

Title	企業生産函数の分析 : Linear Programmingの立場から
Sub Title	Analysis of production of the development of transport means in Japan
Author	尾崎, 巖
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1953
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.46, No.4 (1953. 4) ,p.237(17)- 266(46)
JaLC DOI	10.14991/001.19530401-0017
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19530401-0017

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

豫算科目と勘定科目の一致状況

(第七表)

企業種別	大會社			中會社			小會社			然り		否	
	然	否	然%	然	否	然%	然	否	然%	數	%	數	%
山油	3		100	2		100	1	1	50	6	86	1	14
炭、石	5	1	84	6	1	86	1		100	12	86	2	14
電氣、ガ	1		100	4		100	1		100	6	100		
鐵諸機	1		100	5	3	62	5	1	84	11	73	4	27
電機、電線	2		100	8	2	60	24	5	83	27	79	7	21
車輛、自動				7	1	87	4	3	57	13	77	4	23
車自轉				4	1	80	8	2	80	12	80	3	20
造船、運	3		100	3	1	75	2	1	67	8	80	2	20
鐵道、運	1		100	8	1	88	11	2	84	20	87	3	13
海倉				2	1	67	3		100	5	84	1	16
化學工業	2	1	67	2	1	67	6		100	8	88	1	12
塗料、染料、油脂	2		100	11		100	3	3	50	16	80	4	20
藥品	2		100	2	1	67	3	1	75	7	77	2	23
醫藥				1		100	4	2	67	5	71	2	29
食品、釀造				6	1	86	7	1	87	13	86	2	14
窯業、セメント				1		100	7	1	87	8	88	1	12
ゴム、皮革				4		100	3	1	75	7	87	1	13
綿織、紡績	7		100	2		100	1		100	10	100		
織物、諸織	1		100	4	1	80	3	1	75	8	80	2	20
製紙、パルプ				2	1	67	4		100	6	86	1	14
銀行、信託、無	22		100	1		100				23	100		
保買、險	3		100	2		100	8		100	18	100		
貨店	2	1	67	8	2	80	1		100	11	79	3	21
百貨、業、觀				2		100	5		100	7	100		
其の他				1	2	33	4	2	50	5	55	4	45
計	55	3	95	94	20	82	124	27	82	273	84	50	16

企業生産函数の分析

Linear Programming の立場から

一 序 論

尾崎 巖

従來生産函数が $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \dots \dots (1.1)$ の形で、現實に利用される場合に、その函数型決定に際し、必要以上に制約され或は簡約化されて用ひられて來た事は長く知られて來た。事實、多數生産要素から多數生産物を生産する大規模企業に於いては、各企業者や經營者達は (1) 式で表わされる函数型を知つて行動するのではなく、むしろ知られ得る所のものは、通常各個の生産工程に於ける生産要素と生産物の技術的結合の割合だけなのである。この點に着目して linear programming 論者は、この様な大規模生産状態を固定技術係數 (fixed technological coefficient) をもつた生産分析によつて説明し、現實の生産函数に近似せしめようとする。(註1) その爲活動 (Activity) なる全く新しい概念を導入し、制限された資源の最適分配の問題を再構成しようとする。(註2) その意味に於いては、活動分析 (Activity analysis) の目的は、これまでの厚生經濟學者達がその生産の分析で意圖したるものと軌を一にしてゐると云ふことが出來よう。従つて彼等の生産分析の論議は、所謂、新厚生經濟學者達 (new welfare economists) とりわけ、ヘルグソンの「經濟厚生函数 (economic welfare function) (註3)」やラングの「社會價值函数

企業生産函数の分析

(註4)「(social value function)」の概念を背景としており、又社會主義社會の經濟計算の可能性の論議等とも密接な關係をもつてゐることは云ふ迄もない。クープマンズはこの動向の最も組織的な論文である「生産の分析」に於いて、この生産函數の概念がその社會に於ける經濟的選擇(economizing choice)の最も有效な行爲の下に達成され得る最善の状態を表わしてゐる故に、最初から規範的(normative)なものであり、且つ彼の研究がその状態の性格と、それが函數を定義し得る爲の條件のみを研究するものであるといふ限定を與へて、資源配分の理論を詳細に展開してゐる。

本稿は新厚生經濟學の目指す資源の最適分配の立場よりはむしろ、現實の企業的均衡の立場から活動分析をあく迄現實への接近として扱へようとする試みである。それ故、資源の配分問題では導入の必要がなかつた市場價格體系との關聯を考察して、現實の均衡點を定めなければならない。従つて本稿の目的は、第一に、企業活動に於ける linear programming の意味を考察して生産函數を最も現實的に定義し得る企業生産の模型を構成する事であり、第二に、その生産函數を基本にして企業の生産計畫が如何にして到達されるかを見出し、第三に、その均衡點に於ける状態の種々の條件や性質を考察して、正統的な生産計畫論との比較を試みる事である。

以上の様に、この稿を通じては、單一企業が生産函數と生産計畫のみに範圍が限定されてゐる。又こゝに出て來る函數或は均衡値は悉く現實の數値から實際に計算され得るものであり、導かれた函數型と現實との近似度は、計畫者(企業者)の技術水準認識の良否か或は理論を貫く一线性(linearity)の假定の可否にかかつてゐる。後者に關しては一次計畫に代る非一次計畫(non linear programming)の理論構成が現在研究されつつあるが、未だ抽象論の域にありこゝでは觸れられていない。問題の中心は、活動を基本にした生産函數を正統的な經濟理論の分野に如何に適應せしむるかと云ふ事に存してゐるのである。

(註1) linear programming について「一九四九年」

カフの「ロウズ・ロマン」に於ける合同會議で提出された論文の収録である。Koopmans 「Activity Analysis of Production and Allocation」1951. の詳細を論せられてゐる。以下この書の諸論文で負ふ所が多い。

(註2) 従來の生産理論が、生産要素間の代用、生産物間の代用、生産要素・生産物間の代用、何等制限のない場合の連続的な生産函數を基本にしてゐたのに対し、一次計畫論者達は、それ等の技術的下一定なる組合せによる生産しか認めない。この固定係數による一つの生産工程を活動と稱し、之を基本として、生産の分析を行ふ時、活動分析と稱す。活動は後に説明する如き一活性を有する故に一各 linear programming と呼ばれる。

(註3) Abram Bergson "A Reformation of Certain Aspect of Welfare Economics," Quarterly Journal

of Economics, Vol. 52, February, 1938.

(註4) Oscar Lange "The Foundations of Welfare Economics," Econometrica Vol. 10, July-October, 1942.

(註5) 經濟計算に關する諸文献は山田雄三「計畫の經濟理論」211頁参照。

(註6) Tjalling C. Koopmans "Analysis of Production as An Efficient combination of Activities." 前掲「Analysis of Production and Allocation」pp. 33-97. の収録。

(註7) H. W. Kuhn and A. W. Tucker; "Non Linear Programming." Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Edited by Neyman University of California 1951.

