Title	R· W· シェパード 費用函数と生産函数
Sub Title	
Author	小尾, 恵一郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1954
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.47, No.9/10 (1954. 10) ,p.981(111)- 985(115)
JaLC DOI	10.14991/001.19541001-0111
Abstract	
Notes	書評及び紹介
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19541001-0111

倘、齊昭は忠邦の決斷をたゝえ、その强化を督勵して、遂にその主張通り十組仲間を解散せしめたのであつた。

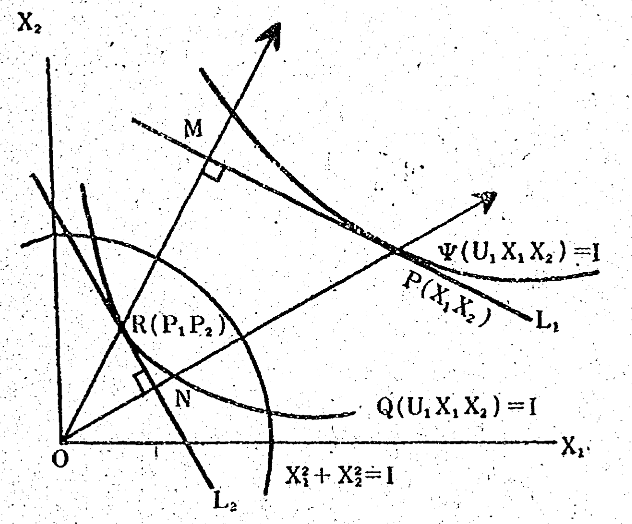
（註一）「文化祕筆」卷一（前掲　一九六頁）
（註二）「物價餘論」天保九年（佐藤信淵家學全集　中卷　四五四頁）
（註三）「卽事考」四（鼠璞十種　第一　三七四頁）。
（註四）大郷信齋著「續道聽塗說」第六編（鼠璞十種　第二　一九四—五頁）
（註五）「川瀨七郎右衞門上書」文政十二年
（註六）「株式連印規定帳」天保九年八月（東京都政史料館藏）
（註七）天保十二年齊昭より忠邦宛書翰、（水戸藩史料　卷四　別記上　一四〇頁）

追記　頁の餘白を借りて佐藤信淵と茂十郎との關係を述べたい、信淵の晩年の富國策に關する思想は天保八年の大鹽の亂に影響されてゐると云はれるが、その中心思想たる商業統制論は旣に文政頃の著述に見えてゐる。寧ろ私は信淵が茂十郎の事業にヒントを得たのだらうと想像してゐる。茂十郎が十組頭取となつて活躍してゐた丁度同じ頃、信淵は江戸の醬油問屋多田屋新兵衞方に厄介になつたことがあり、十組仲間の內外から茂十郎の行動を觀察することが出來た。從つて當代の學者の中で最も多く茂十郎を批判してゐるのは彼である。信淵が茂十郎に注目した點は茂十郎が江戸大阪間の廻船の往復より計算して三橋會所の基金を捻出し、又問屋を督勵して冥加金を出さしめた、その財源にある。信淵の「復古法」の萬物を賣捌きて、その價格の三十分の一を稅し、年百萬金を得るの財源の計算は「先年長岡侯御執政の時に、杉本茂十郎といふ町人有りて、江戸町中十仲間の商人共を延し、日本橋西河岸町に會所を立て、諸國の産物を輻湊せしことあり、時に彼の茂十郎が說に、日本國中より大坂と江戸とに持出して交易する所の品物大凡金五百萬兩に及と云へり、然れども彼は甲州の産にて元來市井の小人なれば……國家の御爲を思ふ者に非ざれば、爭か天下の水陸より生ずる處の物産の數を知ることを得ん乎」（「復古法概言」）とあつて、そこで自分の家は高祖父歡庵以來、世々赤心報國の宿願ありて、日本總國の産物賣買代金を計算してゐた。祖父はいくら、父はいくら、自分は文化十二年に一萬（編者曰く一億カ）三千萬金と推算し、うち公領地は三千萬金であるから、百萬金の公收が得られると云ふのである。佐藤家代々の計算の數字は「復古法概言」と「復古法」とでも區々であり、信淵の家學に關する他の言說と同樣甚だ信憑性に乏しい。信淵の說が茂十郎の影響ありと考へらるゝ所以である。

（本論文は慶應義塾學事振興資金の援助により成つた。感謝する次第である。）

書評及び紹介

R・W・シェパード
「費用函數と生産函數」
Ronald W. Shepherd
Cost and Production Functions; 1953.



