慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	投入産出分析（二）：逐次解法その他
Sub Title	Input-output analysis (2) : computation and stability
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1955
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.48, No.7 (1955. 7) ,p.532(34)- 542(44)
JaLC DOI	10.14991/001.19550701-0034
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19550701-0034

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

投入産出分析 (二)

——逐次解法その他——

福岡正夫

一、二つの解法
　消去法
　逐次近似法
二、a_{ij}の「トポロジイ」
　分解可能性と分解不可能性
　循環性と非循環性
三、レオンティエフ體系の代數學
　諸定理
　正解の條件
　安定の條件
　對應原理の若干例

一、二つの解法

記憶を新にするため、レオンティエフの基本的體系をいま一度掲げよう。それは、實物量の體系については、

$$(1-a_{11})X_1-a_{12}X_2-\cdots\cdots-a_{1n}X_n=C_1$$
$$-a_{21}X_1+(1-a_{22})X_2-\cdots\cdots-a_{2n}X_n=C_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-a_{n1}X_1-a_{n2}X_2-\cdots\cdots+(1-a_{nn})X_n=C_n$$

であり、價格の體系については、

$$(1-a_{11})P_1-a_{21}P_2-\cdots\cdots-a_{n1}P_n=a_{01}$$
$$-a_{12}P_2+(1-a_{22})P_2-\cdots\cdots-a_{n2}P_n=a_{02}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-a_{1n}P_n-a_{2n}P_n-\cdots\cdots+(1-a_{nn})P_n=a_{0n}$$

である。ここで繰返すまでもなく、X_iは第i財の産出量、P_iはその價格、C_iはその最終消費量、a_{ij}は第j財一單位當りの直接勞働費用である。さてこれらからX_iおよびP_iの解を求めるには、いろいろの方法が利用できるが、なかんずく最も初歩的なのは、通常、消去法もしくは代入法と呼ばれている解法であろう（これはしばしばガウス＝ドゥリットル法とも呼ばれる）。その要領は甚だ簡單であつて、高等學校の生徒にもよく知られているところである。まず(1)について例示すれば、

はじめ例えばその最後の方程式すなわち第n番目の方程式を用いて、X_nを他の$n-1$個の變數で表し、それを殘りの$n-1$個の方程式に代入して、それらからX_nが消去される。次に第$(n-1)$番目の方程式を用いて、同樣に殘りの$n-2$個の方程式からX_{n-1}が消去され、以下順次にこの手續を繰返していつて、遂に最後にX_1だけが殘り、その値が決定される。一旦X_1が定まれば、今度は逆にそれからX_2が求められ、次にX_1、X_2からX_3が求められ、以下同樣にして、遂にX_1、X_2、……X_{n-1}からX_nが求められる。通常、連立方程式を「同時に」解くというのは、このような操作を指して言うのである。(註1)

しかし、右の解法に依らなくても、レオンティエフ體系の場合は次のような仕方で逐一、解に近似することができる。いまそれを說明するため、記號の煩雜を避けて、マトリックス記號を用いれば、われわれの體系は簡單に

$$(1)\quad (I-a)X=C$$
$$(2)\quad P(I-a)=a_0'$$

と略記される。そこで乘數系列 $1+\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots$ が一定の條件の下で $(1-\gamma)^{-1}$ に收斂するという周知の思想を、マトリックスaの乘數系列 $I+a+a^2+\cdots\cdots$ に適用するとすれば、まず數量 X については

$$(3)\quad X=(I-a)^{-1}C=(I+a+a^2+\cdots\cdots)C$$
$$=C+aC+a^2C+\cdots\cdots$$

という系列が得られ、價格Pについては

$$(4)\quad P=a_0'(I-a)^{-1}=a_0'(I+a+a^2+\cdots\cdots)$$
$$=a_0'+a_0'a+a_0'a^2+\cdots\cdots$$