二 企業活動の分析

1 活動とは――

後に定式化される企業均衡のモデルの爲に活動の概念を一般的に説明する。生産理論の中心問題を占める生産函數は、ある與へられた技術の下に、數種の生産要素の函數として幾つかの生産物を表わしてゐなければならない。さて(1.1)式を生産函數の型を企業者は如何にして決定するのであらうか。従來の生産理論は、(1.1)式を既知のものとして與

へ、その制約の下に利潤函數を最大にする條件を求めて均衡値を見出す。然し前にも述べた通り比較的大規模な生産に於いては企業者は通常その函數型を知つて行動するのではない。知り得るものは或る段階の、技術水準の下に於けるすべての生産要素、生産物間の組合せを示すデータだけである。この新しい立場の論者は、之等のデータに對して觀察の眼を向ける。即ち、各データは生産物と生産要素の技術的一定比率の組合せだけを表はしてゐると考へるのである。この固定技術係數をもつたデータは、生産物と生産要素のすべての種類が與へられると技術的にそのあらゆる量的組合せを示す全部のデータが知られる故に、技術的知識(technical information)と呼ばれ、又その各々を活動若しくは生産工程(productive process)と名付けるのである。

2 一次工程 Linear process

さて現實に生産に雇傭されてゐる技術そのものは、之等の可能な生産工程の中から經營者や管理者の選擇による浪費的な生産工程を捨て去つた残りの有効な工程であつて、それ等の工程が實は現實の生産函數を表わしてゐるに他ならない。問題は既知のデータから如何にして有効な生産工程が選擇によつて残されるかを理論的に導くことにある。その爲に次の一次性と云ふ重大な假定を導入する。

〔一次性の假定〕

- (a) 可分性(divisibility)——各生産工程の大きさは、その含む各商品の割合を變へないで連続的に擴張し得る。
(b) 加法性(additivity)——幾つかの生産工程を別個に遂行することから生ずる産出量の總和は、それ等の工程を一體として同時に遂行することから生ずる産出量に等しい。

(a)の假定は生産の不可分性の無視と收益不變を意味しており、(b)の假定は(a)と共に全體としての生産組織に對する經

濟性或非經濟性の無視を意味してゐる。

之等の假定の充たされた生産工程は一次工程(Linear process)若しくはクープマンズの用語に於ける活動と呼ばれるものである。以下我々は前者の名稱を用いることとしやう。

3 生産函數の定義

Linear process は n 次元空間に於いて、原點 O からの半直線で表わすことが出來、從つてすべての Linear process は、與へられた技術的知識の下に凸多角錐(convex polyhedral cone)を形成することが、證明せられる。^(註1)

さて、この凸多角錐で表はされるすべての Linear process の中でどの部分が生産函數として定義し得る部分であらうか。クープマンズは、生産の有効状態として、ランゲやミードと同様の定義を置く。

定義——「一商品の純産出量の増加は、必ずどれか他の一商品の純産出量の減少を惹起し、且つその減少の費用のみで達成せられ得るに過ぎない状態を、その生産が有效(Efficient)であるといふ。」

云ひ代へれば、他のすべての商品は同じ量だけ生産されてしかも一商品がなほ一層多く生産される様より勝れた別の生産工程はもはや存在しない様な状態を有効状態と名付けるのである。この定義に従つて、無数の可能な生産工程(Linear process)の中から選擇された幾つかの生産工程及びそれ等の組合せを生産函數と云ふのである。かくして得られた生産函數は現實の生産状態を近似的に現はしてゐるに違ひない。何故ならば、現實に企業者がその生産技術を熟知してゐるならば、最も無駄のない状態で生産を行ふであらうと考へられるからである。

さて、生産函數を表はす有効な生産工程の集合が、前記凸多角錐の特定の境界面(Boundary facet)の連結した部分に來る事の證明がクープマンズの「生産分析」で爲された。その數學的分析はトポシカルな凸多角錐の理論を用

ひて精細に論じられてゐる。^(註2)

我々の問題はクープマンズの導いた資源の最適分配問題の理論を根底にし、そこに市場價格體系を導入して企業の内部的均衡のモデルを構成するといふ事なのである。

4 活動分析のもつ意味及び利點と缺點

次に活動分析によつて再編成されようとする試みられる生産理論のもつ意味を考察しやう。第一に從來の生産理論は生産関數 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ の型 (shape) の決定と存在をその理論構成の不可缺の前提とした。新しい立場はその前提であつた生産関數の決定可能といふ假定を更に分解して、活動と云ふそれ以上は殆んど經濟學の意味を有しなくなる技術的な元素から出發し、生産関數の構造を窮明せんとする。従つてこの生産関數を導く前提の擴張と發展が、それから導かれた生産理論をして、複雑な經濟現象の説明に耐へ得るならば——云ひかえれば正統的な經濟理論の分野に融和し得る構造を持つならば、從來よりもより勝れた方法であると斷定し得るであらう。

第二に活動分析はあく迄現實への接近を目指すことを目的としてゐる。従つてその當否は得られた結果と現實値との離反に依存する。この離反は、次の様に解釋し得る。(a) 現實側として實際の生産状態が有効に行はれてゐない。(b) 理論構成側としては一次性的假定の不備なる事、及び活動なる概念の否定である。前者(a)の場合に解釋し得る時には、逆に活動分析は生産有効性の檢定の基準に用ひる事が出来るであらう。後者(b)の中、一次性的假定は生産規模の増減による収益不變を意味してゐるのであるが、之に代はる非一次計畫が發展しつつあることは既に述べた。一方活動そのものに由來する批判は、技術的に定まる結合の比例性そのものの可否に向けられるものではなくて、その様に規定された活動なる概念を採用する事の當否にかかつてゐる。従つて固定比例係數を有する生産分析に對しては、活動分

析が完全に妥當する事は當然であるが、問題は多數生産要素から多數生産物を得る生産状態を、一定結合の要素と生産物の、不連続な組合はせで表はす(若しくは近似する)といふ考へ方の當否にある。従つて傳統的な生産関數が各生産工程の中の連続的な商品の代用を許容したのに反し、新しい立場は生産工程各々の内部に於ける商品間の關係は一定比例で不連続に結合され、連続的な代用は各生産工程どうしの組合せとして考察されてゐるのである。この様に現實の生産状態を結合生産 (joint product) の現象で近似する事は、略々妥當し得るものと考へてよいであらう。

第三に之等の事は數學的分析としては從來の微分的操作に代つて、凸多角錐の理論を使用せしむる。従つて、從來の抽象的一般函數型と異り、データの數値で定まる極めて現實的な生産関數と均衡値を計測し得るのである。只計算には一次聯立方程式の解を得る爲の膨大な計算を必要とするものであるが、この事は新しい立場の計量性の價値を損ふものではない。更に、從來の生産理論に於ける「調和的な諸數量の組から出發して均衡値の近傍のみの微分的變化のみを考察し得る」と云ふ限定は除かれ、有限量の幅を持つ、より廣範圍の企業者選擇を理論そのものが可能ならしめるといふ利點をもつのである。

第四に活動分析による生産理論は、從來、例外と見做されて來たキンク (kink) やコーナー・マキニム (corner maximum) をもその理論構成自體の中に含んでゐる。

第五に活動分析の基本たる活動の決定は純然たる技術的情報に依つて定まるものであるから、社會的生產関數を必要とする場合にも從來の如き aggregation の問題を惹起せしめない。

以上列擧した様な内容を有するこの理論は、反面、計算の複雑性と、數學的に發達途上にある分野を分析用具としてゐる以上、未だ簡單化された經濟構造を説明し得るに過ぎない點に於いて、幾多の缺點を有するものであることは

否めない事實である。

次節に於いて以上の記述を充たす生産模型を展開し、企業均衡を考察する。

(註1) Nicholas Gerogesou-Roegen "The Aggregate Linear Production Function and its Applications to Von Neumanns Economic Model." Activity

Analysis pp. 98~115.

