとの問題に degeneracy が生じて、b を表すのに m 個以下のヴェクトルで足りてしまうような事態になつたならば、その b に perturbation を加えて、それを $b+\sum\varepsilon^ja_j$ に移し、丁度 m 個のヴェクトルでそれが表せるようにできる。そのようにしたのが(33)であつて、そのさいもとの問題の x_i は(35)(36)の示すように $(x_i+\sum\varepsilon^jy_{ij})$ となる。

さて、このような問題の構成が何故 degeneracy の克服に役立つかを更に立入つて考えてみよう。先に見たように、Simplex Method による基のヴェクトルの入れ替えは、ひとたび導入すべきヴェクトルの番號 (p) が決まつたあとでは、その (p) に應ずるプラスの $y_{(i)(p)}$ の中から $\mathrm{Min}\,[x_{(i)}/y_{(i)(p)}]$ を選ぶことによつて行われた。degeneracy は、そのとき同一の極小値をとる $x_{(i)}/y_{(i)(p)}$ が複數個存するときに發生する。例えば

$$\mathrm{Min}\frac{x_{(i)}}{y_{(i)(p)}}=\frac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}=\frac{x_{(r)}}{y_{(r)(p)}}=\cdots\cdots=\frac{x_{(v)}}{y_{(v)(p)}} \tag{37}$$

であつたとすれば、θ をそれに等置することによつて、$x_{(q)}-\theta y_{(q)(p)}$, $x_{(r)}-\theta y_{(r)(p)}$, $\cdots\cdots$, $x_{(v)}-\theta y_{(v)(p)}$ は同時にゼロとなり、それだけの個數のヴェクトルが脫落してしまうのである。ところが、新しい問題の構成においては、選ばれるのは $\mathrm{Min}\,[x_{(i)}/y_{(i)}]$ ではなくて、$\mathrm{Min}\,[(x_{(i)}+\sum\varepsilon^jy_{(i)j})/y_{(i)(p)}]$ である。そして、まさにこの $\sum\varepsilon^jy_{(i)j}$ の介在によつて、われわれは上記の degeneracy を免れることができるのである。というわけは

$$\begin{aligned}
\frac{x_{(q)}+\sum\varepsilon^jy_{(q)j}}{y_{(q)(p)}}&=\frac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}+\varepsilon^1\frac{y_{(q)1}}{y_{(q)(p)}}+\varepsilon^2\frac{y_{(q)2}}{y_{(q)(p)}}+\cdots\cdots\\
\frac{x_{(r)}+\sum\varepsilon^jy_{(r)j}}{y_{(r)(p)}}&=\frac{x_{(r)}}{y_{(r)(p)}}+\varepsilon^1\frac{y_{(r)1}}{y_{(r)(p)}}+\varepsilon^2\frac{y_{(r)2}}{y_{(r)(p)}}+\cdots\cdots\\
&\vdots\\
\frac{x_{(v)}+\sum\varepsilon^jy_{(v)j}}{y_{(v)(p)}}&=\frac{x_{(v)}}{y_{(v)(p)}}+\varepsilon^1\frac{y_{(v)1}}{y_{(v)(p)}}+\varepsilon^2\frac{y_{(v)2}}{y_{(v)(p)}}+\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{38}$$

であるから、たまたま $x_{(q)}/y_{(q)(p)}=x_{(r)}/y_{(r)(p)}=\cdots=x_{(v)}/y_{(v)(p)}$ であつても、殘りの項について

(8)
$$\frac{y_{(q)1}}{y_{(q)(p)}},\ \frac{y_{(q)2}}{y_{(q)(p)}},\ \cdots\cdots$$
$$\frac{y_{(r)1}}{y_{(r)(p)}},\ \frac{y_{(r)2}}{y_{(r)(p)}},\ \cdots\cdots$$
$$\vdots$$
$$\frac{y_{(v)1}}{y_{(v)(p)}},\ \frac{y_{(v)2}}{y_{(v)(p)}},\ \cdots\cdots$$

を縦の一列毎に左から右へと眺めていつて、そのいずれかの列でユニークな極小値に初めて出あつたとき、その極小値をもつ行の番號で棄てるヴェクトルを決めればよいのである。何故左から右に進んでゆくかというと、εの値を充分小さくとれば、その低次の羃は高次の羃より充分大きく、從つて(8)に含まれるεの多項式は、最初に訪れる $y_{(i)j}/y_{(i)(p)}$ の相違でその全體の大きさを支配されるからである。そして $y_{(i)(i)}=1$, $y_{(i)(k)}=0$ $((i)\neq(k))$ であることを考慮すれば、そのようなユニークな極小値がいずれかの列に必ず存することは明かである。