生産の諸現象解明の具として、費用曲線（費用函數）という概念が頻繁に用いられて來た。費用曲線（函數）の背後には生産要素の使用量と生産物の關係を示す生産函數と、生産要素の相對價格がまづ與えられ、この條件の下に費用極小の要素配置（又は要素の使用度）が決定されるという機構が置かれていることは明である。從つて相對價格の變化は、一概には（費用極小の演算を經なければ）斷じ難いような仕方で費用曲線を變化せしめるであろう事が豫想される。もし生産函數を特定化する事が、直に相對價格の變化に對する費用函數の變化を明白な形で表わす樣な費用函數を特定化せしめることと對應するならば、費用曲線の自律性は生産函數の自律性にまで高められ、生産現象の解明は著しく簡明化されることになる。本書の重要な意義の一つはこの問題に一つの解答を與えた事にあろう。

シェパードは展開の始めに連續的生産函數に關する自己の見解を明にする。近時展開された線型計畫法は企業の微視的な生産函數の意味を、代替的な基本的活動（elementary activity）より成る生産要素空間のエフィシェントな多角面の集合として明にするのに有用であるがこれは現實の觀察と對應しない加法的活動を前提とする。何れにせよ、この概念的な企業の生産過程に重點をおく分析方法は技術的な資料を詳細な形で入手可能であると考えている。アプリオリにはこの技術的資料は得難いから何らかの統計的推定により投入産出係數をすべての可能的基本活動に關して決定するという極めて困難な仕事が豫想されている。而して元來活動分析の模型は近似的な性格のものであるから多角面を考えるという事に特に利點はなく比較的少數個これらのパラメタにより表わされる連續的な微係數をもつ樣な面でおきかえようという事になるのは自然であろう。斯うすれば問題は再び古典的生産函數の計測に戻るのである。

勿論入手可能な技術的知識迄も無視しようというのではない。（例えば技術的に補完關係にある諸要素は消されて獨立的な要素だけが殘されるという風に）。

生産函數Uを要素空間の領域 $D(X_i > a_i \geqq 0)$ で

(1) $U=\Phi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ （$X_1 \cdots X_n$ は生産要素の量、U生産量）.

と定義し、Φは連續にして正の一次導函數をもち正値であるとする。通常おかれる假定に對應するものとして次の性質を與える。即ちξ η を夫々n個の要素をもつヴェクトルとし、點 $(\xi_1 \cdots \xi_n)$, $(\eta_1 \cdots \eta_n)$ が、生産面 $\Phi=U$ 上の相異る二點とすれば、$0<\theta<1$ について、

$$\Phi[(1-\theta)\xi+\theta\eta]>(1-\theta)\Phi(\xi)+\theta\Phi(\eta)=U$$

これは $\Phi=U$ (const) がエフィシェントな軌跡であることを示す。周知の無差別生産面が原點に對して凸であるという前提に等しい。生産函數は(1)と代替的に、

(2) $\Psi(U, X_1, X_2, \cdots, X_n)=1$

と書ける。Ψは任意のUに對し、$X_1 \cdots X_n$に關する一次の同次函數である。次に費用は、

(3) $q=\sum_{i=1}^{n} p_i X_i$ （p_i は X_i の價格）

で定義される。(2)の條件の下にUを所與とし(3)を極小ならしめる樣な要素x_iの値は均衡方程式と條件式から解かれて、$x_i=\xi_i(U, p_1, \cdots, p_n)$ となる。これを(3)に代入すれば、費用函數

(4) $Q(U, p_1, \cdots p_n)=\sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i(U, p_1, \cdots, p_n)$

を得る。この樣に特定化されたΨ Qについて、次の事が證せられる。即ち簡單のため要素を$X_1 X_2$とすると、單位費用等量線 $Q(U, X_1, X_2)=1$ は、生産等量線 $\Psi(U, X_1, X_2)=1$ の切線の單位圓 $X_1^2+X_2^2=1$ に關するポール（極）の軌跡である。