(註2) Koopmans "The Theory of Production," Activity Analysis pp. 59~65.

三、企業の生産模型

この節で論ぜられる Linear Programming は、クープマンズの活動概念とも、ジョージュ・スコーゲンの一次工程の概念とも稍異つてゐる。投入物の存在と種類の固定を前提とする點では前者よりも後者に近く、且つ、商品を單純にその出入の流量率で表わした點では前者に類似してゐる。單一企業の生産函数を對象とする故に、兩者よりも條件を強度に規定し、企業特有の性格と構造を考察せんと試みた。

(a) 單一企業内の完全に定義されたすべての商品を G_1, G_2, \dots, G_n とし、各商品の單位時間當りの流量率を y_i とする。

(b) 一次性の公準——可分性 (divisibility)

幾つかの y_i の固定比例量で技術的に結合されたる投入から産出への變換を一次工程 A と呼ぶ。定義から A は次の如く表わされる。

$$A(y_i) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \dots \dots \dots (3.2)$$

一次工程は次の性質を持つ。

(i) $A(y_i) \equiv A(y_i x) \quad x \geq 0 \dots \dots \dots (3.3)$

即ち一次工程内の固定比例をもつ商品流量をすべて非負實數倍したるものは、同一工程と見做され只その大きさのみが x 倍されるものとす。

(ii) $A(y_i x) = A(y_i) \cdot x \quad x \geq 0 \dots \dots \dots (3.4)$

之は一次工程の大きさに對する收益不變を意味してゐる。(3.3)と(3.4)の兩方から、任意の一次工程は、その單位工程

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) = A(a_i) \dots \dots \dots (3.5)$$

に依つて、完全に決定されることがわかる。従つて、今 $A(a_i)$ を簡單に $a_i = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ で表わすと、次が成立し。

$$A(y_i) = A(a_i) x = a_i \cdot x \quad x \geq 0 \dots \dots \dots (3.6)$$

a_i を一次工程の技術係數と呼び、 x を一次工程の水準と呼ぶ。(3.6)を成立たしめる $x \geq 0$ が存在する時、 $A(y_i)$ を可能なる工程と呼ぶ。

(c) 加法性 (additivity)

之等の一次工程は當然次の加法性をも満足する。

(i) 技術的知識 (technical information) に依り、可能なる一次工程の集合 $\{A_i\}$ が存在する。

(ii) 任意の一次工程 A_j に對し、商品 G_k の流量函数が存在する。

$$y_{kj} = F_k(A_j) \dots \dots \dots (3.5)$$

(iii) 任意の二つの A_1 と A_2 に對し次が成立し。

企業生産函数の分析

$$F_k(A_1 + A_2) = F_k(A_1) + F_k(A_2) \dots \dots \dots (3.6)$$

(5) 任意の $x \geq 0$ と任意の A_j と對し次が成立し。

$$F_k(xA_j) = xF_k(A_j) \dots \dots \dots (3.7)$$

(6) 次た $A_j (y_{1j}, \dots, y_{nj})$ は n 次元商品空間 (y_1, y_2, \dots, y_n) に於ける原点 O からの半直線 Δ_j に依つて表わされ (1) 對一 對應) Δ_j は點 (y_1, y_2, \dots, y_n) を通り、且つ半直線 Δ_j 上の一點は、その一次工程 $A_j (y_{1j}, \dots, y_{nj})$ の生産規模を示してゐる。従つて又 $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ は Δ_j 上の原点 O からの單位の長さの點 $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ を表わしてゐることがわかる。そして A_1 と A_2 とを Γ の可能なる工程として Δ_1, Δ_2 を各々の Γ 空間に於ける寫像とすると、角 Δ_1, Δ_2 に屬する任意の半直線 Δ はやはり Γ の可能なる工程 A の寫像である事が證明せられる。(Georgescu-Roegen) 即ち

$$A = A_1x_1 + A_2x_2 \quad x_1, x_2 \geq 0 \dots \dots \dots (3.8)$$

の寫像である。

かくして、 Γ のなる條件から、可能なる一次工程の集合 $\Gamma(A)$ に對應する各 Δ の全集合は、商品空間に於いて凸多角錐を構成することがわかる。之を Δ で表わすこととする。

(7) (8) はある一次工程が、幾つかの特定の工程の正の一次結合ではし得ることを示しており、この事から次の(3.9)式が導かれる。

「 $\Gamma(A)$ の中に有限基本集合 (finite basis) $A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*$ が存し、任意の A はその正の一次結合で表はし得る。こゝに A_j^* は單位工程であると考へてよ。」

$$A = x_1A_1^* + x_2A_2^* + \dots + x_mA_m^* \dots \dots \dots (3.9)$$

A_j を技術的基本知識と呼ぶことにしやう。各企業者が A_j のすべてを知り得るか否かは、十分に有效なる生産状態を達成し得るかといふ當面の問題—従つて現實への近似と見做し得るか—どうかの問題に極めて重要な役割を演ずる。(註2) 各 A_j は凸多角錐の枠 (Frame) を表はしてゐる故に、有限箇の技術的知識のみで、 $\Gamma(A)$ のすべてに對應する Δ のすべてを計算することが可能となるのである。(3.9) を變形して次の如く書く。

$$A = \sum_{k=1}^m A_k x_k \quad x_k \geq 0 \text{ for all } k=1, \dots, m.$$

$$= (A_1^* A_2^* \dots A_m^*) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \dots \dots \dots (3.10)$$

又一次工程のベクトル

$$A_j^* = \begin{pmatrix} a_{1j}^* \\ a_{2j}^* \\ \dots \\ a_{nj}^* \end{pmatrix}$$

を技術行列の形に結合すれば

企業生産函数の分析

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

となり、(3.10)から次式が導かれる。

$$\Delta = Ax \quad x \geq 0 \quad \Delta \in (A) \dots \dots \dots (3.11)$$

ここに x は m 次元 x 空間に於ける非負のベクトルである。

(f) 企業生産の公準

生産状態を表現する凸多角錐が商品空間に於いて如何なる性質を與へられるかは、企業生産の公準に制約される。クープマンズの廣汎な意味の變形函数に對する公準とは全く異り、ここでは極めて現實的に企業の公準を次の如く設定しやう。

「生産工程に於いては n ヶ商品の中に、必ず(1) $0 < x_k < \infty$ なる k 種類の投入される商品と、(2) $x_k \geq 0$ 種類の産出される商品を含む。(3)且つ各投入量は非正であり、各産出量は非負でなければならぬ。」