このような操作によつて、われわれはどのステップにおいても degeneracy に當面することなく、計算を續行することができる。そして先述の原則に從つて計算が終了したとき、そのときの解で $\varepsilon=0$ とおけば、それが求めるもとの問題の解であることはいうまでもない。かくして、degeneracy の問題は完全に解決する。

(ハ)　要　約

敍述がいくぶん錯綜したから、計算の荒筋のみをレヴィウしておこう。Simplex Method の手續は、要は次の如きものである。

1°　ある任意の基および基礎解から出發する。

2°　それについて c_j-z_j を檢討し、プラスの c_j-z_j の中、$c_{(p)}-z_{(p)}=\mathrm{Max}(c_j-z_j)$ であるような(p)を新しく入れるべきヴェクトルの番號とする。

3°　その(p)について $y_{(i)(p)}$ を檢討し、プラスの $y_{(i)(p)}$ の中、$x_{(q)}/y_{(q)(p)}=\mathrm{Min}(x_{(i)}/y_{(i)(p)})$ であるような(q)を拔かすべきヴェクトルの番號とする。

4°　そのさい degeneracy が生じたら、$x_{(i)}/y_{(i)(p)}$ のひとしい極小値をもつ(i)について $y_{(i)j}/y_{(i)(p)}$ を各 j 列毎に比較して、初めて（例えば第(s)番目の列で）ユニークな極小値があつたときの、その(s)を拔かすべきヴェクトルの番號とする。

5°　以上のようにして新しい基が定まれば、それに應ずる新しい基礎解を計算する。それは

$(i)\neq(q)$ については $x_{(i)}-\dfrac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}y_{(i)(p)}$

$(i)=(q)$ については $\dfrac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}$

である。

6°　この新しい基および基礎解に基いて、ふたたび同樣な計算を繰返し、逐次それを續行する。ワン・ステップ毎にZ_0は增大する。

7°　プラスの $y_{(i)(p)}$ が見つからないときは、Z_0に有界の極大値がないときである。

8°　プラスの c_j-z_j が見つからないときは、Z_0が目標の極大値に到達したときである。計算はそこで終了し、そのときの解がわれわれの求める極大解を提供する。以上。

（註1）　Simplex Method についての最もオーソドックスな文献は George B. Dantzig, "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities", *Activity Analysis*, pp. 339–347. である。また Charnes, Cooper and Henderson, *An Introduction*, pp. 8–15, 58–61. をも參照せよ。

（註2）　Dantzig, *op.cit.*, p. 340. 參照。この假定はドルフマンの三つの假定（Dorfman, *op. cit.*, p. 27.）の第一と第三とを併せて包含する。ドルフマンの第一の假定とは、$[a_1, a_2, \cdots, a_{n+m}]$ からとられた、どのm個の列ヴェクトルも一次獨立であるということであり、第三の假定とは、$[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n+m}]$ からとられたどの$(m-1)$個の列ヴェクトルも制約式の右邊の列ヴェクトル b と一次獨立であるということである。以下で取扱う degeneracy は、この第三の假定の滿されないことに由來する。すなわち、第一の假定とともにこの假定が滿されれば、（問題が可能であるかぎりは）解は正確にm個のプラスのx_iを含むが、もしそれが滿されなければ、解はm個以下のプラスのx_iしか含まないことになる。

ドルフマンのもう一つの（第二の）假定というのは、$\begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \cdots\cdots, & a_{n+m} \\ c_1, & c_2, & \cdots\cdots, & c_{n+m} \end{bmatrix}$ からとられたどの$(m+1)$個の列ヴェクトルも一次獨立であるということである。この假定は極大解が一意的であるかどうかにかかつている。もしこの假定が滿されればZの極大は必ずある extreme point で一意的に到達され、從つて極大解はたかだかm個のプラスのx_iを含むが、もしそれが滿されなければ、Zの極大はいわば面か稜の上で到達されて、同じZの極大値を與える解が他にも存在可能となり、しかもそれらはm個以上のプラスのx_iを含み得る。それ故、極大解においてプラスのx_iの數がm個またはそれ以下であることを線形計畫の基本定理と謳つて掲げる場合には、この假定が是非とも必要である。しかし Simplex Method はもともとある任意の extreme point から出發して、extreme point から extreme point へと移つてゆく方法であるから、ドルフマンも述べているように（*op. cit.*, p. 27.）、計算の目的自體にとつてはこの假定は不要であろう。すなわち、計算の結果到達した終局の解と同じZの値を與える解が他に存在するとしても、それより大きなZの値を與える解は他に存在しないことが保證されるのである。