という系列が得られる。われわれはこれらの系列を、貢獻者の名に因んでそれぞれコーンフィールド系列およびゲイツケル系列(註2)と呼ぶことにしよう。コーンフィールド系列(3)に依れば、Xの解は、まず最初に最終消費量Cそのものを計算し、次にはその生産に直接必要な投入量aCを、さらにその次にはそのaCを生産するのに必要な投入量a^2Cを……というように逐次計算を反覆することによつて、その無限系列の總和として近似される。同樣に、ゲイツケル系列(4)においては、Pの解は、まず各財の直接勞働費用a_0'を計算し、次にそれが竝せて直接に必要とする投入物の直接勞働費用$a_0'a$、それからそれらの投入物がさらに必要とする投入物の直接勞働費用$a_0'a^2$等々……を計算してゆくことによつて、それらの無限系列の總和として近似されるのである。ただここで注意すべきは、これらの計算に含まれる時間過程が、計算のステップの進行する時間過程であつて、ケインズ＝ロバートソンの乘數過程のような實際の經濟事象の生起する時間過程ではないことである。もし强いてカレンダー的觀點から解釋すれば、それらはむしろ曆に逆行する時間過程、すなわち回顧的に過去に溯る時間過程とも言うべきであろう。すなわち、コーンフィールドの系列は、今日の消費目標の達成のために、どれだけの生産がそれ以前に先行していなければならないかを示しており、またゲイツケルの系列は、今日の總勞働費用がどのように過去に投下された直接勞働費用に溯及されるかを示していると考えられるのである。(註3)

さて、近似計算が有用であるためには、われわれの系列 $I+a+a^2$

＋……は必ず一定の値$(I-a)^{-1}$に收斂してくれなければならない。ではそのような收斂は、aがどういう性質を具えるときに得られるか。われわれは以下その問題の若干を考えてみたいと思うが、それにはあらかじめ、後に出てくる二三の豫備概念を說明しておくことが便利である。

註(1)　例えば、簡單な卓上型計算機を用いるとして10×10程度の體系ならば、大體一日足らずで答が出せる。50×50位の體系でも、慣れさえすれば、別に一人以上の人手は不要である。100×100以上の體系となると、大規模なディジタル型計算機が必要となつてくる。序ながら、レオンティエフは、最初の10×10の體系を解くのにMITのウイルバー＝ケルヴィンのアナログ型計算機を用い、次の20×20の體系には卓上型計算機、40×40の體系にはハーヴァードのマークI計算機を用いた。現在進行中の200×200および400×400のような大規模なプロジェクトには電子計算機を用いなければならない。

(2)　コーンフィールド系列については、Jerome Confield, BLS memo および W. Leontief, "Interindustrial Relationships," in *Proceedings of a Symposium on Large Scale Digital Calculating Machinery* 1948. その他F. Waugh, "Inversion of the Leontief Matrix by Power Series", *Econometrica*, April 1950, J.L. Hailey "Notes on the Inversion of the Leontief Matrix", *Econometrica* July 1951 などを參照。ゲイッケル系列については、H. G. Gaitskell, "Notes on the Period of Production", *Zeitschrift für Nationalökonomie* 1938 參照。また前稿第二節をも參照せよ。

(3)　計算の過程と現實の過程の動學的性質は、むしろ互に逆であるとさえ言うことができる。例えば、われわれの逐次計算は$X(t+1)=aX(t)+C$という定差方程式の《iteration》によつて行われると考えられるが、これに對して、現實のプロセスにおいては、むしろ次期の需要量が今期の產出量を規定すると考えるならば、$X(t)=aX(t+1)+C$というフォン・ノイマン的なモデルが得られる。いますべての產出量を次期の生產のために投下すると考えれば、この體系は$X(t)=aX(t+1)$あるいは同じことであるが、$X(t+1)=a^{-1}X(t)$と書かれる。それが無に歸することなく成長し得るためにはa^{-1}は1より大きな正の固有根をもたねばならず、かつa^{-1}の固有根はaの固有根の逆數であるから、aは1より小さな正根をもたねばならない。ところでaは非負のマトリックスであるから、後に述べられるように、結局これは$X(t+1)=aX(t)$という體系が減衰しなければならないことを意味している。かくして、カレンダー時間の體系の發散が計算時間の體系の收斂を保證することが知られる。

