Title	支出拡張線について
Sub Title	Line of expanding expenditure
Author	辻村, 江太郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1949
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.42, No.5/6 (1949. 6) ,p.320(40)- 339(59)
JaLC DOI	10.14991/001.19490601-0040
Abstract	
Notes	資料
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19490601-0040

支出擴張線について

辻村江太郎

序

從來計量經濟學は「經濟理論の具體化」「經濟理論の統計資料による檢證の技術」と考えられているが筆者の構想する計量經濟學は單に理論と統計とを結合する試みではなく既存の理論に基いて資料を分析し理論で與えられる函數のパラメターを算定すると同時に資料から導かれる實驗公式を逆に理論化するプロセズをも包含するものである。過去に於て經濟學は對象の量的把握が困難であつたゝめ物理學その他の諸經驗科學の如き意識的經驗を經ることなく無意識の裡に集積された經驗に基く理論構成を餘儀なくされたゝめ何時しか論理的操作のみで經濟學が成立するかの如き錯覺が行われその痕跡は現代の經濟學者の腦中にすら殘存している。計量經濟學が未だに經濟學の一分科の如く考えられている所以である。もとより徒らに資料を蒐集することが科學でないことは明かであるが經驗的基礎の薄弱な論理體系を以てしてはその推論が如何に精緻を極めても確實に豫見し誤りなく行動することは覺つかない。不確實な前提に依據する精緻な理論體系が寧ろ體系化されざる經驗の集積に劣るものであることは近似數の有效度を無視して克明な計算を行うのと同斷である。Econometric Society の結成後既に廿年を經過した今日の計量經濟學は既にテストの時期を終り理論と統計との結合ではなく意識的經驗と理論構成という不可分の二者をその內に包含するものとして經濟學そのものに迄發展した、否經濟學がはじめて科學としての條件を具備するに至つたと考えるべきであろう。

經濟現象の計量的分析を行うには先ず理論の示すところにしたがつて如何なる資料を蒐集或は作成せねばならぬかを決定し次に資料の信憑性を確める必要がある。資料が統計資料で與えられる場合には統計調査の際に被調査者の犯す誤謬に考慮を拂う必要がありまた多くの場合に資料は標本平均のかたちで與えられるから標本抽出の際に生ずる誤差並に母集團平均の標準偏差を豫め算定して置かねばならない。この後者に推計學的方法が使用される。これらの豫備的手續きは資料から導出される結果の眞實性を評定するために缺くことの出來ないものである。次に相關法に依り理論式の函數形を具體化しパラメターを決定して導出された結果が豫め理論的に考えられた結果と一致するか否かを檢討する。資料分析の結果が理論的豫期に一致すれば我々は理論の妥當性を承認すると同時に導出された函數を經濟政策の基礎として實用しうるのであるが理論的豫期と分析結果とが無視し得ない程度の乖離を示す場合には理論か分析方法かの何れかが不完全であるものと看做さねばならないのである。計量經濟學が單に理論を具體化する試みにすぎぬものであればこの分析は失敗にをわつたとして棄却される運命にある。併し經濟學が經驗科學の地位を主張する以上斯の如きに甘んずべきではない。前述の如く理論は意識すると否とに拘らず經驗的事實に基いているのであり多少ともその理論が構成された社會的條件に依據するから必しも時間的空間的變位を超えて凡ゆる社會的條件に普遍的に妥當するものではなく、社會的條件が變化すれば方程式のパラメターのみでなく函數形それ自身も變化する可能性が存するのである。我々は常に理論發生の社會的條件を考慮してその妥當性の限界を意識せねばならない。したがつて經驗と理論の乖離を發見することにこそ理論發展の契機が含まれることを銘記すべきである。計量的分析の結果が理論との一致を缺く場合に我々のなすべきことは一方に資料の信憑性を考慮しつゝ理論の再構成を試みることであろう。