（註3）　文字通りZ_0を最も多く增大させるためには、$\mathrm{Max}(c_j-z_j)$ よりも、むしろ $\mathrm{Max}(c_j-z_j)\theta$ を選ぶべきである。しかし、それにははるかに多くの計算が含まれるから、ヨリ少い計算ですみ、しかも結果においてあまり大差がないと思われる $\mathrm{Max}(c_j-z_j)$ の規準の方が便利である。

（註4）　$a_{(p)}=a_{(1)}y_{(1)(p)}+\cdots\cdots+a_{(q)}y_{(q)(p)}+\cdots\cdots+a_{(m)}y_{(m)(p)}$

であるから、それから $a_{(q)}$ を求めると

$$a_{(q)}=-a_{(1)}\frac{y_{(1)(p)}}{y_{(q)(p)}}-\cdots\cdots+a_{(p)}\frac{1}{y_{(q)(p)}}-\cdots\cdots-a_{(m)}\frac{y_{(m)(p)}}{y_{(q)(p)}}$$

それを

$$a_j = a_{(1)}y_{(1)j} + \cdots\cdots + a_{(q)}y_{(q)j} + \cdots\cdots + a_{(m)}y_{(m)j}$$

に代入して

$$a_j = a_{(1)}\left(y_{(1)j} - \frac{y_{(q)j}}{y_{(q)(p)}}y_{(1)(p)}\right) + \cdots\cdots + a_{(p)}\left(\frac{y_{(q)j}}{y_{(q)(p)}}\right)$$
$$+ \cdots\cdots + a_{(m)}\left(y_{(m)j} - \frac{y_{(q)j}}{y_{(q)(p)}}y_{(m)(p)}\right)$$

である。

（註5） Dantzig, *op. cit.*, p. 344. および Charnes, Cooper and Henderson, *op. cit.*, p. 60. 參照。

（註6） A. Charnes, "Optimality and Degeneracy in Linear Programming", *Econometrica*, April 1952, pp. 160-170. および Charnes, Cooper and Henderson, *op. cit.*, pp. 62-67. 參照。但しこの思想の萠芽は既に Dantzig, *op. cit.*, p. 340. の脚註(2)に見出されるように思われる。

三、計算過程の行列表示

本節では、以上で述べた Simplex Method の計算過程を、行列の形で neat に整頓しておくことを試みよう。(註1) まず記號の簡便化のため、$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n+m}$ の構成する $m\times(n+m)$ の行列を $\bar{A}$、その中 $a_{(1)}, a_{(2)}, \cdots\cdots a_{(m)}$ の構成する $m\times m$ の行列を A^*、$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_m$ の列ヴェクトルを b、$x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots\cdots, x_{(m)}$ の列ヴェクトルを x^*、$y_{(i)j}$ の $m\times(n+m)$ の行列を $\bar{Y}$、$c_1, c_2, \cdots\cdots, c_{n+m}$ の列ヴェクトルを $\bar{C}$、$c_{(1)}, c_{(2)}, \cdots\cdots, c_{(m)}$ の列ヴェクトルを c^* などと書き、かつ $z_j - c_j = \gamma_j$ と定義してこれらの $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_{n+m}$ からなる列ヴェクトルを $\bar{\gamma}$ と書けば、われわれの(16)(17)(18)(19)式はすべて次の關係の中に一擧に示されることが知られる。すなわち

$$(40)\qquad \left[\begin{array}{c|c} A^* & 0 \\ \hline -c^{*\prime} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} x^* & \bar{Y} \\ \hline Z_0 & \bar{\gamma} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} b & \bar{A} \\ \hline 0 & -\bar{c}' \end{array}\right]$$