II、a_{ij}の「トポロジイ」

必要な概念の第一は、分解可能、不可能という概念である。これは次のように定義される。[註1] いま、すべての產業1、2、……、nの中、假りに一群の產業に注目してみて、もしその群に屬するいかなる產業もそれに屬さない產業から產出物を買わず、その群の中同志でのみ投入物を賄つているならば、言換えれば、その群に屬する任意の產業qとそれに屬さない任意の產業pとの間に必ずa_{pq}がゼロという關係が成立しているならば、その體系は分解可能(decomposable)であると言われる。これに對して、もし全產業を包括しなければそのような群が見出されないとするならば、言換えれば、一切の產業が直接あるいは間接に必ず他と關連しあつているならば、その體系は分解不可能(indecomposable)であると言われる。ここで間接にという意味は、例えば產業1が直接に產業2からは買わなくても、產業nから何らかの物を買つており、その產業nの投入物を溯つてゆくと產業2に連つているというような關係を指している。以上の定義において、$a_{pq}=0$という條件が必ずしも同時に$a_{qp}=0$という條件を伴つてはいないことには注意すべきであろう。すなわち、われわれの定義は產業間の一方的な連結關係に關するものであつて、必ずしも双方的な連結關係に關するものではない。例えば、もしこの定義によつて產業が二群に分解され、一方の群が他方の群から何も買わないとしても、このことは逆に後者の群が前者の群から何らかの物を買うことは妨げないのである。もし$a_{qp}=0$と同時に$a_{pq}=0$が成立てば、それらの群は互に完全に孤立し、全く別個の群となる。そのような場合は、完全に分解可能(completely decomposable)な場合あるいは分離可能(separable)な場合と呼ばれてもよいであろう。

さて、これらの分類がどのような經濟的意義を有するかは、次の如き考察から明かとなる。まず、體系が分解可能な場合には、產業の配列を適當に並びかえることによつて、aマトリックスは

$$(5)\qquad a=\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

という形に區分される。ここで對角線に沿うa_kは、それぞれいくつかの次數をもつ正方のサブ・マトリックスであつて、そのおのおのが分解不可能である（言うまでもなく、その次數は1であつてもよい。すなわちa_kはただ一個の因子から成立つていてもよい）。この對角ブロックの下はすべてゼロのサブ・マトリックスから構成され、上はすべてがゼロとは限らない、そして各列について少くとも一つはゼロでない因子をもつ何らかのサブ・マトリックスから構成される。この配列から明かなように、第1群a_1に屬する產業は、單に自分の群內でのみ投入物を購入し合うが、その產出物に關してはその中の少くとも一つが群外の他の產業に對して販賣する。次に第2群a_2に屬する產業は、自らの群および第1群からのみ購入し、かつ少くともその中の一つが他の群に販賣する。同樣に第3群a_3に屬する產業は、自分の群および第1群第2群からのみ購入し、少くともその中の一つが他の群に販賣する。そこでこれを一般化すれば第k群の產業は、自らおよびそれよりも「前」の群から購入して、自分およびそれよりも「後」の群に販賣するということになる。このことから、次のように言うことができる。いま第k群への需要が增加したとすると、その需要の增加分は、それより「前」の群1、

2, ……, $k-1$ には派生してゆくが、それより「後」の群 $k+1, \ldots, m$ には派生してゆかない。別の言い方をすれば、各群はそれぞれ自らより「後」に位する群からのみ《feedback》を蒙り、自らの「前」に位する群からはそのような「撥ね返り」效果を蒙らない。このような連結關係が、分解可能な體系の特徵である。これに對して、分解不可能な體系では、あらゆる産業が必ず連結されているから、$m=1$ であつて、(5)のような三角型の配列は見出されない。從つて、その場合には、どの群に對する需要の增加も、早晩（多くとも $n-1$ 周目には）必ず他のあらゆる産業群に滲透するのである。(註2)

ところで、アメリカの空軍省や勞働統計局の實際の計算では、演算の簡便化のため、しばしば $a_{i+k,i}$ が $k \geqslant 0$ についてほぼゼロとなるような産業の並べかえを行つて、a を三角マトリックスに近似させることがある。この場合にも、若干の局部的な《feedback》を掛酌するとすれば、a はその各グループについて區分された三角型のマトリックスになり、事態は大略さきの分解可能な場合に似通つたものになる。しかし、嚴密に言えば、對角ブロックの下の部分がほぼゼロに近い係數から成るということと、正確にゼロに等しい係數から成るということは、別個の事柄である。分解可能、不可能の性質は、元來係數の量的な數値にかかわるものではなく、ただゼロの係數とゼロでない係數の質的な配置にかかわつているのである(註3)（すなわち、一口に言つて、それらの性質はトポロジカルである）。それ故純粹主義の觀點からすれば、われわれは多くの場合、分解不可能な體系の方をヨリ興味の深い分析對象と看做して差支えないであろう。