圖に於て $\Psi=1$ と $Q=1$ （U一定）が畫かれているが軸$X_1 X_2$ は數量 $(X_1 X_2)$ と價格 $(p_1 p_2)$ に使いわける事にする。要素の價格$p_1' p_2'$が與えられとOR直線の方向が決まる。Rの座標$p_1 p_2$は $p_1=\tau p_1'$, $p_2=\tau p_2'$ （但しτは $Q(U, P_1, P_2)=\tau \cdot Q(U, P_1', P_2')=1$ なる樣にとられる）である。扨て所與の$p_1' p_2'$の下に於て費用を極小ならしめる生産要素の量$X_1 X_2$はΨ曲線上の點 $p(X_1 X_2)$ を定めるのであるがこのp點は次の樣にして求められる。即ちORに對して垂直にして且つΨに切する直線l_1をひけばこの切點がpである。直線l_1はp點に於て

$$p_1' X_1+p_2' X_2=Q(U, p_1', p_2')$$

であるがこれを正規形で書けば、

$$\frac{p_1' X_1+p_2' X_2}{[(p_1')^2+(p_2')^2]^{\frac{1}{2}}}=\frac{Q(U, P_1', P_2')}{[(p_1')^2+(p_2')^2]^{\frac{1}{2}}}=OM$$

ここに OM と OR の間には特別な關係がある。$p_1'=p_1/\tau$, $p_2'=p_2/\tau$ を右式第二項に代入して

$$OM=\frac{Q(U, P_1, P_2)}{(p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{OR} \quad (\because \ Q(U, P_1, P_2)=1)$$

即ちRは單位圓に關 $X_1^2+X_2^2=1$ に關してl_1のポールであることがわかる。

逆に、$\Psi(U, X_1 X_2)=1$ は、$Q(U X_1 X_2)=1$ の切線のポールの軌跡であることも示される。(註1)

以上の關係から明な通り、生産函數と費用函數は、費用極小原理を導入することによって、互に他を決定しあう。これをシェパードは兩者が双對的な (dual) 關係にある又は双對性 (duality) をもつと呼んでいる。

生産函數を特定化する事により種々の生産費に對する極小費用の組合せ$X_1 \cdots X_n$が與える費用函數には又重要な性質を附與しうる事が次に示される。これに先立ってまず Homothetic production function Φを次の樣に定義する。即ちσを以て一次の同次函數とし(1)式におけるの性質をもつものとする。又Φ（(1)式のと異る）を連續な單調增加函數とすれば、生産量Uが、

(5) $U=\Phi[\sigma(X_1, \cdots X_n)]$

で表わされるとき、Uは homothetic production function とよばれる。(5)は又、$f(U)=\sigma(X_1 \cdots X_n)$ とかけるから(2)に當るものとして、

(6) $\Psi(U, X_1, \cdots X_n) \equiv \frac{\sigma(X_1, \cdots X_n)}{f(U)}$

扨て、費用函數が生産指數と要素價格の何らかの指數との積で表わされるならば指數論上の條件（要素轉逆テスト）にもかない、アグリゲイションの上に好都合である。即ち、

(7) $Q(U, P_1, \cdots p_n)=f(U) \cdot \Gamma(p_1, \cdots p_n)$

（但しΓはp_iに關する一次同次函數）と書けるだろうか。シェパードは(7)の成立するための必要且つ十分な條件は、(5)であることを證明する。（即ち、homotheticity が生産函數に於て成立つことである。四五頁以下）即ちX_iの合理的結合という條件の下で(7)式のσとΓは要素の使用と價格に關する一般的な指數であることが指摘される、この結果は次のダグラス函數の解釋に於て重要な役割を果す。

(5)式で與えたσを

(8) $\sigma=\sigma_0\left[\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i}{X_i^0}\right)^{a_i}\prod_{k=1}^{L}\left(\frac{Z_k}{Z_k^0}\right)^{b_k}\right]$; $\sum_1^N a_i+\sum_1^L b_k=1$

と特定化する事によりダグラスのいわゆる巨視的生産函數を經濟學的に意味づけようとするのがシェパードの主要課題の一つである。(8)式のZ_kは土地とか勞働のような primary factor でありX_iは固定資本の樣な non-primary factor のサーヴィスの單位時間當りの適用を示す。Y_i^0, Z_k^0 は基準時點の値である。(8)によって、(7)式のΓは(8)式の數量 X_i, Z_k を夫々價格p_i, W_k でおきかえたものであることが容易に證明出來る。周知の極小化の手續きにより、

