Title	D· デュラン著 多元回帰係数に対する同時信頼領域
Sub Title	Joint confidence regions for multiple regression coefficients, David Durand
Author	佐藤, 保
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1955
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.48, No.8 (1955. 8) ,p.630(56)- 633(59)
JaLC DOI	10.14991/001.19550801-0056
Abstract	
Notes	書評及び紹介
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19550801-0056

D・デュラン著

『多元回歸係數に對する同時信頼領域』

Joint Confidence Regions For Multiple Regression Coefficients, David Durand. National Bureau of Economic Research. Journal of the American Statistical Association, March 1954.

次第に統計學者は傳統的な信頼區間は數個のパラメーターの推定を要求する問題には嚴密に應用されないということをさとるようになってきた。多元回歸において傳統的な信頼區間は回歸係數の一つに對して正確に決定される。そして通常回歸係數の一つのみに對して決定される。しかしながら、通常統計學者は彼の係數の各々に對して正確さの尺度を欲するが、もし彼が傳統的な信頼區間の形でこれらを得るならば彼は通常あやまちを犯す。ここで我々はこの誤りの性質を議論し、そして同時信頼領域の使用による改善を議論する。

1　多元信頼判定

古典的な多元回歸において從屬變數Yは一定の分散σ^2をもって正規分布をする。σ^2は未知であり、獨立變數Xの係數である各bを求めるわけである。

(1.1)　$b_0+b_1X_1+b_2X_2+\cdots\cdots+b_kX_k$

$n>k+1$の各々一次獨立の觀察値が各Xに對して見られYに對してもそれに對應してn個の觀察値を得れば最尤推定値$\hat{b}_i\hat{\sigma}^2$を得る。そのとき信頼理論はこれらの推定値の正確性を判斷する基準を與える。k變數の回歸函數を得た後、多くの統計學者は$k+2$個の信頼判定（卽ち$k+1$個のb_iとσ^2の一個と合わせて）を欲する。しかしこの規則は一般的なものからは遠い。信頼理論は

$$c_0b_0+c_1b_1+c_2b_2+\cdots\cdots+c_kb_k$$

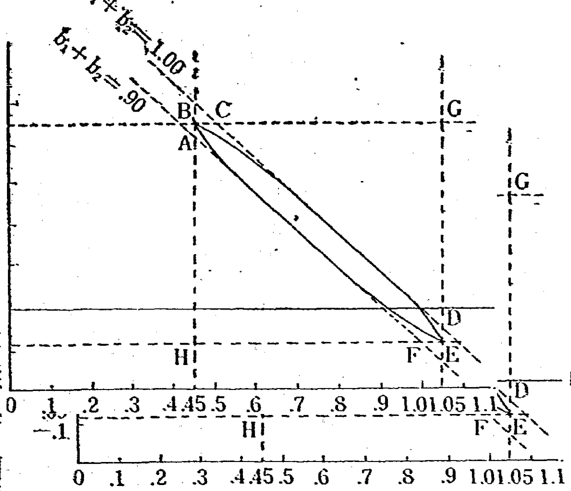
の形の一次結合に對する判定を許すので考えられうる信頼判定の數はきりがない。部分的な回歸係數に對する信頼區間の傳統的な形は

(1.2)　$$\frac{|\hat{b}_p-b_p|}{\sqrt{a^{pp}n\hat{\sigma}^2/(n-k-1)}}\leqq t_\alpha$$

（本文では$|b_p-b_p|$となっているが誤植と思われる）の關係によって決定される。ここでt_αは自由度$n-k-1$に對する 'Student' 比の$\frac{1}{2}\alpha$の正の數値、a^{pp}は行列$\|a_{ij}\|=\|\sum_{\xi=1}^{n}(X_{i\xi}-\bar{X}_{i\xi})(X_{j\xi}-\bar{X}_{j\xi})\|$の逆行列の$a_{pp}$に對應する要素である。$\alpha$がきまれば、例えば0.05、(1.2)は確率$1-\alpha$をもって眞のパラメーターの値を含む區間を決定する。しかしこれらの傳統的區間は適當に應用され解釋される時は全く正しいのだけれども、實際的な研究においてしばしばおこる二つの基礎的なあやまりと不適當性がある。第一のものはどんな信頼判定をすべきかを實驗の後できめることにある。第二のものは同水準で同時判定を含む方法の内に$1-\alpha$の水準でいくつかの個々の判定をすることにある。第一のあやまりに關して、回歸線の研究において代表として一つを選ぶ前にいくつかの方程式で實驗することが一般である。五變數をもつ回歸方程式を計算し、係數の二つが0から有意に異っていないということを發見し三變數で方程式を再計算するということがある。しかしこのような手續きは、極端な例から見られる如く偏りを導入するであろう。實驗の系列を通して眞の回歸係數がすべて0であり、そして實驗者は有意水準αで0から有意に異つた係數をもつ回歸方程式のみを示す習慣をつくっていると想像しよう。そのときもし彼がこれらの係數に對して信頼判定をつくるならば彼の正しい確率は$1-\alpha$ではなくて0である。なんとなれば彼はパラメーターの値0が信頼區間の外側にあるときのみ判定をするであろうから。傳統的な信頼區間を用いる第二の一般的あやまりは含まれる同時判定である。二變數の問題において、――第三節で示される如く――、我々は95％水準に於て次の三つの傳統的判定をつくるであろう。