そこでわれわれの體系は分解不可能であると考えよう。繰返して言うように、この場合はすべての産業が何らかの形で關連しているが、この關連のし方には、さらにいろいろの場合が可能と思われる。われわれは、後の議論のため、それを循環的な場合と非循環的な場合の二つに分類する。もしも各群の間に、例えば第1群は第2群からのみ購入し、第2群は第3群からのみ購入し、……最後に第 m 群は第1群からのみ購入するというような特殊な關連があるならば、その體系は循環的（cyclic）と呼ばれ、體系が循環的でないときは、それは非循環的（acyclic）と呼ばれる。一般に循環的な體系では、産業の配列を變えることによつて、a マトリックスは

$$(6)\qquad a=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots a_m \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$$

の形に區分される。すなわちゼロでないサブ・マトリックスは、ゼロの正方サブ・マトリックスから成る主對角ブロックの下に沿うて右上の隅にのみ位する。循環的な體系は必ず分解不可能であるから、どの群への需要の增加も必ず全群に波及するが、その波及の仕方が極めて特徵的である。すなわち、この場合、任意の群 a_k への需要の增加は、まず次の群 a_{k+1} にのみ波及し、次いでこの a_{k+1} から a_{k+2} にのみ波及し等々という順繰りの經路をへて第 m 周目にふたたびもとの a_k に戻り、そこからまた新な循環が開始される。このような特異な産業構造が、體系の動學的性質にある關連を有することは、後に觸れられる。

註(1)　以下の議論については、P. A. Samuelson, "Brief Summary of the Leontief Input-Output System" (unpublished), pp. 34 ff. および R. Solow, "On the Structure of Linear Models", *Econometrica*, January 1952. pp. 33 ff. 參照。

(2)　反對の極としての完全に分解可能な體系においては、a は

$$(5)'\qquad a=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & a_2 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & a_3 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots a_m \end{pmatrix}$$

の形に區分され、これら m 個の産業群は相互に全く無連結である。從つて各群への需要の增加はそれぞれ完全に自群の內部にのみ留つて、他に擴散しない。

(3)　それ故、分解可能性のテストには、係數の値を逐一記す必要はなく、ただそれらを十あるいは0の記號で置換えてみるだけで足りる。あるいはその代りに、n 個の産業を平面上の同數の點で表し、a_{ij} が0でない場合にのみ、j 點から i 點に向つて矢印を引いてみることも可能であろう。

III、レオンティエフ體系の代數學

さて、さきの收斂の問題に戻つて考えよう。われわれの係數 a_{ij} はその性質上負になることはないから、a はいわゆる非負のマトリックスである。そのようなマトリックスについては、フロベニウスその他の數學者が古くからその固有根に關する有用な定理を與えている。いま既に確立されたその證明には立入らずに、定理のみを必要なるものにわたつて列擧すると、次のようである(註1)（以下 a が正方かつ非負であることは定理の中でいちいち記さない）。

定理一　a は、(イ)ひとつの非負の實根 λ^* をもち、(ロ)その λ^* には非負の固有ヴェクトルが對應し、(ハ)他のいかなる固有根の絕對値も λ^* を超えることはできず、(ニ) a の任意の因子が增加するとき、λ^* は減少しない。もし a が分解不可能であれば、これらの命題はさらに次のような一層嚴しい形をとる。すなわち、a は、(イ)ひとつの正の實根 λ^* をもち、(ロ)その λ^* には正の固有ヴェクトルが對應し、(ハ)他のいかなる固有根の絕對値も λ^* を超えることはできず、(ニ) a の任意の因子が增加するとき、λ^* は增加する。(ホ)かつ λ^* は單根である。

定理二　$\lambda^* \wedge 1$ であるためには、$(I-a)^{-1} \vee 0$ であることが必要かつ充分である。a が分解不可能であれば、この條件は $(I-a)^{-1} \vee 0$ となる。