本稿は右述の計量經濟學の方法を消費者需要法則の研究に適用したものである。需要法則の計量的研究は Henry L. More 以來數多く行われているが Sultsky 以來の價値理論に基いた資料分析は Allen-Bowley の "Family Expenditure" を以つてはじめとする。我々は兩教授の線に沿い支出擴張線を中心として研究をすゝめる。

需要量決定の要因

理論の示すところに従えば、個人の各財に對する消費的需要は次の三要因、即ち所得、諸財貨の價格、及び嗜

好（或は習慣）に依り決定される。したがつて消費的需要法則の計量的研究は先ずこれら三要因以外の要素が存在するか否かを檢討し更に（三要因のみが需要量決定に參與することが確認されたならば）それらの變化に應じて需要量が如何に變化するかを具體的函數關係に於て把握することを目的とせねばならない。多變數函數 $D=f(p,\rho,T)$ p……價格、ρ……貨幣所得、T……嗜好 に於て各變數 p, ρ 及び T の變化に應じる D の變化は全微分によつて與えられる。

$$dD=\frac{\partial D}{\partial p}dp+\frac{\partial D}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial D}{\partial T}dT$$

したがつて各偏微係數 $\frac{\partial D}{\partial p}$, $\frac{\partial D}{\partial \rho}$, $\frac{\partial D}{\partial T}$ の各々が知られゝばこれら三要因の總てが同時に變化した場合に生ずべき需要量の變化を求めることが出來るわけである。これら三要因のうち經濟的に重要なのは價格及び所得であり嗜好は寧ろ社會的條件と考えるべきものであるが本稿では最も重要且つ困難である價格變化の影響を把握する準備的階程として嗜好變化、所得變化に關する測定を行わんとするものである。

こゝでまず分析の手掛りとなる Allen-Bowley の一次形選擇スケール（linear preference scale）の假設を説明し消費者の選擇スケール（ひいては效用函數のかたち）と支出擴張線との關係を明かにしておくことが便利であろう。この假設は勿論均衡購入が實現されることを前提としているのである。

一次形選擇スケールの假説

まず n 箇の財について一般的に成立することを示し次に二財の場合をとつて説明する。「n 財の場合」

限界代替率が各財の購入量を要素とする一次式の比であると云う特殊な場合を假定しこれを「一次形選擇スケール」と呼ぶ。各財の第 n 番目の財に對する限界代替率を R_i とし各財の量を x_i とすれば $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$

$$R_1:R_2:R_3:\ldots\ldots:1=a_1+a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots+a_{1n}x_n:a_2+a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots\ldots+a_{2n}x_n:\ldots\ldots:a_n+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots\ldots+a_{nn}x_n$$

一次形の選擇スケールを假定した場合の均衡條件は次の如くなる。e を總出額（所得）とし e_i を各財に對する支出額とすれば

$$e_1+e_2+\ldots\ldots+e_n=e,\ 及び$$

$$b_1+b_{11}e_1+b_{12}e_2+\ldots\ldots+b_{1n}e_n$$
$$=b_2+b_{21}e_1+b_{22}e_2+\ldots\ldots+b_{2n}e_n$$
$$=\ldots\ldots$$
$$=b_n+b_{n1}e_1+b_{n2}e_2+\ldots\ldots+b_{nn}e_n$$

こゝで $b_r=\frac{a_r}{p_r}$, $b_{rs}=\frac{a_{rs}}{p_rp_s}$ (r 及 $s=1,2,\ldots\ldots n$)（a_r a_{rs} は常數、p_r は各財の價格である。）

この n ケの方程式は e_r を b'_s なる係數を含む e の函數とすることにより解くことが出來る。

$$e_1+e_2+\ldots\ldots+e_n-e=0$$
$$b_{11}b_1+b_{12}b_2+\ldots\ldots+b_{1n}e_n-\lambda+b_1=0$$
$$b_{21}e_1+b_{22}b_2+\ldots\ldots+b_{2n}e_n-\lambda+b_2=0。$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{n1}e_1+b_{n2}e_2+\ldots\ldots+b_{nn}e_n-\lambda+b_n=0$$