(1.3)
$$-.04\leqq b_1\leqq .44$$
$$.52\leqq b_2\leqq .98$$
$$.91\leqq b_1+b_2\leqq .99$$

最初の判定は二次元パラメーター空間におけるb_2軸に平行な二つの線によってかこまれる有限の帶の中にパラメーターポイント（b_1 b_2）があることを示す。第二はb_1軸に平行な線の間の帶の中の同じ點を示す。そして第三は二つの平行な傾斜線の間の點を示す。しかし第三判定は三つの帶の交叉によってつくられる六角形の中の點を示す。そこでもし個々の判定の信頼水準が$1-\alpha=.95$であるならば同時判定の水準は論證しうるように小さい。(1.3) のような判定の集合の實際の信頼水準は一つ或いは二つの特別な場合に對して容易に得ることができる。k變數の問題ではクロスプロダクト $a_{ij}(i\neq j)=\sum_{\xi=1}^{n}(X_{i\xi}-\bar{X}_i)(X_{j\xi}-\bar{X}_j)$ がすべて0であり分散σ^2が既知である場合に容易に得られる。そのとき個々の$\hat{b}_i$の標本分布はすべて獨立であり、そしてこれらの係數のm個を含む部分集合に對する同時信頼水準はそれ故$(1-\alpha)^m$である。しかし一般的に (1.3) のような判定の同時信頼水準は容易に得られない。



第１図　(3.2)に對する95％同時信頼楕圓と副次的區間

信頼楕圓は理論的には理解されたけれども、Haavelmo による重要な計量經濟學の例證にもかかわらず實際的應用は殆どなかった。多分楕圓の非一般性は一部 Haavelmo の如き二次元の例を除いてそれをグラフで示すことが困難であることに歸せられるであろう。

2　例

一九五一年二月の一七の New York 銀行株のクロスセクション研究、從屬變數 log P は推定された回歸平面のまわりに推定分散$\hat{\sigma}^2=.0006863$をもつた。

(2.1)　$\log P=.037+.65\log C-.95\log S+.26\log D$

指數形式では

(2.2)　$P=1.09\,C^{.65}S^{-.35}D^{.26}$

この方程式に於てPは市場價格（一九五一年二月末）、Cは總資本（一〇、〇〇〇$單位、一九五〇年末）、Sは未拂い株の總數（一〇、〇〇〇單位、一九五一年二月末）、Dは總配當支拂（一〇〇$單位、一九五〇年中）。

この式を變形して

$\log C=\log C \qquad \log C/S=\log C-\log S$

$\log D/S=\log D-\log S$

(2.3)　$P=1.09\,C^{-.04}(C/S)^{.69}(D/S)^{.26}$

この變形された方程式において新しい係數ははじめの係數のすべて一次結合である。

$-.04=.65+.26-.95$

$.69=.95-.26$

分散 $\hat{\sigma}^2=.0006863$ は影響されない。更に一次變換で

(2.4)　$P/B=1.09\,B^{-.09}(D/C)^{.26}S^{-.04}$

$B=C/S$

ともかける。

3　同時信頼楕圓體

一つの從屬變數がk個の獨立變數$X_1X_2\cdots X_k$に對應するときk個の回歸係數に對する同時信頼領域は楕圓體によつて與えられる。

(3.1)　$$F_\alpha(k\ n-k-1)=\frac{(n-k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}(\hat{b}_i-b_i)(\hat{b}_j-b_j)}{kn\hat{\sigma}^2}$$