定理三　$\lambda^* \wedge 1$ であるためには、$I-a$ のあらゆる次數の首座小行列式がすべて正であることが必要かつ充分である。

定理四　$\lambda^* \wedge 1$ であるためには、a の行和あるいは列和がすべて1より小さいことが充分である。a が分解不可能であれば、それらの行和あるいは列和の中、1に等しいものがあつても、少くともそれらの一つが1よりも小であれば足りる。

定理五　a が分解不可能であつて、λ^* に等しい絕對値をもつ根

が一個以上あるとすれば、aは循環的である。從つて、aが非循環的であることが、λ^*が他のいかなる根の絶對値よりも大きいための必要かつ充分條件である。

以下經濟理論の觀點から、これらの定理の與えるものを逐一考察してゆこう。

(1)　まず正解の條件について。(1)および(2)から $X=(I-a)^{-1}C$, $P=a_0(I-a)^{-1}$であり、Cやa_0は非負であるから、レオンティエフ體系がXやPの正解（非負解）をもつということは、$(I-a)^{-1}$が正（非負）であるということに等しい。ところで定理の二と三からそのためには$I-a$の首座小行列式がすべて正であること（換言すれば$I-a$がヒックシアンであること）が必要にして充分である。數理經濟學の領域で始めてこの命題を明かにしたのは、ホーキンス＝サイモンの貢獻である。[註2] ただし、この命題の後の半分、すなわち充分條件の部分は、それよりも前に、モザックによつて與えられた。[註3]

次に安定の條件について。乘數系列 $I+a+a^2+\cdots\cdots$が$(I-a)^{-1}$に收斂するためには、aの固有根がその絶對値においてすべて1より小さいことが必要かつ充分である。しかるに、定理一から、λ^*は他のいかなる根の絶對値よりも小でないから、收斂ないしは安定の條件はλ^*が1より小ということになり、そこでふたたび定理三を用いれば、それは$I-a$がヒックシアンたることに等しいことが知られる。經濟學者でこれを明かにしたのはメッツラーである。[註4]

ホーキンス＝サイモンの命題とメッツラーのそれとを組合わせれば、さらに次の命題が得られる。すなわち、レオンティエフの體系に正解が存在するための條件は、同時にその逐次計算が收斂するための條件である。レオンティエフ體系の靜學と動學とは、このような對應關係を通じて結ばれる。[註5]

(2)　以上の議論を統一的に支える樞要な條件は、$I-a$がヒックシアンたることである。けれども、變數の多い體系にこの條件を用いるのは、計算の煩雜を免れないであろう。そこで、少くとも充分條件たる資格において、これに代るべきものとして、aの各行あるいは各列の和で表される一層簡便な條件が考えられている。定理四は、そのような條件を述べている。

これらの條件を用いるには、aの行や列が共通の次元で足し合わされるようにXの單位を適當に選ぶことが必要である。[註6] そこで、まずレオンティエフ表の縱の關係に着目して、前稿で說明したいわゆる《dollar's worth》で——すなわち、すべてのPを1ならしめるような特殊な單位で——Xを測るとすれば、a_{ij}は非負であるから、

(7)　$a_{1j}+a_{2j}+\cdots\cdots+a_{nj}\leqq 1 \quad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$

である。すなわち、aの列和はすべて1を超えることはない。次に、表の横の關係について、すべてのXを1ならしめるような特殊な單位を選ぶとすれば、C_iは非負であるから、

(8)　$a_{i1}+a_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}\leqq 1 \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$

である。すなわち、aの行和はすべて1を超えることはない。それ故、定理四から、次のように言うことができる。もしも各產業がすべて勞働を使用するならば、あるいはすべて消費財を生產するならば、觀察されるレオンティエフ體系は必ず安定である。また、もし勞働を用いない產業あるいは消費財を造らない產業があるとしても、他に少くともそうする產業が一つでもあれば、分解不可能な體系は安定である。後者の場合は、たとえ若干產業が安定・不安定の境界線上にあろうとも、少くとも他の產業が安定であるかぎり、それとの連結關係を通じて、全體系は安定たり得ることを示している。この點を明確にした經濟學者はソロウである。[註7]