こゝで λ は b'_s よりなる n 個の式の共通値である。これを行列式に組むと

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1n} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{2n} & 1 \\ \ldots & & \ldots\ldots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots\ldots & b_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

行列式 B において第一行 r 番目の要素の餘因數を B_r とし b_{rs} の餘因數を B_{rs} とするとこれらの行列式は總て b_{rs} なる係數のみからなる。この行列式を使用して支出 e_r を求めると、

$$e_r=-\frac{1}{B}\left(-eB_r+\sum_{s=1}^{n}b_sB_{sr}\right),\quad (r=1,2,\ldots\ldots n)$$

即ち $e_r=k_re+C_r$,

こゝで $k_r=\frac{B_r}{B}$, $C_r=-\sum_{s=1}^{n}b_s\frac{B_{sr}}{B}$

これが Allen-Bowley の支出擴張方程式である。以上一般的に n 財の場合について成立することを示したが、これを二財の場合について行うと一層明瞭に理解することが出來る。

二財を X_1 及び X_2 財とし前者に對する後者の限界代替率を R とすると

$$R=\frac{a_1+a_{11}x_1+a_{12}x_2}{a_2+a_{21}x_1+a_{22}x_2}$$

こゝで各 a_{rs} は常數である。この様に形式は限定されるけれども、なお六ケの常數 a_1 に種々なる値を與えることにより選擇スケールは相當程度變化しうるのである。總支出額 e と價格 p_1 及び p_2 が與えられたとき個人の行う購入が均衡するための條件は次の如くである。

$$\frac{a_1+a_{11}x_1+a_{12}x_2}{a_2+a_{21}x_1+a_{22}x_2}=\frac{p_1}{p_2}$$ 及び $p_1x_1+p_2x_2=e$,

ここで $e_1=p_1x_1$, $e_2=p_2x_2$, $a_1=p_1b_1$, $a_2=p_2b_2$

$a_{11}=p_1^2b_{11}$, $a_{12}=p_1p_2b_{12}$, $a_{21}=p_1p_2b_{21}$,

$a_{22}=p_2^2b_{22}$

と置くと右の各式は次の如くなる。

$$b_1+b_{11}e_1+b_{12}e_2=b_2+b_{21}e_1+b_{22}e_2$$ 及び

$$e_1+e_2=e$$

$e_2=e-e_1$ として消去すると

$$b_1+b_{11}e_1+b_{12}(e-e_1)=b_2+b_{21}e_1+b_{22}(e-e_1)$$ となり

$$k_1=\frac{b_{22}-b_{12}}{b_{11}+b_{22}-b_{12}-b_{21}},\quad C_1=\frac{b_2-b_1}{b_{11}+b_{22}-b_{12}-b_{21}}$$ とおけば

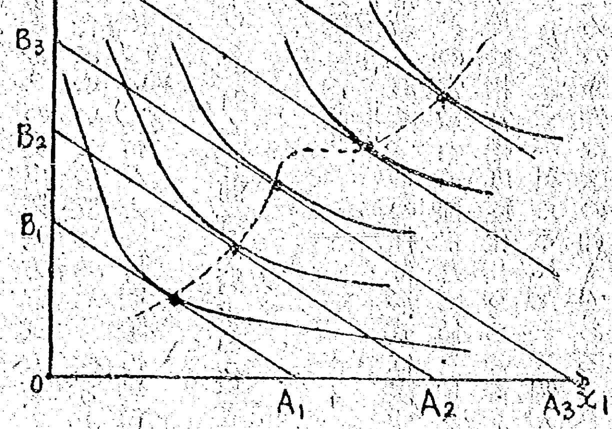
$e_1=k_1e+C_1$ となり同様にして $e_2=k_2e+c_2$ となる。

