Title	投入産出分析（三）：動学的レオンティエフ体系
Sub Title	Input-output analysis (3) : the dynamic system
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1955
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.48, No.8 (1955. 8) ,p.587(13)- 595(21)
JaLC DOI	10.14991/001.19550801-0013
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19550801-0013

資本過剰の經濟では餘剰の資金をいかにして運轉するかに主眼點がおかれ需要面の分析たる投資函數の理論が重視される。資本不足の社會では資本の供給にこそ重點をおくべきであり、貯蓄函數の研究こそ問題の要である。生産力の發展が未熟な時代には「供給はそれ自らの需要を創造する」とする販路法則の命題が信奉され、供給面の分析に重點がおかれ生産費價値説が支配的であつた。需要面の分析が重視され效用價値學説が生れるに至つたのは、生産力の發展によつて過剰生産の可能性が高まつてきた十九世紀後半であつた。われわれは經濟學の歴史性を認めざるを得ない。貯蓄された貨幣が凡て投資されそのために經濟發展が起るとするのはハイエクの理論である。前述のスタインドルやカレッキーの理論にもこの色彩はあるが、これ等の理論は投資を一本化して取扱つており消費財から遠い段階に投資するか、近い段階に投資するかと云う問題を取扱えない。この考え方はウイーン學派特有のものである。それでは何故に日本經濟においても過剰生産現象が見られるのであろうか。それは信用創造がしかも政府による信用創造が、絶えず行われているためである。信用創造を制止する主たる要因はインフレによる國際收支の悪化のみである。民間の信用創造ならば利子率の騰貴によつて限界が生れるが政府投資にはこの制約がない。ドッヂラインや昭和二十八年末からのデフレ政策は全く貿易面の理由から生じたものである。このため過剰生産現象が生じたのである。これが一般的遊休設備の發生を促すならば、極めて限られた局面において有效需要の原理が妥當すると云い得ないこともない。しかし現象面における部分的相似のみをとり上げて「一般理論」の存在を主張し得るであろうか。しかも成長率理論はケインズのそれとは異なり長期理論である。われわれはより良く日本經濟の實態を分析できるウイーン學派の理論を知つているのにあくまでケインジァンのそれに執着すべき理由を知らない。

計量化に重點をおく人々はハイエク理論は計量化が困難であるから政策に使用できぬと非難する。この計量化困難の理由の一部は統計資料の缺如にあり實務家の努力によつて解決さるべきもので、この理由で理論を非難するのは見當違いである。他の一部はハイエク理論の中にその理由がある。確かにハイエク理論をそのままの形で計量化することには困難が伴う。けれどもワルラス流の一般均衡論も初期には計量化は困難であると信ぜられ、ムーアは理論的には一般均衡論を認めながらも需要曲線を導出する際には、一般均衡方程式をそのまま導入せず、修正した形でとり入れた。今日、一般均衡論者はレオンチェフ體系によつてその計量化に成功したと信じている。しかし計量技術の上にも多くの困難があることは前に指摘した通りである。多くの缺點を含むレオンチェフ體系によつて一般均衡の計量化に一應の成功を收めたことになるならば、この程度の計量化は資料さえ整えばハイエク體系についても可能となる日が來るであろう。しかもこの計量化に成功した曉には因果關係を明瞭にし、資本不足の社會の經濟發展法則を解く計量經濟學が生れることになるのである。われわれは現在ムーアが一般均衡方程式の計量化に苦心した頃とハイエク理論に關して類似の狀態に立つているのである。第一になすべきことは統計資料の有無ではなく、ウイーン學派理論の數式化と、これに缺けている微視的經濟理論の樹立である。そしてアグレゲーションの過程において今まで全く技術的觀點からのみ論ぜられていた所得分布の法則に經濟學的意味を與えることである。

投入産出分析（三）

——動學的レオンティエフ體系——

福岡正夫

一、實物量の動學體系
二、價格の動學體系
三、若干の結論

一、實物量の動學體系

レオンティエフ體系の「動學化」は、資本ストックや加速度係數の導入によつて行われる。(註1) 前稿までのレオンティエフ體系では、各産業の生産物はすべて再生産のために消耗されるか、あるいは最終的に消費されると考えられているから、その生産物の一部が資本ストックへの純附加分として殘される事實が考慮されていない。そこで、そのような事實を斟酌するとして、第 i 財のストックの增加率を $\dot{K}_i$ と記せば、各生産物の配分の式は