この公準は凸多角錐が、 k 個の正軸方向及び $n-k$ 個の負軸方向を持つ n 次元空間の各軸をも含んだ象限の内部に含まれなければならない事を意味する。この公準の結果は後の生産計畫に重要な意味をもち、又これは企業の自己消費(中間生産物)の意識したる無視を意味してゐる。後に利用する爲に、數學的に表現すれば次の如くなる。

(g) 凸多角錐理論による公準の表現
全空間を

$$(FD) \equiv (-I, I) \quad I: \text{unit matrix}$$

で表はす。(I)は n ヶの正軸を棒(Frame)とする凸多角錐であり、(-I)は n ヶの負軸を棒とする凸多角錐である。更に、I, Aなるマトリックス及び角錐(I)と(A)の行(ROW)を次の如く分解する。

$$(I) = \begin{pmatrix} I_{out} \\ I_{in} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I_{out} \\ I_{in} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.12)$$

$$(A) = \begin{pmatrix} A_{out} \\ A_{in} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{out} \\ A_{in} \end{bmatrix}$$

$$(I_{out}) = I_{out} \cdot x = \begin{bmatrix} I_{k+1} \\ \vdots \\ I_k \end{bmatrix} [x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n] \quad x > 0$$

$$(I_{in}) = I_{in} \cdot x = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_k \end{bmatrix} [x_1, x_2, \dots, x_k] \quad x > 0 \dots \dots \dots (3.13)$$

$$(A_{out}) = A_{out} \cdot x = \begin{bmatrix} A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} [x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n] \quad x > 0$$

$$(A_{in}) = A_{in} \cdot x = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix} [x_1, x_2, \dots, x_k] \quad x > 0$$

このoutは産出物、inは投入物を表はすものとする。但し(3.13)の左邊(I_{out}), (I_{in}), (A_{out}), (A_{in})は夫々のconeに含まれる任意のベクトルを意味するものとす。さて、公準の成立する條件は次の如くなる。

$$\begin{aligned} (A) \cap (I) &= 0 \dots\dots\dots (3.14) \\ (A) \cap (-I) &= 0 \dots\dots\dots (3.15) \\ (A_{out}) \cap (-I_{out}) &= 0 \\ (A_{in}) \cap (I_{in}) &= 0 \dots\dots\dots (3.16) \end{aligned}$$

(3.14)は二次工程の角錐(A)が、(I)で表はされる正象限と交錯しない事を表はし、更に公準(A)と(B)を組合せて、少くとも一つの投入物を用ひなければ、産出物の生産が不可能である事を意味し、(3.15)も同様に(A)が(-I)と交錯しないといふ条件と共に、少くとも一生産物をも生じない様な投入物に依る生産の無意味な事を示してゐる。(3.16)は指定された投入物商品が逆に産出され、又指定された産出物商品が逆に投入されるといつた状態の生起を排除してゐるのであつて、一次工程の凸多角錐がkヶの産出物商品の軸 I_{out} と、(2-k)ヶの投入物商品の軸 $-I_{in}$ とで圍まれたる象限にユニークに含まれてゐる事を示してゐる。

以上の公準は企業活動固有のものであつて、極めて強度の条件である故、クープマンズにより廣い公準を悉く満足してゐる事は云ふ迄もない。

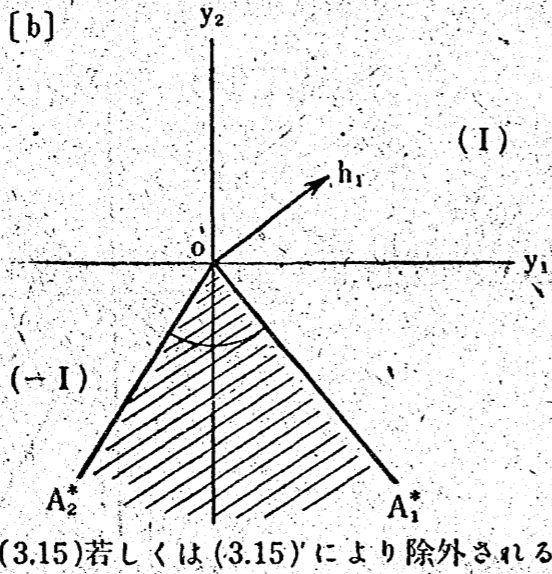
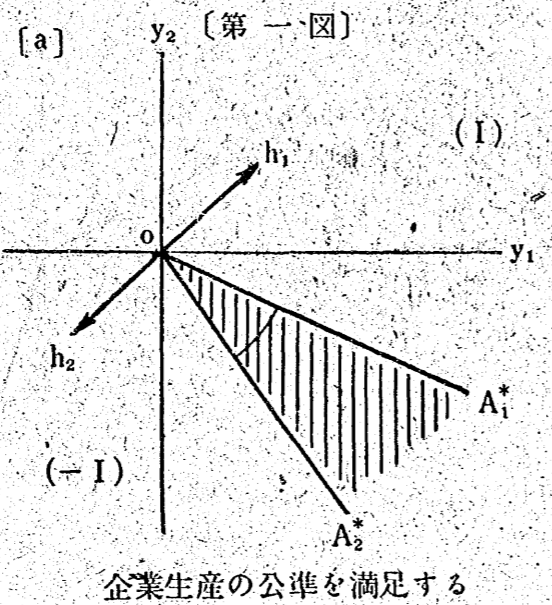
(3.14)と(3.15)の条件は夫々次の重要な条件と等置であることが證明せられる。^(註4)

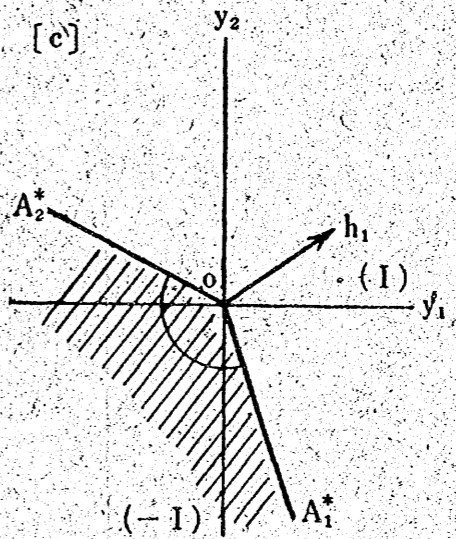
$$\begin{aligned} \lceil k_1/A \leq 0, \quad k_2 > 0 \dots\dots\dots (3.14) \\ \lceil k_2/A \leq 0, \quad k_1 > 0 \dots\dots\dots (3.15) \end{aligned}$$

なる如き正法線 (positive outward normal) が存在する。』
 『なる如き負の法線 (negative inward normal) が存在する。』

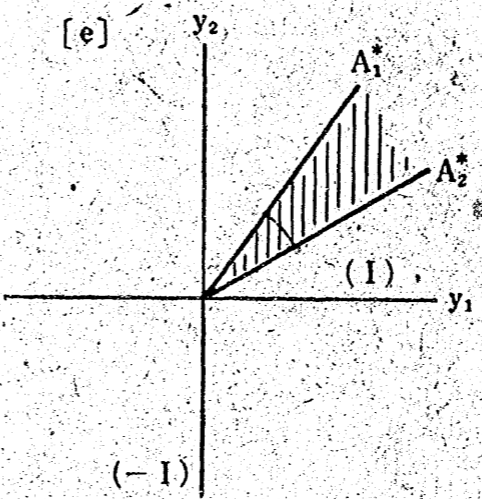
(3.14)と(3.15)は(3.16)と共に生産函数の性質を規定する条件である。この公準を充たす一次工程を達成可能と呼ぶ。