(3)　a（αもしくは$\hat{a}$）が分解不可能であるとしても、定理一に示されているように、λ^*に絶對値の等しい他の固有根の存在は排除されない。そして、λ^*は單根であるから、それらの根は、もしあるとすれば、負根か複素根であり、體系の運動は振動する。これに反して、それらがないならば、體系の運動は單調である。定理五は、aの構造が循環的であるかないかがこのことに重要な關係をもつこと、體系の運動が單調となるのは產業構造が非循環的な場合、しかもその場合のみであることを示している。このことは、前節の循環性の說明からも直觀的に理解される。そこで述べたように、體系が循環的であるときは、一つの群から他の群への衝擊の傳播は、順繰りに規則正しく行われる。しかるに體系が循環的でないときは、これらの衝擊は全く不規則な仕方で傳播するから、ドミナントな運動は振動性を失うことになる。

收斂の單調性を識別する最も單純な規準は、aが一つでもゼロでない對角因子をもつかどうかである。もしaが少くとも一つの正の對角因子をもつならば、どのように產業を並べかえても、この因子を對角線上から除くことはできないから、aを前節の(6)の形に區分することは不可能である。依つて、體系は非循環的であり、運動は單調である。

投入產出分析

「行列乘數が振動するか」という問題は、グッドウィンとチップマンとの間で論爭された。[註8] そのとき、振動すると主張したグッドウィンの體系は、產出量を《net output》した、ゼロの對角因子をもつ體系であつたことに、このさい改めて注意しておこう。

(4)　ここで、レオンティエフ體系における對應原理、すなわち比較靜學と安定條件との關係に眼を轉じてみる。いま與件として與えられた最終消費量C_jが變化したとすると、それが產出量X_iに及ぼす影響は、容易に分るように、

(9)　$\dfrac{\partial X_i}{\partial C_j}=b_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$

である。同樣に所與の直接勞働費用a_{0i}が變化したとすると、それが價格P_jに及ぼす影響は、

(10)　$\dfrac{\partial P_j}{\partial a_{0i}}=b_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$

である。もしaが分解不可能であれば、安定條件はすべてのb_{ij}（それは言うまでもなく$(I-a)^{-1}$の因子である）が正であることを保證するから、われわれは次の命題を得る。すなわち、任意の財の最終消費の增大は、すべての產出量を增大せしめる效果をもち、任意の財の勞働費用の減少は、すべての價格を減少せしめる效果をもつ。

次に、所與の生產係數a_{rs}が變化したとすれば、計算の結果、[註9]

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial a_{rs}}=b_{ir}b_{sj} \qquad \begin{pmatrix} i,j=1,2,\cdots\cdots,n \\ r,s=1,2,\cdots\cdots,n \end{pmatrix}$$

という式が得られる。體系が安定ならば、さきと同樣、この表現は正である。從つて、技術の向上は、すべてのbを減少せしめ、それによつて一定量の消費財を生產すべき產出量を節約し、あらゆる價

格を低落せしめる。(註10)

(5) 最後に、生産係數の變化が體系の安定性そのものに及ぼす效果について。aが分解不可能ならば、定理一から、

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial a_{rs}} > 0 \qquad (r, s = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

である。依つて、技術の向上は體系の安定度を強化する。反對に、それの低下は安定度を減少し、ある程度以上の荒廢は安定な體系を不安定な體系にさえ轉換する。そのとき體系は正の消費量を生み出す力を喪失する。

註(1)・これらの定理およびその優れた證明については、G. Debreu and I. N. Herstein, "Nonnegative Square Matrices", *Econometrica*, October 1954 の參照がきわめて有益である。

(2) D. Hawkins and H. A. Simon, "Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability", *Econometrica*, July-October 1949.

(3) J. L. Mosak, *General Equilibrium Theory in International Trade*, 1944, pp. 49—51.

(4) L. A. Metzler, "A Multiple-Region Theory of Income and Trade", *Econometrica*, October 1950.