(1)　$X_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+\dot{K}_i+C_i$　$(i=1,2,\cdots,n)$

と書かれることになる。言うまでもなく、$\dot{K}_i$ は K_i の時間に關する導函數であり、・（ドット）のつかない K_i はその體系の保有する第 i 資本ストック全量を指している。その内譯として各産業が各個に保有する數量をそれぞれ k_{i1}、k_{i2}、…、k_{in} とすれば、K_i についても

(2)　$K_i=\sum_{j=1}^{n}k_{ij}$　$(i_n=1,2,\cdots,n)$

という配分の式が成立する。次に x_{ij} と X_j との間の固定的生産係數の想定 $x_{ij}=a_{ij}X_j$ になぞらえて、k_{ij} と X_j との間にも固定的な資本係數

(3)　$k_{ij}=b_{ij}X_j$　$(i,j=1,2,\cdots,n)$

の關係を假定しよう。この關係がいかなる時點においても充されるとすれば、それから $\dot{k}_{ij}=b_{ij}\dot{X}_j$ が導かれ、第 j 生産物を $\dot{X}_j$ の率で增加させるとき $\dot{k}_{ij}$ だけの第 i 資本財の增加が必要なことを表すから、それは n 種の生産物の體系に加速度原理を適用するにひとしい。この關係を(1)に代入して、結局

(4)　$X_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\dot{X}_j+C_i$　$(i=1,2,\cdots,n)$

あるいは簡單にマトリックス記號で

(4)　$(I-a)X=b\dot{X}+C$

という體系を得る。これが實物量の動學的レオンティエフ體系である。以下では考察を簡便にするため、一應消費の項を取除いて、謂うところの閉じた體系を考えることにする。すなわち、

(5)　$(I-a)X=b\dot{X}$　あるいは　$\dot{X}=b^{-1}(I-a)X$

がわれわれの考察する動學體系である（これは一變數の場合のハロッド＝ドーマー成長方程式にあたる）。前稿までに考察した靜學體系が(4)や(5)のスペシアル・ケースであることは明かである。すなわちどの産業も資本ストックを用いないとすれば、bはすべてゼロとなり、單なる $(I-a)X=C$ または $(I-a)X=0$ が得られることになる。

(5)は常數係數をもつ線形一階の連立微分方程式であるから、その解は、よく知られているように（そして代入して容易に確かめ得るように）、次の形で示される。すなわち、マトリックス記號で

(6)　$X(t)=Ve^{\rho t}c=Ve^{\rho t}V^{-1}X(0)$

である。ここでVはその各列に $b^{-1}(I-a)$ の固有ヴェクトルをもつ $n\times n$ のマトリックスである。固有根の對角マトリックスを單に ρ で表わせば、定義によって $b^{-1}(I-a)V=V\rho$ であり、Vは非特異であるから $V^{-1}b^{-1}(I-a)=\rho V^{-1}$、依つて V^{-1} の各行は同じく $b^{-1}(I-a)$ の左の固有ヴェクトルから成る。$e^{\rho t}$ はn個の $e^{\rho_i t}$ を對角線とする對角マトリックス、X(0) は言うまでもなくXの初期値のヴェクトルである。[註2] (6)の敍述する運動が、多くの動學體系の運動とは異つて、均衡からの乖離の生ずる反應過程ではなく、むしろ動的均衡の徑路そのものを表していることには注意すべきであろう。これは體系(5)のそもそもの本質から由來する。すなわち、それはいかなる時點においても産出量と資本ストックとの間に適切な固定的關係が充されつづけることを要求しており、その意味において、資本ストックの過剩や過少に對して、體系がどう反應するかを規定する要素は始めから含んでいないのである。