したがつて一次形選擇スケールを假定すれば各支出は一次の關係で總支出額に依存する。

更に右の二つの一次方程式から e を消去すれば次の式を得る。

$$\frac{e_1}{k_1}-\frac{e_2}{k_2}=\frac{c_1}{k_1}-\frac{c_2}{k_2},\quad \frac{p_1}{k_1}x_1-\frac{p_2}{k_2}x_2=\frac{c_1}{k_1}-\frac{c_2}{k_2}$$

これは總支出額の變化に應じる均衡購入量 x_1 及び x_2 により換言すれば圖上 E_1, E_2 等の……諸點の座標によつて滿足される關係である。一次形選擇スケールの場合にはこの方程式が一次式であるから圖上の曲線 E_1, E_2……は直線となる。(E_1, E_2……は Hicks の所得－消費曲線)



こゝで注意せねばならぬのは常數 k_r 及び c_r の構成要素たる各係數 b は一次形選擇スケールの諸常數 a のみならず所與の市場價格にも依存していると云うことである。したがつて k_r 及び c_r の値換言すれば各財への支出額の總支出額に對する依存關係は一定の選擇スケール及び一定の市場價格組織により決定されるものである。

個人の支出表に含まれる總ての財貨を考慮するならば k_r 及び c_r の數値には夫々一つの條件が附せられる。個々の各財貨への支出額の合計は總支出額に等しくなければならぬからeの値の如何に拘らず次の式が成立せねばならない。

$$e=\sum_{r=1}^{n}e_r=\left(\sum_{r=1}^{n}k_r\right)e+\left(\sum_{r=1}^{n}c_r\right)$$

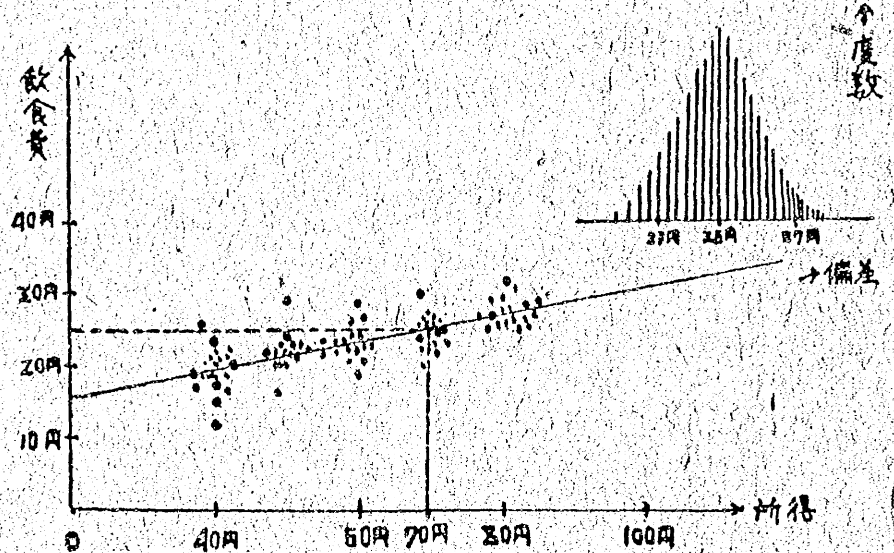
したがつて $\sum_{r=1}^{n}k_r=1$ また $\sum_{r=1}^{n}c_r=0$

即ち各財についての k_r の總和は單數に等しく c_r の總和は零に等しい。このことは右に示した二財の場合に於ける k_r 及び c_r の式によつて照査される。