以上のことは第一圖で示される。y₁を産出物の軸、y₂を投入物の軸とし、二種の一次工程が存在する場合である。

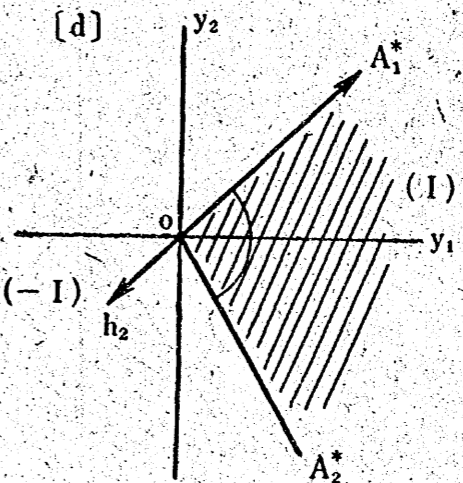




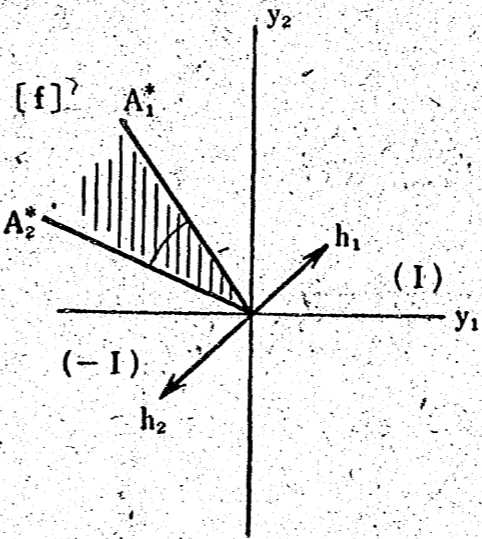
(3.15)或は(3.15)'と(3.16)で除外される。



(3.14)或は(3.14)'により除外される。



(3.14)或は(3.14)'により除外される。



(3.16)により除外される。

(註1) Georgescu-Roegen "The Aggregate Production Function and its Application to Von Neumanns Economic Model," *Activity Analysis* pp. 101~102.
 (註2) Georgescu-Roegen "technological knowledge and the Technical Information Cone" (註3) Koopmans "Analysis of Production" Theorem 3.5.1, p. 52.

O.P. "The Aggregate Production Function" p.103. footnote.
 (註4) David Gale "Convex Polyhedral Cones and Linear Inequalities," *activity analysis* pp. 287~297.

四 生産函数の導出と構造

(a) 凸多角錐の有効点集合の定義

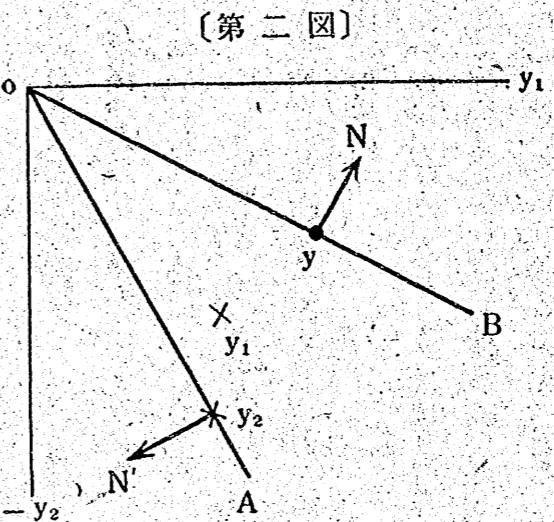
生産函数導出の爲の公準にはクープマンズの定義を用ひる。(第二節前送参照)
 定義—商品空間に於ける点 y は、若しもそれが達成可能な一次工程を表わし、即ち $y \in C(A)$ であり且つ

$$\bar{y} - y \geq 0 \quad \bar{y} \in C(A) \dots\dots\dots (4.1)$$

なる如き達成可能な点 \bar{y} が存在しないならば有効点と呼ばれる。

(b) 生産函数の導出

有効点集合の導出はクープマンズに依り、詳細に展開せられてゐる。ここでは、結論と圖に依る解のみを與へよう。第二圖は達成可能な凸多角錐を示してゐる。前記定義を満足する点集合の必要十分條件は、 \bar{y} がその點に於いて正の法線 N を (A) に對して有する事であり、之は必要條件として \bar{y} が (A) の境界點にある事を必要



〔第二圖〕

とする。」

第二圖に於いて、(A)の内点 y_1 では法線を有さない。境界点集合 OA 上の点 y_2 では法線 N を有するが、負の法線である。条件を充たす点集合は OB のみである。一般には有効点は幾つかの有効面の連結となつて表われる。それ等の有効面を我々は生産函数と呼ぶのである。第三圖では y_1, y_2 は生産物、 y_3 は生産要素量を表わしてゐる。この圖では生産の公準に依つて一次工程の凸多角錐は (y_1, y_2, \dots, y_n) 象限に含まれ、その境界面の中、斜線を施した部分が生産函数の面を表わしてゐると考へられるのである。

數學的には次の如くにして有効面 (efficient facet) が導かれるのであるが、その前に次の二つの事項を定義してお

かねばならない。

(1) 達成可能なる一次工程の集合 (A) に出入する與へられたベクトル流量函数を Γ で表わす。E は外部活動 (exogenous activity) と呼ばれる。

(2) 今 (A) の部分集合、例へば (A_1, A_2, \dots, A_m) が若し

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m + E = 0 \quad \dots \dots \dots (4.3)$$

となるならば、即ち Γ が (A) に含まれるならば E に関して可能なる計畫を構成すると云ふ。

(1) の定義は、凸多角錐に對して、外部組織からの與へられた制約条件を示すもので、例へば Γ は企業的能力——資金一定等を表わすベクトルである。(4.3) は企業の一定資金に関する可能な計畫を構成する事を示しており、従つて (4.3) 式から (4.4) 式が導かれる。

$$A_1^* \Gamma_1 + A_2^* \Gamma_2 + \dots + A_m^* \Gamma_m + E = 0 \quad \dots \dots \dots (4.4)$$

(4.4) 式は (4.5) 式の n 個の次連立方程式に他ならぬ。

$$\begin{aligned} & a_{11}\Gamma_1 + a_{12}\Gamma_2 + \dots + a_{1m}\Gamma_m + E_1 = 0 \\ & a_{21}\Gamma_1 + a_{22}\Gamma_2 + \dots + a_{2m}\Gamma_m + E_2 = 0 \\ & \dots \dots \dots \\ & a_{n1}\Gamma_1 + a_{n2}\Gamma_2 + \dots + a_{nm}\Gamma_m + E_n = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.5)$$