さてこの體系には、バランスのとれた成長解が必ず一つ存在することを證明しよう。まず、われわれの(5)のマトリックス $b^{-1}(I-a)$ は、$(I-a)^{-1}b$ の逆マトリックスである。しかるに、前稿で述べたように、正常の條件の下では $(I-a)^{-1}$ は非負であり、さらに a が分解不可能ならばそれは正である。そして、bもまたその性質上非負であるから、$(I-a)^{-1}b$ は非負であるか正である。非負の場合にも、體系の連結が緊密ならば、それは分解不可能と看做されてよいであろう。それ故、フロベニウスの定理（前項定理一）によつて、$(I-a)^{-1}b$ の根の中には絶對値の最大な正根が一つあり、それに伴つてすべて正の因子をもつ固有ヴェクトルが一つ存在する。その根を λ_*、固有ヴェクトルを v_* とする。ところで、われわれの本來のマトリックス $b^{-1}(I-a)$ は $(I-a)^{-1}b$ の逆マトリックスなのであるから、この λ_* の逆數 $1/\lambda_*$ を ρ_* とすれば、ρ_* は $b^{-1}(I-a)$ の根である。故に、われわれのマトリックスも一つの正根をもつ。さらに、$(I-a)^{-1}bv_*=\lambda_* v_*$ が成立てば $b^{-1}(I-a)v_*=\rho_* v_*$ が成立つから、ρ_* に對應する固有ヴェクトルは λ_* に對應するそれと同じものである。從つて、ρ_* の固有ヴェクトルはすべて正の因子から成る。かくしてわれわれは次のように言うことができる。すなわち、もしも v_* に比例する初期條件がたまたま選ばれ、ρ_* を體系の成長率たらしめたとすれば、體系の運動はその與えられた部分相互間の比例を不變に保ちながら、ρ_* の率で整齊に成長してゆく。その意味において、ρ_* は動學的レオンティエフ體系の《Balanced Rate of Growth》である。そのような成長解は、レオンティエフ體系に必ず一つは存在し、しかもただ一つしか存在しない。

いま假りに各産業がそれぞれ相異る成長率で成長していると考えて、その中で一番遲い成長率をμで示すと、μより速い率で成長する産業はその産出量を何らかの仕方で處分してμの率に歩調をあわせ得ると考えられるから、體系全體がそろつて成長し得るための成長率は一應μであると考えることができる。さて、この $\dot{X}\geqq\mu X$ に $\dot{X}=b^{-1}(I-a)X$ を代入して變形すると、$\frac{1}{\mu}X\geqq(I-a)^{-1}bX$ が得られる。そこで $(I-a)^{-1}b$ の因子を $\frac{1}{\mu}X=(I-\tilde{a})^{-1}\tilde{b}X$ という等式が成立つところまで適當に大きくしてみると、そのときには $1/\mu$ は $(I-\tilde{a})^{-1}\tilde{b}$ の固有根であり、Xはその固有ヴェクトルである。そうして $(I-\tilde{a})^{-1}\tilde{b}\geqq(I-a)^{-1}b$ であるから、前稿の定理一によつて $\frac{1}{\mu}\geqq\lambda_*$、從つて $\mu\leqq\rho_*$ である。それ故、われわれは、各産業がチグハグに成長しているときの一番小さい成長率よりは、各産業がバランスをとつて成長しているときのその均一の成長率の方が大きいと結論することができる。つまり、チグハグの成長率の中には無論《Balanced Rate of Growth》より大きいものがあるかもしれないが、それらの足並みをそろえさせるには最も遲い成長率に歩調を合わせざるを得ないから、その意味において各産業が同一歩調で進展し得る成長率の中では《Balanced Rate of Growth》が極大であると言えるのである。[註3]

以上われわれは動學的レオンティエフ體系におけるバランスのとれた成長解の存在とその性質について考察した。次に吟味すべき問題は當然そのような成長解が安定であるかどうかであるが、これに對しては、直ちに、そういう安定性は保證され得ないと言える。何故なら、λ_* は $(I-a)^{-1}b$ の絶對値の最大な正根であるけれども、われわれの $b^{-1}(I-a)$ の正根たる ρ_* は、その逆數であつて、從つて絶對値最大の性質は失われるからである。それ故、バランスのとれた成長解から僅かでも乖離するとき、體系の運動がますますそれから遠ざかる發散運動の形をとることは決して一概に排除できないのである。