(9) $a_i=\frac{P_i \cdot X_i}{\sum_1^N p_i \cdot X_i+\sum_1^L W_k \cdot Z_k}$; $b_k=\frac{W_k \cdot Z_k}{\sum_1^N p_i \cdot X_i+\sum_1^L W_k \cdot Z_k}$ $\left(\begin{matrix} i=1 \cdots N \\ k=1 \cdots L \end{matrix}\right)$

即ち彈力性a_i b_kは分配率を示すという關係が得られる。次に(8)式の右邊括弧中の第一項第二項の幾何平均X_i Z_kをの夫々のアグリゲイトCLと定義すると(8)式は

(10) $\sigma=\text{const}\ C^{1-\nu} \cdot L^{\nu}$; $\nu=\sum_1^L b_k=\frac{\sum_1^L W_k Z_k}{\sum_1^N P_i X_i+\sum_1^L W_k \cdot Z_k}$

と書ける。この(10)式を以て、シェパードはダグラスの函數が意味するものを示そうとするのである。(10)式のσを用いて、

(11) $f(U)=\text{const} \cdot C^{1-\nu} \cdot L^{\nu}$

ここで特に$f(U)$をUとおけば(11)式はダグラスが總計資料に用いた函數そのものである。シェパードはこの式を以て巨視的函數と解する。そして(11)の巨視的函數えと導くアグリゲイトの資本C勞働Lを

(12) $C=C_0\left[\prod_1^N \frac{X_i}{X_i^0}{}^{a_i}\right]^{\frac{1}{\sum_1^N a_i}}$; $L=L_0\left[\prod_1^L \frac{Z_k}{Z_k^0}{}^{b_k}\right]^{\frac{1}{\sum_1^L b_k}}$

として定めただけでは十分でないと述べる。即ち W_k, p_i をもアグリゲートして $\sum_1^N p_i X_i=C \cdot P$, $\sum_1^L W_k \cdot Z_k=L \cdot W$ なる樣に

定めねばならぬというのである。

併し乍らここに重要な疑問が起るであろう。まず(8)式の解釈である。この(8)式が一企業に關する微視的生産函數を示すものと考えよう。そうすれば一企業內部の多種の勞働、資本用役を二つの項目えとアグリゲイトするのが(12)式であると解せられる。この場合極小費用の組合せを與える主體は企業者であるから、均衡方程式を通じて、(10)式のUがその右邊によつて示される樣な意味をもつと考えて差支えない。從つてX_iZ_kを夫々アグリゲイトしてC及びLの項目の下に極小化する事は經濟學的意味をもつ。

次に(8)式のX_iZ_kがシェパードの擴張解釋に從つて各企業の生産要素を示すものとしよう。(勿論同一種の要素を全企業が使うとは限らないからX_iとL_kの項數は等しくなくてよい。)すると(8)式は各企業の(一層擴張すれば産業部門の)生産函數の幾何平均を與えることになる。依てσは明に各企業の生産量の幾何平均である。この樣に解したときの(9)式は如何なる意味をもつかを見よう。

Qを一定にして極小化の操作により均衡方程式を得るが、(8)式は筆者が前論文(註2)に於て定義したアグリゲイトの式と本來同一のものである故其處で述べた通り、Qについて限界生産力均等式が成立する時は個別企業に於ても亦同時に限界生産力均等則が成立するということがわかる。即ち(前掲論文四六頁)均衡式は(9)式を與える。注意すべきは合理的行動の主體を各企業におくことによつて(9)式が成立することである。(9)が成立すれば(10)式は(8)式を書き變えただけであるから(10)のνの式が各個別企業の合理的行動の結果として成立するものと解釋出來る。依つて(10)式のνはX_iZ_kに關するいかなるアグリゲイションをも必要とせずに成立するのだということがわかる、勿論(8)式のX_iZ_kの項の平均を(12)式を用いて簡略化して書くことは差支えないが、合理的行動の原理が適用されるのはCではなくX_i、LではなくZ_kであることを明にしておかねばならないであろう。

シェパードはCLを用いて合理的行動によるνの意味づけをしようと試み p_i, W_k のアグリゲイトえと進むのであるがこれは rational behavior の主體を甚だ不明なものとし、結論の經濟理論的意味を失わしめるものと考えざるをえないであろう。(12)式によりアグリゲイトされた各企業の要素は(10)式に對してよく適合する可能性があるとはいえ、これはシェパードの「巨視的變數による合理的行動」に關する解釋が正しいという事を裏付けるものではない。