(4.5) を条件として

企業生産函数の分析

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j y_j = X = m \alpha \alpha \dots \dots \dots (4.6)$$

(4.6) 式即ち産出物極大を達成せしむる $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ 若しくはそれに對應せる $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ が有効點となる。一般に解は unique には定まらぬ故、有効點集合となつて現われる。

(c) 生産函数の構造

企業生産の公準から直ちに次の事がわかる。

$$\left. \begin{aligned} y_i &\leq 0 & \text{for } i=1, 2, \dots, k \\ y_j &\geq 0 & \text{for } j=k+1, k+2, \dots, n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.9)$$

$$\sum_{j=1}^k y_j < 0, \quad \sum_{j=k+1}^n y_j > 0 \dots \dots \dots (4.10)$$

(4.10) は、企業の形態が少くとも一生産要素から一生産物を生産するものでなくてはならない事を要請してゐる。

前記の如くに導出された有効面の一つに含まれる任意の一點を $Q_0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ とし Q_0 を通る

Supporting plane ^(註1) を次式で表はす

$$F(M) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i + \sum_{j=k+1}^n \beta_j y_j = 0 \dots \dots \dots (4.11)$$

(4.11) は次を意味する。

$$F(Q_0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i^0 + \sum_{j=k+1}^n \beta_j y_j^0 = 0 \dots \dots \dots (4.12)$$

$$F(Q) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i + \sum_{j=1}^n \beta_j y_j \geq 0 \quad Q \in (A) \dots \dots \dots (4.13)$$

角錐(A)に含まれ且つ有効面に屬さない任意の點を $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ とすれば、前節有効性の定義から (4.9) を考慮して、

$$\left. \begin{aligned} y_i = y_i^0 - \Delta y_i & \quad \Delta y_i \geq 0 \\ y_j = y_j^0 - \Delta y_j & \quad \Delta y_j \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.14)$$

となる。但し Δy はその悉くが零であつてはならぬ事は勿論である。(4.12) と (4.13) (4.14) を組合せし、

$$-\sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta y_i - \sum_{j=k+1}^n \beta_j \Delta y_j > 0 \dots \dots \dots (4.15)$$

従つて、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &\leq 0, & i=1, \dots, k \\ \beta_j &\leq 0, & j=k+1, k+2, \dots, n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.16)$$

α, β の凡てが零になる事は、(4.11) の成立の爲に排除される。

又 (4.16) の係数を有し (4.11) に依つて表わされた Supporting plane は、

- (i) Q_0 が一つの有効面の内點 (Interior point) であるならば、uniquely 定まり、之は Q_0 の屬する有効面そのものと合致し、
- (ii) Q_0 が有効面の境界點 (boundary point) ならば、この平面は單一には定まらず、世に一般には有効面と合致しない。

然し乍ら、(D)の境界点にある Q_0 は(D)の場合のどれか1つのSupporting plane (4.11)を満足する故に、幾つかの有効面のすべての内点に依つて得られた有限箇のSupporting plane (A)に属する部分を生産函数と呼ぶのである。即ち(4.11)で表はされる有限箇のSupporting plane F_a, F_b, F_c, \dots の連結は生産函数を表はしてゐる。この生産函数に就いて、二種の等量曲線が考えられる。第一は生産要素を一定とした場合の生産物間に於ける等量曲線である。(4.11)式に於いて

$$\alpha_i y_i = c_i, \quad c_i = \text{const.} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \dots\dots\dots (4.17)$$

とおくと、等量曲線は(4.11)式と(4.17)式とを次の如く表はされる。

$$F(M) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i + \sum_{j=k+1}^n \beta_j y_j = 0$$

$$\alpha_1 y_1 = c_1$$

$$\alpha_2 y_2 = c_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha_k y_k = c_k$$

$$\beta_{k+1} y_{k+1} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\beta_n y_n = 0$$

但し、 $F(Q_0) = 0, F(Q) \geq 0, Q \in A$ 依つて、 k 箇の $y_i = \frac{c_i}{\alpha_i}$ で截つた $(n-k)$ 次元空間に於いては

$$\sum_{j=k+1}^n \beta_j y_j = - \sum_{j=k+1}^n c_j \quad \beta_j \leq 0 \dots\dots\dots (4.18)$$

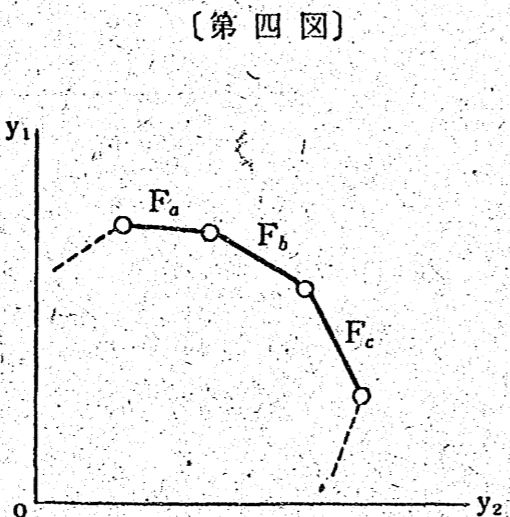
が生産物間の等量曲線を示す。この式は、各有效面 F_a, F_b, F_c, \dots のすべてに就いて成立つ故に、 $\beta_j \geq 0$ なる条件と(4.13)の条件から、 F_a, F_b, F_c, \dots 等の連結面は生産物軸の原点に對して凸であり、且つ、任意の二生産物間の限界代替率が決して遞増しない事を示してゐる。簡単に圖示すれば、生産物二財間の代替關係は第四圖で示され、この $(y_1 - y_2)$ 平面は、生産要素一定なる面に於ける切口であり、圖では三つの有效面が存在し、他の點線部分は有效ならざる多角錐(A)の境界面である。同様にして第二の生産物一定に對する生産要素間の等量曲線が考へられる。 $y_j \geq 0$ なる條件を考へ

$$\beta_j y_j = d_j = \text{const.} \quad d_j \leq 0, \quad j=k+1, k+2, \dots, n \dots\dots\dots (4.18)$$

と置くと、生産物一定に對する k 次元生産要素空間に於いては、等

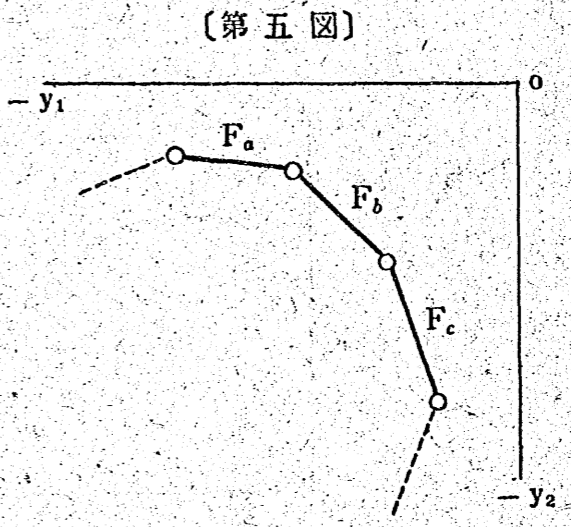
$$\sum_{i=1}^k \alpha_i y_i = - \sum_{j=k+1}^n d_j \quad \alpha_i \leq 0 \dots\dots\dots (4.19)$$

(4.19)は(4.13)と共に、 F_a, F_b, F_c, \dots の連結有效面が、その軸の原点に對して凹であり、且つ限界代替率の非



〔第四圖〕

量曲線は次式で示される。



遞減を示してゐる。(第五圖)
 勿論、生産物間、生産要素間共に、各有效面の内部に於いては限界代替率一定なる事は云ふ迄もない。
 この生産物限界代替率遞増、生産要素限界代替率遞減の性格が、linear programming の必然の結果である事は、重要な特徴である。

(註1) Supporting plane π^k (4.11)(4.12)(4.13)で定義される平面であるが、その數學的な定義は、次を参照した。
 Gale; "Convex Polyhedral Cones and Linear inequalities" Activity analysis p. 290. F. Supporting halfspace and hyperplane and extreme halfspace.