ただ發散運動の場合には、(5)のままの體系が、やがて何らかの變則にぶつからざるを得ないことは確かである。例えば、いずれかの産出量が、早晩増から減に轉ずるときが來るであろう。われわれのモデルが妥當するかぎり、$k_{ij}=b_{ij}X_j$ であるから、その産出量に該當する資本ストックは減少することを餘儀なくされる。しかるに、非線形の景氣論が强調しているように、加速度原理は非對稱的であつて、下降過程には妥當しない。從つて、何らかの形で過剩能力の發生を考慮に入れることが必要となるであろう。言換えれば、(5)の形におけるレオンティエフ體系はそのままではあてはまらなくなる。この種の非對稱性ないしは非可逆性をいかに解決するかは、動學的レオンティエフ體系に殘された重要な問題である。

註(1)　以下の動學體系については、Wassily Leontief, "Dynamic Analysis", *Studies in the Structure of the American Economy, Theoretical and Empirical Explorations in Input-Output Analysis*, 1953, Chapter III 參照。

（2）　ここでは單純化のため重根のない場合を取扱う。ヨリ一般的に重根の存在を認めることは、原理上は容易であるが、記號上煩雜である。

（3）　P. A. Samuelson, *Dynamic Aspect of Linear Models of Production: Generalized Leontief Systems*, (unpublished paper), p. 15, footnote. 簡略なサムエルソン教授の説明を本文に述べたように解釋するには、私はボストンの通りを歩きながら古谷助教授に啓發された思い出をもつている。

二、價格の動學體系

この問題をさらに追及することは別稿に譲るとして、次に價格の動學體系を考えよう。以上の實物量の動學體系に對應する價格の動學體系とはいかなるものであろうか。前稿や前々稿で取扱われた古い價格の體系が用をなさないことは明かである。何故なら、資本ストックへの投資を含む體系では、均衡價格は當然可變費用以上のものをカバーしなければならないからである。

この點についてこれまでに立入つた考察を行つた學者は必ずしも多くない。その少い企圖の一つは、元來他の問題をねらつたジョルジェスク・レーゲンの論文の一部に含まれている。(註1) ジョルジェスクは、それぞれの財の均衡價格が、その可變費用の他に用いられている資本ストックへの利子支拂額をカバーするような定式化を行つた。前節の記號に從うならば、第j財がX_j量生産されると第i財の$b_{ij}X_j$量のストックを必要とし、從つてそのストックの價値額は$b_{ij}X_jP_i$である。そこでこれを$i=1,2,\dots,n$に亙つて足し合わせると、第j財のX_j量の生産には全部で$b_{1j}X_jP_1+b_{2j}X_jP_2+\dots+b_{nj}X_jP_n=(b_{1j}P_1+b_{2j}P_2+\dots+b_{nj}P_n)X_j$の價値の資本ストックが用いられることになり、故に第j財一單位に要する資本の額は$b_{1j}P_1+b_{2j}P_2+\dots+b_{nj}P_n$である。いま利子率（われわれの體系は微分法的に構成されているから、これはあらゆる時點について連續的な瞬間利子率である）をrとすれば、この資本額に對して支拂われる利子額は$r(b_{1j}P_1+b_{2j}P_2+\dots+b_{nj}P_n)$、依つて均衡價格が可變費用プラス利子額をカバーするとすれば、價格の式は

$$(7)\qquad P_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}P_i+r\sum_{i=1}^{n}b_{ij}P_i\qquad (j=1,2,\dots,n)$$

あるいはマトリックス記號で

$$(7')\qquad (I-a)'P-rb'P=0$$

である。これがジョルジェスクの行つた定式化である。

さて、この理論が動學的な物量體系に對應する價格體系であるとすれば、驚くべき事實は、それが少しも動學的でないということである。容易に分るように、rは$b^{-1}(I-a)'$の固有根、Pは固有ヴェクトルと考えられるから、前節の議論と同じように、われわれのマトリックスの性質から、ユニークな正の利子率が存在し、かつそれには同じくユニークな正の（相對）價格が對應する。これが(7)のただ一つの經濟的に意味のある解である。すなわち、(7)はそのそもそもの假定からして、不變の利子率と不變の價格をしか生まないのである。