次にシェパードは(10)式のνは(11)式のνに、いわゆる收益遞增、遞減や完全競爭と無關係に、意味を與えると述べているが利潤極大でなく費用極小の場合當然得られる結論でこれは新しい智識を加えたものではない。

扨て企業間のアグリゲイションに於てCLを定義しこれを用いて合理的行動を論ずる事の經濟理論的意味が不明であれば、CLを用いる場合の費用函數、

$$Q(U,P,W)=f(U)\cdot\mathrm{const}\cdot P^{1-\nu}W^{\nu}$$

はCLに關する費用極小過程を含む故に個別企業內部の問題としての(7)式と形式的に對應するに止まり、經濟學的意味は不明となる。

このようなわけから、シェパードの論行はすべて同一企業內の多種要素のアグリゲイションと解する限りに於て經濟學的意味を附與されるものと考えられる。

個別企業間のアグリゲイションと解するならば、その立場はクラインのそれ(註3)に酷似する。實際(8)式(11)式に於て$f(U)$をUとすれば、(生産函數と費用函數に双對性(duality)を附與しようという意圖に基く、W_i, P_i の幾何平均によるアグリゲイトの採用を除いては)全くクラインのアグリゲイションと同一と解してよいであろう。從つてクラインに對する批判はそのまま、この場合にもあてはまると考えられる。筆者は異種の企業間のアグリゲイションの問題はクロスセクション分析を回避することによつてのみ起ると考える故に果してそれ自體問題とするべきかを疑うものである。けれどもこの點の積極的考察は他の機會に行いたいと思う。

この本はなお最後にイヴァンスの生産理論を homothetic function を用いて解明しているのであるが省略したい。

本書の特質は結局費用函數と生産函數の間に存する美事な双對性の發見と、一次同次性を極度に利用した一企業內の要素の頗る簡明な綜合方式の樹立に求められると考える。この二つの成果に關する限りは生産現象の解明に當るものにとつて極めて有益な手段を提供したといえよう。

(Princeton University press, $ 2.00)

(註1)　Rに於ける $Q(U,X_1,X_2)=1$の切線l_2は、

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}\right)_R(X_1-P_1)+\left(\frac{\partial Q}{\partial X_2}\right)_R(X^2-P_2)=0$$

然るに　$X_1'=\left(\frac{\partial Q}{\partial X_1}\right)_R$,　$X_2'=\left(\frac{\partial Q}{\partial X_2}\right)_R$　($X_1' X_2'$ は價格)　であることが證せられるから(十三頁)　l_2直線は、

$$X_1'X_1+X_2'X_2=P_1X_1+P_2X_2=Q(U,P_1,P_2)=1$$

且つl_2は法線方向ON、原點からの距離 $\frac{1}{(X_1'^2+X_2'^2)^{\frac{1}{2}}}$ である。l_2のポールは距離 $OP=(X_1'^2+X_2'^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{ON}$ でl_2に垂直なON上の點Pである。

(註2)　三田學會雜誌二七年二月號拙稿。

(註3)　L. R. Klein; Macro economics and the Theory of Rational Behavior Econometrica, No. 1946

アメリカ綿業史の一研究

—フォール・リヴァーを中心にして—

(小尾惠一郎)

Smith, Thomas Russel, "The Cotton Textile Industry of Fall River. Massachusetts, *A Study of Industrial Localization*." (King's Crown Press, N. Y., 1944, 163 p.)

アメリカ綿業に於ける工場制の起原は、(一)獨立戰爭前後に始まる議會の財政的援助を受ける特權企業、(二)フィラデルフィア其他の都市の小生産者が政府の補助を受けずに職場を持ち、中部諸州の織物業者及び勞働者の源泉となる。(三)ニュー・イングランド商人が綿業に從事する場合。(1)プロヴィデンス商人アルミー・ブラウンがスレイターと共にパートナーシップによりアメリカ最初の水紡機綿工場設立(一七九〇年)。織布工程は前貸制に依存、現物賃銀制と家長的關係が見られ、「工業的封建制」(クラーク)「卸賣手工業制」(グラス)と規定される。〔ロード・アイランド型〕。(2)ボストン商人ローウェル等によるジョイント・ストック・カンパニー制と力織機によるウォルサム工場。全工程を含み、ウォルサム、ローウェル等綿業大中心地に見られる。〔ウォルサム型〕。

扨ここで問題にすべき點は多いが、先ず商業資本の範疇的轉化は、全機構的にはどの樣に位置づけらるべきか。其は寧ろ投