五 企業の生産計畫

(a) 企業規模大小の經濟性、非經濟性の無視と、収益不變をその性格とする linear programming の模型に於いては、投資の大きさの最適點決定は問題とならない。即ち規模の大なる程利潤は大である。
 (b) 市場價格體系を導入すると、企業家は利潤 Δ を極大ならしむる如き均衡點を見つけようとするであらう。正統派の生産理論に於いては、微分法によりラグランジュの常數を用ひて、一義的に、解を決めることが出来るが、我々の模型に於いては、各生産物の目標生産額に對する費用極小なる投入物の組合せか、或は一定資金に依る投入物の

組合せに對する利潤極大の組合せを決定する事を問題とするに過ぎない。結合生産 (Joint product) 或は結合要素 (limitational factors) の存在する生産に於いては、解が一義的に定まらないからである。

(c) 一定資金に依る利潤極大點
 企業がその生産規模に於いて一定の能力を有する——例へば投資總額一定であると假定し、その資金の悉くを投入物に一定の割合で割當てるものとする。企業家は利潤 V の極大化をもたらす多數生産物の組合せを選択する。この場合、前節の生産物間の等量曲線が考察の對象となる。生産物の市場價格體系

$$P = P(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad p_j > 0 \dots \dots \dots (5.1)$$

を導入する。
 m 次元空間に於いて m 箇の有效面を規定する $(m+1)$ 箇の基本一次工程を $A_0^*, A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*$ とすれば

$$\begin{aligned} A_0^* &= \sum_{j=k+1}^n a_{j0} x_j \\ A_1^* &= \sum_{j=k+1}^n a_{j1} x_j \\ &\dots \dots \dots \\ A_m^* &= \sum_{j=k+1}^n a_{jm} x_j \end{aligned} \quad x_j \geq 0 \dots \dots \dots (5.2)$$

ここに x_j は各投入物の與へられた大きさにより決定された一次工程の水準である。簡單化の爲に二種の生産物 y_{k+1}, y_{k+2} のみを考へると任意の有効面 F_m 上の點 $A_m^*(y_{k+1}^m, y_{k+2}^m)$ は各々次で表はされる。

企業生産函數の分析

$$A_1 = A_0^* \alpha + (1 - \alpha) A_1^*$$

$$A_2 = A_1^* \alpha + (1 - \alpha) A_2^*$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_m = A_{m-1}^* \alpha + (1 - \alpha) A_m^* \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

従つて m 箇の有程面で表はされる生産函数は、次式で示される。

$$F_1(M) = \sum_{j=2}^m \beta^j y_j = 0, \quad F_1(A_1) = 0, \quad F_1(y) \geq 0 \quad y \in (A)$$

$$F_2(M) = \sum_{j=3}^m \beta^j y_j = 0, \quad F_2(A_2) = 0, \quad F_2(y) \geq 0 \quad y \in (A)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F_m(M) = \sum \beta_j y_j = 0, \quad F_m(A_m) = 0, \quad F_m(y) \geq 0 \quad y \in (A)$$

之等有效面上の各点 A_m^* に於ける利潤 V_m は次の如し

$$V_m = \sum_{j=k+1}^m p_j y_j^m \quad m=1, \dots, m_0, \dots \dots \dots (5.3)$$

即ち第六圖に於いて、市場價格ベクトル P への A_m^* の射影を P_m とすると OP_m の長さが利潤を表はしてゐるのである。

企業の均衡點は次の如くに決定されるであらう。

(i) (5.3) 式に於ける何れか一つの F_m に就いて

$$\sum_{j=k+1}^m \beta_j^m p_j = 0 \quad \text{なる時。}$$

(第六圖 P と A_1^*, A_2^* との関係)

(5.3) が原點を對つて凸 (convexity) なる事より、均衡點は $0 \leq \alpha \leq 1$ なる任意の α に對し

$$A_m = A_{m-1} \alpha + A_m^* (1 - \alpha)$$

なる點に於いて決定される。この時均衡點は一義的に定まらないが、任意の α に對して悉く二財間の代替率それ等の價格の逆比率に等しくなる。

(5.4)

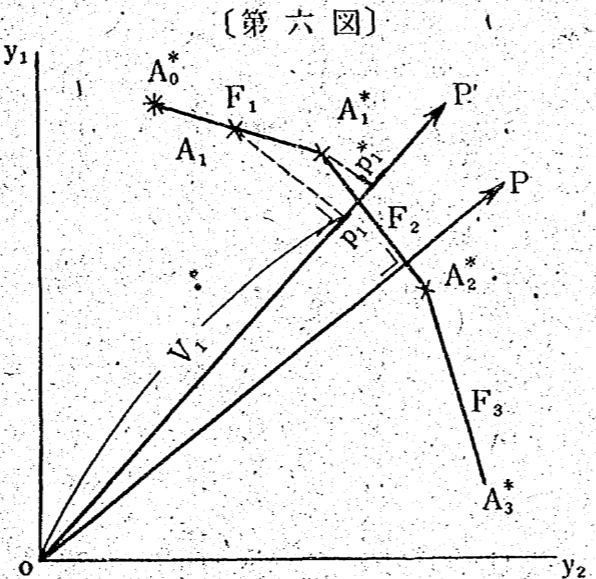
$$\frac{\alpha a_{1, m-1} + (1 - \alpha) a_{1, m}}{\alpha a_{2, m-1} + (1 - \alpha) a_{2, m}} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\alpha a_{m, m-1} + (1 - \alpha) a_{m, m}}{\alpha a_{n-1, m-1} + (1 - \alpha) a_{n-1, m}} = \frac{p_{m-1}}{p_n}$$

(ii) 次に (5.3) の何れかの F_m に就いて $\sum_{j=k}^m p_j \neq 0$ なる時。

(第六圖、 P と A_1^*, A_2^* との関係の場合)
企業生産函数の分析



(第六圖)

A_{m-1}^* と A_m^* に就いて

$$\sum_{j=k+1}^m a_{jm} p_j \geq \sum_{j=k+1}^m a_{jm} p_j \dots \dots \dots (5.5)$$