それ故、われわれは、動學的という觀點から一層滿足のゆく價格體系を樹立しなければならない。この方向に一歩を進めたのはソロウである。(註2) いましばらく彼に從つて、次のように考えよう。第j財一單位をつくるのには、さきに述べたように$b_{1j}P_1+b_{2j}P_2+\dots+b_{nj}P_n$の資本ストック額が要る。そこで稍々見方を變えて、$b_{1j},\dots,b_{nj}$という資本ストック（その價値は言うまでもなく$b_{1j}P_1+b_{2j}P_2+\dots+b_{nj}P_n$である）がいま誰かに所有されていると考えると、それだけの資本ストックの所有からは一單位時間あたり一單位の第j財が無限の將來に亙つて産出されつづけると考えることができる。ところで、それには種々の可變費用を要するから、そのような生産から得られる純所得の流れは、販賣價格マイナス可變費用すなわち$P_j-(a_{1j}P_1+a_{2j}P_2+\dots+a_{nj}P_n)$である。從つて、價格や利子率をはつきりと時間の函數$P_i(t),r(t)$と看做して、t時點より後のs時點に稼得される純所得のt時點における現在價値を求めると

$$\left\{P_j(s)-\sum_{i=1}^{n}a_{ij}P_i(s)\right\}e^{-\int_t^s r(u)du}$$

である。言うまでもなく、ここで$e^{-\int_t^s r(u)du}$は割引因子である（利子率が時間についてコンスタントならば、それは$e^{-r(s-t)}$となる）。さて、資本ストックの價値は、均衡においては、それの生み出す純所得の流れの現在價値に等しくなければならないから、われわれは以上の關係から

$$\sum_{i=1}^{n}b_{ij}P_i(t)=\int_t^{\infty}\left\{P_j(s)-\sum_{i=1}^{n}a_{ij}P_i(s)\right\}e^{-\int_t^s r(u)du}ds$$

を得る。この式は各時點についてあてはまるから、われわれはその兩邊をtについて微分することができる。その結果得られる

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n}b_{ij}\dot{P}_i=-\left\{P_j-\sum_{i=1}^{n}a_{ij}P_i\right\}+r(t)\sum_{i=1}^{n}b_{ij}P_i\quad (j=1,2,\dots,n)$$

あるいはマトリックス記號で

$$(8')\qquad b'\dot{P}=rb'P-(I-a)'P$$

が、われわれの求める動學的價格體系である。(8)の方程式は次のような經濟的意味をもつている。すなわち、各産業の利潤額$\{P_j-\sum a_{ij}P_i\}$と資本資産の値上り額$\sum b_{ij}\dot{P}_i$が、丁度その資本資産の現在價値に基く利子支拂額$r(t)\sum b_{ij}P_i$に見合わなくてはならない。あるいは同じことであるが、それを

$$\left\{\frac{P_j-\sum a_{ij}P_i}{\sum b_{ij}P_i}\right\}+\left\{\frac{\sum b_{ij}\dot{P}_i}{\sum b_{ij}P_i}\right\}=r(t)\qquad (j=1,2,\dots,n)$$

と書きかえれば、利潤率プラス資産値上り率イコール市場利子率という周知の資本理論の命題が導かれる。(註3)

靜學的な價格體系およびジョルジェスクの價格體系がそれぞれ(8)のスペシアル・ケースであることは、物量體系の場合と同様、容易に分る。すなわち、生産に資本ストックが全く用いられなければ、bはすべてゼロとなり、(8)は靜學體系$(I-a)'P=0$に歸する。ま

た價格が定常均衡の水準に保たれるとすれば、$\dot{P}=0$ となり、(8)はジョルジェスクの體系(7)となる。さきに述べたように、(7)にはそのような解が存するから、それは(8)の定常均衡狀態を表わすものと考えられる。