さらに

$$(41)\qquad B = \left[\begin{array}{c|c} A^* & 0 \\ \hline -c^{*\prime} & 1 \end{array}\right],\quad H = \left[\begin{array}{c|c} x^* & \bar{Y} \\ \hline Z_0 & \bar{\gamma} \end{array}\right]$$

と略記すれば、上の關係は

$$(42)\qquad BH = \left[\begin{array}{c|c} b & \bar{A} \\ \hline 0 & -\bar{c}' \end{array}\right]$$

である。ここで右邊の行列は所與の $\bar{A}$、$\bar{c}$、b から成立っており、その線形計畫問題のいわば與件を形成している。Simplex Method の骨子は出發點の B_0, H_0 から始めて

$$B_0 \to B_1 \to B_2 \to \cdots\cdots \to B \text{ final}$$
$$H_0 \to H_1 \to H_2 \to \cdots\cdots \to H \text{ final}$$

という逐次變換を行ってゆくところに存している。

さて、t 段階の B_t から $t+1$ 段階の B_{t+1} に移るさいに、本文の規則どおり $\bar{\gamma}$ と $\bar{Y}$ の觀察によって、入れるべきヴェクトル番號(p)と拔かすべきヴェクトル番號(q)が決められたとしよう。すなわちその場合には、B_t からその第(q)列 $a_{(q)}$ および $-c_{(q)}$ が除かれ、その場所を $a_{(p)}$ および $-c_{(p)}$ が補って B_{t+1} が出來上る。この入れ替えを行列記號で表すと、計算して容易に確め得るように、(註2) B_t に右から

$$(43)\qquad D_t = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & y_{(1)(p)} & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & y_{(q)(p)} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & y_{(m)(p)} & & \\ 0 & & \gamma_{(p)} & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ (q) \end{array}$$

という行列をかけて B_{t+1} を得ること、すなわち

$$(44)\qquad B_{t+1} = B_t D_t$$

ということに他ならない。ここで D_t はその第(q)列に $y_{(1)(p)}, \cdots\cdots, y_{(q)(p)}, \cdots\cdots, y_{(m)(p)}, \gamma_{(p)}$ をもち、對角線に $1\cdots\cdots, y_{(q)(p)}, \cdots\cdots, 1$ 他の箇所にすべて 0 をもつ $(m+1)\times(m+1)$ 非特異の行列である。

ところで、これに伴って H_t の方はどういう風に H_{t+1} に移るか。これも計算してみれば、(註3) H_t に左から

$$(45)\qquad E_t = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & -\frac{y_{(1)(p)}}{y_{(q)(p)}} & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & +\frac{1}{y_{(q)(p)}} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -\frac{y_{(m)(p)}}{y_{(q)(p)}} & & \\ 0 & & -\frac{\gamma_{(p)}}{y_{(q)(p)}} & & 1 \end{array}\right] (q)$$

をかけることによって、H_{t+1} の得られることが確められる。故に $H_t \to H_{t+1}$ の計算は

$$(46)\qquad H_{t+1} = E_t H_t$$

によって與えられる。E_t は D_t と同じように、その第(q)列に、$-\frac{y_{(1)(p)}}{y_{(q)(p)}}, \cdots\cdots, +\frac{1}{y_{(q)(p)}}, \cdots\cdots, -\frac{y_{(m)(p)}}{y_{(q)(p)}}, -\frac{\gamma_{(p)}}{y_{(q)(p)}}$ をもち對角線に $1, \cdots\cdots, +\frac{1}{y_{(q)(p)}}, \cdots\cdots, 1$ 他の箇所に 0 をもつ $(m+1)\times(m+1)$ 非特異の行列である。

明かに、

$$(47)\qquad E_t = D_t^{-1}$$

であるから、(44)はまた

$$(48)\qquad B_{t+1}^{-1} = E_t B_t^{-1}$$

とも書くことができる。從つて(42)を

$$\text{(49)}\quad H=B^{-1}\left[\begin{array}{c|c} b & \bar{A} \\ \hline 0 & -\bar{c}' \end{array}\right]$$

の形に書直せば、Simplex Method の計算過程は、この兩邊に左から $E_0, E_1, E_2, \dots\dots$ を順次にかけてゆく過程であることが分る。そしてこの掛け算の續行によって H final が得られたとき、その第1列を見れば、求める x_i の極大解とそれに應ずる Z_0 の極大値とが知られるのである。