(5) ここで一つの注意を記しておく。レオンティエフ體系の正解の議論は、一部の讀者には、自明の理であるかのように思われるかもしれない。すなわち「現實に觀察される解はつねに正であるにきまつているから、たとえ正解の條件を導いたとしても、それはトートロジイ以上に何を加えるか」というたぐいの疑問がこれである。しかし、この種の疑問は、的を逸しているように思われる。例えば

$$1X_1 + 0X_2 = 1$$
$$5X_1 + 1X_2 = 7$$

という簡單な體系を考えてみると、解は明かに$(X_1, X_2) = (1, 2)$であつて、ともに正である。しかし、この正解が觀察されたからといつて、この體系がレオンティエフ・マトリックスの性質を滿足するということは誤りである。相違の由つて來るところは容易に知られる。いま右邊の$(1, 7)$の代りに$(1, 3)$を與えれば、解は$(X_1, X_2) = (1, -2)$となつて、もはや一率に正ではなくなる。この實驗が示すように、さきに正解が觀察されたのは、たまたま右邊の數値が解の含む負の部分をより强力な正の部分でカバーするようなものであつたからで、左邊の構造が內生的に正解を生む力を具えていたからではない。これに反して、われわれの本文の議論は、もし體系がある非負のCの下で正解をもつならば、いかなる非負のCの下でも正解をもつという議論である。從つて、レオンティエフ・マトリックスがヒックシアンとしての性質をもつかぎり、この註で例示したような事柄は絶對に生じ得ないことに注意すべきである。

(6) Xの單位の變更は、$X^* = kX$ という變換によつて示される。ここでkは正の對角マトリックスである。そのとき、a^*はkak^{-1}となる。本文のaの場合は$k = p$であり、$\hat{a}$の場合は$k = X^{-1}$である。aの固有根は、そのような相似變換によつても變らないから、その動學的性質は不變である。

(7) Solow, *op. cit.*

(8) R. M. Godwin, "The Multiplier as Matrix", *Economic Journal*, December,1 949, *ditto*, "Does the Matrix Multiplier Oscillate?", *ibid.*, December 1950. J. S. Chipman, Professor Goodwin's Matrix Multiplier, *ibid.*, December 1950.

(9) $I-a$ の行列式をA、その第i行第j列の餘因數をA_{ij}で示すと、

$$\frac{\partial b_{sj}}{\partial a_{rs}} = \frac{A_{rs}A_{ij} - A\,A_{ij,rs}}{A^2} = \frac{A_{ir}}{A}\frac{A_{sj}}{A} = b_{ir}b_{sj}$$

(10) 對應原理の、レオンティエフ體系へのいま一つの應用として、われわれはまた次のような事例をも分析することができる(L. A. Metzler, Taxes and Subsidies in Leontief's Input-Output Model, *Quarterly Journal of Economics*, August 1951. その紹介は、かつて筆者によつて、本誌第四十五卷第十一號に行われた)。いま、$\hat{a}$の體系において、第r財にt額の租稅が課せられ、その徵稅額が第s財に補助金として交付されると想定する。その效果を皮相に考えれば、第r財の價格は騰貴するにきまつており、第s財の價格は下落するにきまつているかのように思われる。しかし、よく考えてみると、必ずしもそうとは言い切れない事情のあることが判明する。もし第r財が自分の生産に第s財を大量に用いるとすれば、後者の價格下落の結果、前者の費用は課稅額を上回つて下落するかもしれない。また同樣に、補助金を受けとる財についても、補助金のもたらす直接の效果はつねにその價格を下げる一方、他の價格の間接の動きが當該財の費用を高めることは決して一概には排除できない。すなわち一口に言つて、租稅や補助金の第一次的效果が第二次的效果によつて凌駕されないかどうかを檢討する必要に迫られるのである。われわれの對應原理は、これに對して一つの明快な答を與える。すなわち計算して分るように、

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{\hat{A}_{rr} - \hat{A}_{rs}}{\hat{A}}$$
$$\frac{dP_s}{dt} = \frac{\hat{A}_{sr} - \hat{A}_{ss}}{\hat{A}}$$

である。(ここで、$\hat{A}$は前註におけると同じく$I-\hat{a}$の行列式、$\hat{A}_{ij}$はその第i行第j列の餘因數)。さて、體系が安定ならば、$\hat{A} > 0$。またもし$\hat{a}$が正のマトリックスならば、それの行和が1よりも小さいという性質から、$\hat{A}_{ii} - \hat{A}_{ij} > 0$ $(i \neq j)$であることが證明される(Debreu and Herstein, *op. cit.*, p.603, n.7)。故に、われわれは、こう言うことができる。すなわち、あらゆる第二次的反作用を考慮に容れても、課稅された財の價格は課稅前よりも高くなり、補助金を受けた財の價格はその交付前よりも低くなる。課稅された產業においても、補助金を受けた產業においても、第二次的效果が第一次的效果を上回ることはできない。