　さて、(8)は $n+1$ 個の未知函數——n 個の價格と一個の利子率——をもつ n 個の線形一階の連立微分方程式である。從って、それは未知函數すべてを解くのに充分ではないが、一應利子率を時間の既知函數と看做して、n 個の價格を利子率のタームで解くことは可能である。記號の簡便化のため $I-\alpha=A$ とおけば、その場合の解はマトリックス記號で

(9)　$$P(t)=e^{\int_0^t r(s)ds}(V'A')^{-1}e^{-\rho t}(V'A')P(0)$$

の形で示される。ここで $(V'A')^{-1}$ はその各列に $b^{-1'}(I-\alpha)'$ の固有ヴェクトルをもつ $n\times n$ のマトリックスであり、從って $(V'A')$ の各行は同じく $b^{-1'}(I-\alpha)'$ の左の固有ヴェクトルから成っている。$e^{-\rho t}$ は $e^{-\rho_i t}$ の對角マトリックス、$P(0)$ はPの初期値のヴェクトルである。[註4] これが求める解であることは代入して計算すれば確められる。この解の漸近性如何の檢討は、利子率の動きについて何らかのことが判明するまで俟たなければならないが、さしあたり利子率が正であれば、$e^{\int_0^t r(s)ds}$ は增加函數である。$e^{\rho t}$ の部分は(9)には逆の形すなわち $e^{-\rho t}$ の形で含まれているから、從って ρ のすべてが正の實部をもつ場合にのみ、價格は(7)の規定する定常均衡水準に接近できると考えられる。

　物量體系(5)と價格體系(8)との間には、次のような興味ある對應關係が存在する。まず(5)にバランスのとれた成長解のあることは、すでに前節で説明ずみであるが、いまその關係 $\dot{X}=\rho_* X$ を(5)に持込めば

(5)*　$$(I-\alpha)X-\rho_* bX=0$$

が得られる。他方、これもまたさきに述べたように、(8)の定常均衡狀態を表すものとしてわれわれはジョルジェスクの體系

(7)　$$(I-\alpha)'P-rb'P=0$$

をもっている。これら(5)*と(7)とが相互に《dual》の關係にあることは一目瞭然である。それ故、われわれは次のように言うことができる。ジョルジェスクの體系が規定する價格の定常均衡は、實物量の體系の產出量の成長均衡に對應し、その場合の前者の均衡利子率は後者の均衡成長率に一致する。すなわち、不變の價格の下で一樣に產出量の成長する經濟では、それぞれの財は自らおよび他の財を將來に亙って一定の比率で增殖してゆく潛在力をもち、利子率がそのような增殖率に對應するのである。

註(1) N. Georgescu-Roegen, "Relaxation Phenomena in Linear Dynamic Model", *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951, Chapter V, p. 125.

(2) R. Solow, "Interest and Prices in Dynamical Input-Output Models", Harvard Economic Research Project (unpublished paper).

(3) P. A. Samuelson, "Some Aspects of the Pure Theory of Capital", *Quarterly Journal of Economics*, May 1937, pp. 485-6.

(4) $b^{-1'}(I-\alpha)'$ は $b^{-1}(I-\alpha)$ の轉置マトリックスではないが、$\{b^{-1'}(I-\alpha)'\}v=\rho v$ ならば $\{(I-\alpha)'b^{-1'}\}(I-\alpha)'v=\rho(I-\alpha)'v$ であるから、$b^{-1'}(I-\alpha)'$ と $(I-\alpha)'b^{-1'}$ とは同じ固有根をもつ。しかるに $(I-\alpha)'b^{-1'}$ は $b^{-1}(I-\alpha)$ の轉置マトリックスであるから、それらは同じ固有根をもつ。故に、われわれは $b^{-1'}(I-\alpha)'$ と $b^{-1}(I-\alpha)$ とが同じ固有根をもつと結論できる。

　次に、$\{b^{-1}(I-\alpha)\}v=\rho v$ ならば $v'(I-\alpha)'\{b^{-1'}(I-\alpha)'\}=\rho v'(I-\alpha)'$ であるから、v が $b^{-1}(I-\alpha)$ の右の固有ヴェクトルならば、$v'(I-\alpha)'$ は同じ固有根について $b^{-1'}(I-\alpha)'$ の左の固有ヴェクトルである。從って、後者から成るマトリックスは $V'(I-\alpha)'=V'A'$ で示され、右の固有ヴェクトルから成るマトリックスは $(V'A')^{-1}$ で示される。