ここで$F_\alpha(k\ n-k-1)$は自由度kと$n-k-1$のF分布の上のα點である。nは觀察値の數 $a_{ij}=\sum_{\xi=1}^{n}(X_{i\xi}-\bar{X})(X_{j\xi}-\bar{X})$、$\hat{b}_i$は眞の回歸係數$b_i$の最尤推定値、$\hat{\sigma}^2$は分散$\sigma^2$の最尤推定値である。(3.1)を應用するために$\alpha$の値が選ばれる。例えば .05、そしてパラメーターポイント$b_1b_2\cdots\cdots b_k$が楕圓體の中にあるということを確率 $1-\alpha$ をもつて單一判定がつくられる。前の例を更に變形すると

(3.2)　$P=2.15(D/S)^{.20}(C/S)^{.75}$

となるが、95%楕圓は $F_{.05}(2.14)=3.739$ $\hat{\sigma}^2=.0008806$ を含む適當な數値を(3.1)に挿入することによつて得られる。グラフは第1圖で示される。嚴密にいえばこの信頼領域は二次元パラメーター空間内の點のみに適用する。即ちb_1とb_2の對の値に對してのみ適用する。かくして $\hat{b}_1=.30,\ \hat{b}_2=.65$ は楕圓内にあり許容可能である。一方 $b_1=.15$と$b_2=.70$ の組合せは外側にあり許容可能でない。しかし直ちにb_1の $-.09$ より小さい或は .49 より大きいような値に對してはすべての點が楕圓の外側にあることが注意されよう。同様にb_2の .45 より小、1.05 より大のすべての點は外側にある。かくして我々は區間として

(3.3)　$-.09\leqq b_1\leqq .49$

$.45\leqq b_2\leqq 1.05$

を得る。その各々は $1-\alpha$ をこえる信頼水準に對應する。この形の區間は信頼區間と呼ばれてきたけれどもここでは傳統的な區間から區別するために"副次區間"について考える。(3.2)におけるb_1+b_2に對する副次區間は

(3.4)　$.90\leqq b_1+b_2\leqq 1.00$

であり第1圖で示される。すべての可能な副次區間の總計はある意味で同時楕圓に等しい。結合された區間(3.3)は第1圖の矩形BGEHに對してパラメーターポイント(b_1b_2)を制限する。そしてそれは楕圓のすべてを含む。(3.3)と(3.4)の結合は更に六角形、ABCDEFに對してこの點を制限する。そしてそれは又楕圓を含む。もしこの過程が一層多くの區間を結合することによつてくり返されるならば、例えば——b_2-b_1 或いは b_2-3b_1——結果する多くの副次面は望まれるだけ密接に楕圓に接近してつくることができる。それ故にすべてのありうる副次區間の總計は $1-\alpha$ の同時信頼水準をもつ。したがつてもし人が實驗の系列をもつならば、彼はすくなくともそれらの$100(1-\alpha)$%をもつて副次區間のすべては眞のパラメーターポイントを蔽うであろうことを期待するであろう。Durandは更に4.K次元の場合の副次區間、5.同時信頼楕圓對傳統的な信頼區間へと論議を進めている。

（佐藤　保）

バーゲス・カメロン著

『生産の決定』

The determination of production.——An introduction to the study of economizing activity——

By Burgess Cameron.

本書は西歐資本主義諸國家に於いて、生産水準がどの様な經濟體系のメカニズムを通じて決定されるのであるかと云う問題を、極めて明快な筆致で纒めた好個の入門書である。全體的に見て著者は、經濟體系の均衡した場合の中で生産活動を分析する爲の最も基本的（初歩的）な説明に多大の苦心を拂つている様に見受けられるので、各章を通じて理論的立場からのより嚴密な分析を回避し、常に問題を概觀することに止まつているのであるが、しかも近代經濟學の最近に至る迄の諸理論の本質を見逃していない。特に最近、最も野心的な經濟分析と見做されて華々しく登場したレオンチェフ體系の理論的基盤である、經濟體系の一般相互依存關係の分析（theory of general interdependency）を、傳統的な經濟理論、特に經濟の總體變量間の關係を問題にするケインジアン的手法との關聯から論じて、兩者の綜合的立場から社會の生産水準及び諸財の價格の決定機構を考察しようと試みている點に最大の興味があると思われる。

以下最初に本書の構成を概觀し、第二に本書の中心的論議と思われる部分をカメロンの所説に從つて略述し、最後に本書に對する若干の批判と疑問の點を述べたいと思う。

冒頭に於いてカメロンは本書の二つの目的を明らかにし、一つは生産體系の活動樣式に考察の重點を置くこと、二つは若し正しい資料が得られるならば、實際の生産體系の動きを再現し得る様な模型を構成する事であると述べる。次いで序説に於いては、生産を決定する分析方法に三種の立場が考えられることを述べ、第一は總體的な關係として社會生産物と勞働雇用量の關係に於ける需要と供給が