（註1）この議論については、Alex Orden, "Application of the Simplex Method to a Variety of Matrix Problems", *Symposium on Linear Inequalities and Programming*, 1951. に負うところが大きい。

（註2）この掛け算を行えば、B_{i+1} の第(q)列に $\sum a_{1(i)}y_{(i)(p)}$, ……, $\sum a_{m(i)}y_{(i)(p)}$ および $-\sum c_{(i)}y_{(i)(p)}+\gamma_{(p)}$ が入るが、それらは本文の(18)および(19)によってそれぞれ $a_{1(p)}, \dots\dots, a_{m(p)}$ および $c_{(p)}$ に他ならない。

（註3）H_i に E_i をかけると

$$\left[\begin{array}{c|ccc} x_{(1)}-\dfrac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}y_{(1)(p)} & y_{(1)1}-\dfrac{y_{(q)1}}{y_{(q)(p)}}y_{(1)(p)} & \cdots\cdots & y_{(1)n+m}-\dfrac{y_{(q)n+m}}{y_{(q)(p)}}y_{(1)(p)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}} & \dfrac{y_{(q)1}}{y_{(q)(p)}} & \cdots\cdots & \dfrac{y_{(q)n+m}}{y_{(q)(p)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{(m)}-\dfrac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}y_{(m)(p)} & y_{(m)1}-\dfrac{y_{(q)1}}{y_{(q)(p)}}y_{(1)(q)} & \cdots\cdots & y_{(m)n+m}-\dfrac{y_{(q)n+m}}{y_{(q)(p)}}y_{(1)(p)} \\ \hline Z_0-\dfrac{x_{(q)}}{y_{(q)(p)}}\gamma_{(p)} & \gamma_1-\dfrac{y_{(q)1}}{y_{(q)(p)}}\gamma_{(p)} & \cdots\cdots & \gamma_{n+m}-\dfrac{y_{(q)n+m}}{y_{(q)(p)}}\gamma_{(p)} \end{array}\right]$$

が得られる。これが H_{i+1} であることについては本文第二節九頁を見よ。

日本綿業における中小機業の地位

――地方體制の崩壞と問屋制の再編成――

青沼吉松

中小機業の現狀はわが國中小工業問題の核心をかなり典型的に表示している。これは大資本に對する中小工業の從屬という內容をもつ。從つてこれに焦點を合わせるならば、商工合體の綿業體制において織布工程の全部ではないが、その過半を分擔している中小機業の從屬的地位が注目されなくてはならぬ。

紡績業は日本工業のうちでも最も早く近代化されたものの一つであり、生產の大部分は舊紡十社といつた大企業に集中されている。東西特に大阪の綿業關係問屋はこの業種の發展に伴つて、輸出入商或は集散地卸商として近代化され、在來問屋の殼を破つて近代的商社となつた。綿業商社のうちにはわが國有力商社の多くがみられ、それらの若干は總合商社への道を進んでさえいる。これら二つの分野での資本集中化のはつきりした傾向に反して、紡績會社兼營織布工場に對する專業織布業という意味での中小機業では、中小乃至は零細業者の分散的存在が克服されていない。これらの多くは企業以下の家業的水準にある。一方における集中と他方での分散が、わが國綿業體制の特質の一つを構成している。このような跛行性を含んだ體制において、中小機業がいかなる地位を占めているか。その內容が問題となる。

今次大戰前における中小機業體制の性格は、一言でいえば、問屋制を基軸とする地方產業と規定することができる。產地問屋を軸として、各機業地は獨自性をもつた一つの纒りであつた。卽ちそれらはいまだ大資本の有機的一環に編入されていなかつた。ところが、戰後紡績會社・貿易商社等の大資本の機業地への食い込みによつて、この地方體制は崩壞し、全國的規模の綿業體制が確立された。全國的體制の支配權は大資本特に大紡績會社の掌中に握られ、かつての地方體制時代の支配者はこれの下部支配機構としてのみ存在を許容されているにすぎなくなつている。紡績資本はそれ自體としては工業的であるが、その機業地支配では、資本の商業的充用による中小機業の前期的支配といつた性格がかなり强く出ている。つまり、體制規模の擴大過程において、問屋制は再編成された型で溫存されているようだ。換言すれば、支配・從屬關係が展開される場面は變つたが、その本質は依然として繼承されているようにみえる。戰前