筆者は、かつてメッツラーの論文の紹介を行つたさい、

投入產出分析

$A_{ri} \geqslant A_{rj}$ という命題が、正の α の下で成立するのか、それともヨリ一般的に非負の α の下でも（分解不可能その他の適當な限定の下で）成立するのか、明確な理解をもち得なかつた。その後に現れたハーシュタイン＝ドブリュウの證明を讀み、かつ留學中シカゴでドブリュウ教授に質疑を問い糺すに及んで、右の關係は正の α の下でなければ（少くとも現在のところ）成立しないことを知つた。ここに附記して、舊稿を訂正しておく次第である。

（つづく）

第四十八卷　第八號目次

論　說

理論經濟學の性格と日本經濟……鈴　木　諒　一
投入產出分析(三)……福　岡　正　夫
厚生經濟學と倫理的價値判斷……富　田　重　夫
ベヴァン主義とイギリス勞働黨……飯　田　鼎

書評及び紹介

經濟學關係文獻目錄

書評及び紹介

篠原三代平著
『所得分配と賃銀構造』

最近數年間わが國において理論としての計量經濟學の發達は目覺しいものがあつたが、わが國經濟の實態に卽した綜合的調査を行つた研究は比較的少なかつた樣である。本書は一橋大學經濟研究所の經濟研究叢書の中の一册として著わされたもので、日本經濟における賃金構造を實態的に分析したもので、今までこの種の研究において回避され勝ちであつた戰後の資料分析にも相當のウエイトがおかれ注目に値する好著書である。その內容は第一部日本經濟を中心とする賃證分析、第一章假設と方法、第二章產業間の賃金構造、第三章工業における分配率、第四章戰後の賃金、分配構造、補論所得變動における假說、第二部英米實證文獻の展望、第五章アメリカにおける賃金構造論爭、第六章英米製造工業における分配率の實證的研究、と分かれ、この外附錄として豐富な統計資料が收錄されている。著者は「成長や景氣循環を real output をタームにして分析することで滿足し切つているならいざしらず、それを一層現實的かつ具體的な姿で把えようとするならば、近時流行の model analysis を機械的に適用して滿足が得られるはずがない。私は特に日本經濟の分析において賃金構造や所得分配や價格體系のメカニズムを無視してはならないことを痛感するに至つている。敢えて直觀的手法に依據しつつ流行に逆行する書を世に送り出す所以である。」と述べている。日本經濟において實物面のサイクルが著しく少く、價格面の變動が著しいことは周知の事實であり、價格面の分析を重視する必要があり、アメリカ型の計量經濟學的分析だけでは不十分だと云う論旨は私も同感であるが、そのためには直觀的方法に頼らねばならぬとする主張は俄かに首肯し難いものがある樣に思われる。著者は冒頭において曾て一橋大學經濟研究所の共同作業として行われた日本經濟の成長率に關する分析の結論を揭げた上、近代經濟學を學ぶ者にとつては所得分配の原理として限界生產力說を採用しているがこれを現實と對決させるとき短期的には凡ての生產要素の殆んどが代替的ではなくて補完的であり、資本家と勞働者の間の勢力關係によつて歸屬の原理が攪亂され、更に獨占的要因の存在によつて分配率のレベルや變動にも歸屬の原理の示す通りの作用が現われないことを理由として、限界生產力說を棚上げして議論を進めている。この態度が序文で示した直觀的手法と相通ずるのであろうが、現實において限界生產力說が全く無力である如き印象を與えるのは行過ぎでないとは斷言し難い。

限界生產力說の現實的適用としては今日計量經濟學を學ぶ者にとつては常識となつているダグラス函數があり、分配函數としてはとも角、生產函數としてはかなりよく資料に當嵌つており、著者自身も曾て前著「雇用と賃金」において詳細なるダグラス函數の分析を行つた實績がある。歸屬の原理が分配理論に直ちに妥當しないとし