なるに従つて均衡點は、 A_{m-1}^* 或は A_m^* となる。従つて均衡點に於ける任意の二財間の限界代替率は一般にはその價格の逆比率に等しくならない。價格ベクトル P が A_{m-1}^* 若しくは A_m^* に一致したる時のみ、限界代替率は價格の逆比に等しい。之等の場合には、生産物間の組合せは一義的に定まる事は明瞭である。利潤 V_m は

$$V_m = \sum_{j=k+1}^m a_{jm} p_j x_j \dots \dots \dots (5.6)$$

に依つて即ち價格ベクトル P への A_m^* 點の射影の長さによつて測定せられる。

なほ市場價格體系の變化に對して、(i) の場合は不安定であり、(ii) の場合は極めて安定的である事も容易に導かれる。

(d) 各生産物一定に對する費用極小なる生産要素の最適なる組合せ。

利潤極大點を導いたのと殆んど同様にして、生産要素間の費用極小點を導出し得る。差異は只、生産函數がそれ等の軸の原點に對して凹 (concave) であり、世つ任意の二生産要素間の限界代替率が遞減してゐる事である。第七圖は二生産要素間の代替を示してゐる。結論のみを次に列擧する事にしよう。

價格ベクトル

$$P = P(p_1, p_2, \dots, p_k) \dots \dots \dots (5.7)$$

を導入する。

更に生産函數を、生産要素 k 次元空間に於いて

$$F_m(MD) = \sum_{i=1}^k \alpha_i^m y_i = 0, \quad F_m(A_m) = 0,$$

$$F_i(y) \geq 0, \quad y \in (A) \dots \dots \dots (5.8)$$

$$m = 1, 2, \dots, m$$

で表はす。

こゝで A_m は、有效面 F_m 上の内點とする。

(i) $\sum_{i=1}^k \alpha_i^m p_i = 0$ なる時は有效面 F_m 上の點は悉く均衡點であり、

任意の二財間の限界代替率はそれ等の價格の逆比率に等しく、且つ、價格體系の變化に對して不安定である。

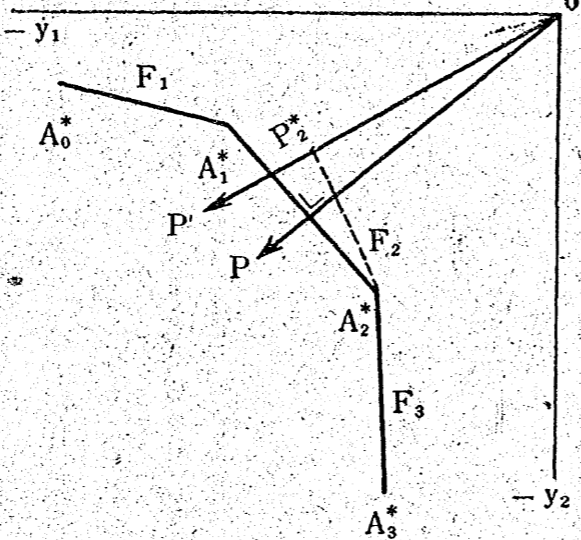
(ii) $\sum_{i=1}^k \alpha_i^m p_i \neq 0$ なる時、その有效面 F_m を形成する基本工程の中の i の A_m^* が均衡點となり、それは費用 C が

$$C = \sum_{i=1}^k \alpha_i^m p_i = \min. \dots \dots \dots (5.9)$$

となる様な點である。限界代替率遞減を考慮に入れると一般には限界代替率はその市場價格の逆比率に等しくはない。 P が A_m^* を通る時のみ兩者は等しい。

やはり前と同様(ii)の場合は市場、價格體系の變化に對して極めて安定的である事が、その原點に對する凹狀 (concave) の性質より容易に見られるであらう。

(第七圖)



(註) 市場價格の導入は Hildreth と Reter が crop rotation plan の簡単なモデルを試みられたる。"On

the choice of a crop rotation plane" Activity analysis pp. 117~188.

六 結 語

以上、我々は企業生産函数の構造を考慮し、その生産計畫決定の模型を形成した。この模型の最大の利點は計算可能といふ點で極めてレアルな意味を持つてゐる事である。然し乍ら未だ從來の生産理論の如く、理論的に企業均衡點を一舉に求め得る様な操作を可能ならしめてゐない。それ等の缺點に關し、nonlinear programming の理論や、從來盲點とされてゐた生産の技術的變化の效果等が研究されてゐる。企業の生産理論を、より完全な模型に形成して、飽く迄現實に接近せしむる事は今後に残された重要な課題である。

(註-1) Herbert A. Simon "Effect of Technological Change in a Linear Model" Activity Analysis pp. 260~284.

資 料

輸送手段發達の地域性について

増 井 健 一

産業における商品生産の發達、云いかえれば資本主義の發達は、産業技術の近代化、その生産性の増大を伴う。そして、この發展した産業技術は、あるいは直接に、あるいは産業技術發展の結果もたらされる商品生産量の、従つて又商品輸送量の増大を通じて間接に、之等の商品の輸送に任ずべき輸送技術(それはそれ自身産業技術の一構成部分であるが)の發展を促す。逆に云つて、此の様な増大した商品の輸送を、しかもより能率的に達成すべき輸送技術の發展は、産業技術發展のための重要なモチヰであることも又明らかである。つまり交通技術の發展は、一般産業技術の發展と相互規定的である。

(注) 産業技術の發展も、むしろその結果の輸送技術の發展、輸送費用の低下という形で經濟的進歩をもたらす事が多い事についてのマートシャルの指摘は印象的である。「おそらく英國が一九世紀を通じて工業の進歩から得た全利益の中四分の三以上のものが、人や貨物の輸送費や、水や燈火や電力やユース輸送費の低下という様な、その間接的影響による。な

輸送手段發達の地域性について

せなら、現代における支配的な經濟的事實は、工業の發展ではなく、輸送業の發展なのであるから。』[A. Marshall, 'Principles of Economics', 5 ed., 1907, p. 674]

この稿は、まず、わが國における陸上貨物輸送手段の發展の跡をかえりみ、次にその發展において見られる地域性を檢出し、更にその地域性と地域性の變化とについて檢討するが、之等の輸送手段の發展についての考察は、上述の様な意味から云う時には、同時にそれを促す所の、或いはそれによつて可能とされる所の、産業の發展及び産業技術の發展についての考察と關連を持つて來るであらう。(注)

(注) この稿を草した動機は、今次戦前には内務省が集計發表していた所のわが國における各種輸送手段の統計が、戦後はどこからも公表されず私の知つてゐる限りでは集計さえもなされてゐる模様がないので、自治廳財政部財政課の方に依頼しその厚意によつて得た資料で、昭和二十七年四月一日現在の各種輸送手段の數を算出した事にある。そしてこの數字を戦前公表の數字と比較しながらこの稿を作つたわけであるが、その資料の關係上、およそ輸送手段と呼ばれ得るものは、それが輸送營業に用いられてゐるが、(免稅品でない限りは)すべてこの數字の中に含まれて來る。従つて、たとえば農業經營の内部だけで用いられてゐる様な荷車も、家庭用の自轉車までも含めて考察される。この點、當然、問題となる所であらうが、ここでは資料に即した考察を行う事