　以上の知識の下で(8)を解くために、$P=(V'A')^{-1}Q$ および $\dot{P}=(V'A')^{-1}\dot{Q}$ で定義される新しいヴェクトル變數Qを導入すれば、(8)は簡單に

$$\dot{Q}=r(t)Q-\rho Q$$

となる。故に、その解は

$$Q(t)=e^{\int_0^t r(s)ds}e^{-\rho t}Q(0)$$

と書かれる。このQをふたたびもとのPに戻せば、本文の(9)に示された解が得られることになる。

三、若干の結論

　產出量の解(6)と價格の解(9)との間の一つの相違は、後者が $e^{\int_0^t r(s)ds}$ という因子をもっていることである。これは一つの蓄積因子であって、その意味するところは、0時點の投資額が t 時點においては $e^{\int_0^t r(s)ds}$ 倍に增殖するということである。從って、いま(9)の兩邊をこの因子で割っておけば、それは將來價格の現在價値の運動を表わすことになる。次に(6)と(9)のもう一つの相違は、前者の $e^{\rho t}$ のあるところに、後者は $e^{-\rho t}$ をもっていることである。このことから價格と產出量との間には、互に反對の方向に動く傾向のあることが窺われる。事實(6)と(9)とから、われわれは精確に

(10)　$$e^{-\int_0^t r(s)ds}P(t)'(I-\alpha)X(t)=P(0)'(I-\alpha)X(0)$$

という關係を導くことができる((6)に左から $(I-\alpha)$ をかけ、(9)を轉置したものにそれを右からかければ容易に(10)が得られる)。すなわち、純國民生產物の現在價値は決してその初期値から乖離することはない。產出量や價格がどう變化しても、それらは互に相殺されて、初期時點まで割引かれた純國民生產物の價値をつねに一定不變に保ってゆく。これは動學的レオンティエフ體系の示すひとつの興味ある性質と言うべきである。

　さらに(10)から、次のような命題が派生する。いまその兩邊の對數をとって微分すれば

$$-r(t)+\frac{d}{dt}\log P'(I-\alpha)X=0$$

故に

(11)　$$r(t)=\frac{\frac{d}{dt}P'(I-\alpha)X}{P'(I-\alpha)X}$$

すなわち、利子率はいかなる時點においても純國民生産物の價値の相對的變化率に等しい。

次に(8)を轉置して右からXをかけることによつて $\dot{P}'bX+P'(I-a)X=rP'bX$。また同様に(5)から $P'(I-a)X=P'b\dot{X}$。故に後者を前者の左邊第二項に代入して $\dot{P}'bX+P'b\dot{X}=rP'bX$。この式の左邊は $P'bX$ を時間について徼分したものであるから、結局

(12)　$r(t)=\dfrac{\frac{d}{dt}P'bX}{P'bX}$

と結論できる。すなわち、利子率はいかなる時點においても資本ストックの價値の相對的變化率に等しい。

(11)と(12)を組合せることによつて、次のような瞠目すべき結論が生ずる。すなわち、動學的レオンティエフ體系においては、純國民生産物の資本ストックに對する比はつねに一定である。われわれは(10)とアナロガスに、資本ストックについても

(13)　$e^{-\int_0^t r(s)ds}P(t)'bX(t)=P(0)'bX(0)$

という關係を導き出せるから、上の結論は

(14)　$\dfrac{P(t)'(I-a)X(t)}{P(t)'bX(t)}=\dfrac{P(0)'(I-a)X(0)}{P(0)'bX(0)}$

すなわち、純國民生産物と資本ストックとの比が、個々の産出量や價格の變化にはかかわりなく、それらの初期時點の比に支配されることを示している。

さきに述べたように、(8)は《complete》な體系ではなく、利子率の運動を決定すべき條件を缺いている。それ故、われわれはここで利子率を時間の既知函數と看做すことをやめて、必要とされる條件を考察すべきである。體系の精神からして、導入されるべきその條件は、「貨幣的」なものでなく、「實物的」なものでなければならないように思われる。利率決定のそのような實物的機構として、まず候補にあがるのは、貯蓄＝投資の條件であろう。では、われわれの體系において、貯蓄と投資とは何であろうか。いま想定されているような閉じた體系では、家計の演ずる唯一の機能は資本ストックの所有であり、従つてそれの受取る所得は利子所得のみである。體系が閉じているという事實によつて、消費は勞働用役生産のための投入物と看做され、所得の中には含まれない。それ故、利子所得 $r(t)P'X$ が同時に貯蓄でもある。他方、新投資は言うまでもなく $P'b\dot{X}$ であり、これは(5)によつて $P'(I-a)X$ に等しい。故に、利子率を決めるべき貯蓄＝投資の均衡條件は

(15)　$r(t)P'bX=P'(I-a)X$

である。

このような定式化から、全く思いがけない結論が生ずる。(14)を考慮すれば、(15)から

(16)　$r(t)=\dfrac{P'(I-a)X}{P'bX}=\dfrac{P(0)'(I-a)X(0)}{P(0)'bX(0)}$

すなわち、動學的レオンティエフ體系においては、利子率は産出量と價格の初期値によつて恣意的に定められ、そのようなものとして時間を通じて不變である。

(16)の前半を(8)に代入すれば

(17)　$\dot{P}'bX=0$

が得られる。すなわち、資本ストックの總價値は、實物的な新投資なしには決して上昇しない。單なる價格の騰落は全體としてみれば必ず相互に相殺される（價格が不變にとどまるというジョルジェスクの體系では、この條件は自働的に充たされる。その場合には(5)*あるいは(7)から、たちどころに(16)が導かれる）。

不變利子率というむしろ驚くべきこの結論は、動學的レオンティエフ體系のもつ固定性の、もう一面からする現われであるように思われる。つまり、この體系では、規定された均衡關係から乖離できる自由が殆ど許されないので、利子率の調節作用に援助を仰ぐ必要がないのである。それ故に、初期に與えられた利子率は變化することなくそのまま持續する。われわれはさきに純國民生産物と資本ストックとの初期の比がそれらの將來の歴史に重要な影響を與えることと、従つて初期條件の選定には配慮を要することなどを知つたが、利子率についてもこのことは眞である。初期の利子率は初期の産出量や價格と矛盾しないように選ばれなければならない。すなわち

$r(0)=\dfrac{P(0)'(I-a)X(0)}{P(0)'bX(0)}$

でなければならない。もしこの條件が充されなければ體系は均衡から逸脱し、均衡運動のみを敍述する動學的レオンティエフ體系によつては何ら解明されることのない狀態が發生する。

*　*　*

最後に、以上の結果を利用しながら、價格の定常解が安定であるかどうかを吟味して稿を閉じよう。さきの議論から利子率は不變であるから、われわれはまず解(9)の中の $e^{\int_0^t r(s)ds}$ を e^{rt} と書換えることができ、従つて e の項はまとめて $e^{(r-\rho)t}$ の形で記される。故に、價格の定常解が安定であるためには、その均衡相對價格を表す問題の固有ヴェクトルに應ずる根 ρ^* は r に等しくなければならず、他の根はすべて r よりも大きな實部をもたなければならない。このことから、まず第一に、價格の定常解の安定と産出量の成長解の安定とは決して兩立しないことが分る。何故なら、後者が安定であるためには、いま r に等しくなければならぬと言われたその問題の根 ρ^* がドミナントでなければならず、従つて他の根はすべてそれよりも小さな實部をもたなければならないからである。第二に、價格の定常解の安定は極めてあり得べからざることであることが分る。利率の大いさは、さきに述べたように、産出量と價格の初期値に依存するから、本質的には恣意的である。このように恣意的に與えられる利子率が、體系固有の性質から定まる固有根との間に丁度要求されるような關係を滿足することは、奇蹟的とは言わないまでも、極めて偶然的と言わなければならないであろう。それ故、價格の定常解が不安定である確率は、産出量の成長解の場合よりもむしろはるかに大であるように思われる。

（完）