Linear の假説に基く嗜好變化の測定

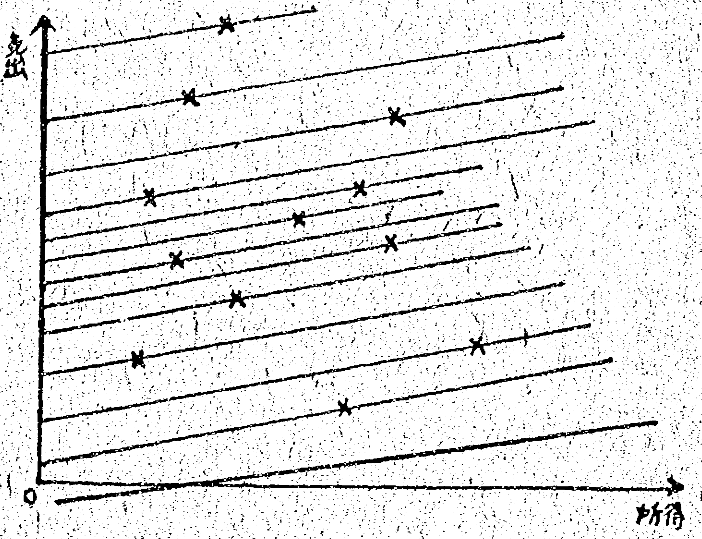
前節に述べたのが Allen-Bowley によつて與えられた總支出額の變化に伴う支出配分變化の理論的分析であるが理論的分析の諸概念を統計資料に關聯せしめるに際して我々は一つの重要な事實を考慮しなければならない。即ちこの假說の示すところのものは一定の選擇スケールに基く一家族の支出法則である。したがつてこの分析は同一の選擇體系 (complex of preference) を有することが豫め知られている諸家族の集團から蒐集された家計調査資料に對してのみ直に適用し得るものである。併し乍ら實際には諸家族の必要乃至嗜好は多樣であつて先天的嗜好のほかに從事する職業の種類及び居住地の地理的條件により種々に異る。

先天的嗜好は經濟學の分析對象とならないから重要なのは社會的條件たる後の二者である。前節で需要量決定の要因が所得價格嗜好の三者以外に存在するか否かを檢討すると述べたが、それは三要因を常數とした時に集團內に含まれる因子が均質化されるか否かに掛つているのである。この場合には同一時點、同一地點に於ける同一職業階級の同一所得階級に屬する集團に含まれる諸家族の同一財貨に對する支出額が如何なる度數分布をなすかが問題となるのである。もしこれが正常分布をなすならば各家族の支出額の相違は何等特定の原因に歸するものでなく全く偶然的なものであると考えることが出來る。即ち集團構成にあたつて homogeneity の實現に成功したことになりこれ以上の理論的分析を要しない。反對に正常分布をなさないときには集團內部が未だ heterogeneous であり何等か特定の原因が作用しているものとみて更に理論的な分析を行わなければならぬのである。



の検定を行うためには調査原票を必要とし筆者は資料の關係でこれを行わなかつたが Allen-Bowley の研究では略〻正常分布が得られると認められている。扨てこの検定により需要量を決定する要因が前述の三者のみであると確認されたならば次には所得（總支出額）水準と支出配分との關係が果して $e_r=ke+c_r$ となるか否かを資料から實證的に判斷しなければならない。

Linear の假説に基く支出擴張方程式は市場價格組織及び選擇スケールが與えられた場合には特定財貨への支出額がその家族の總支出額（所得）に一次の關係で依存することを示している。しからばこの假説の妥當性を檢證するにはどうしたらよいかこれが計量の技術的な課題となる。直に考えられるのは一家族を選びその所得を種種に變化して反應を觀察する方法であるが、この様な實驗は行ひ得るものでないから何らか他の手續によるほかない。技術的に可能な最良の方法は前述の homogeneous な集團から所得水準を異にする多數の家族を選び特定財に對する支出額が各家族毎に變化する推移過程を所得水準との關係に於て檢討することであろう。しかし各家族に特有の先天的嗜好が存在することは方程式の常數 k_r 及び c_r の値が各家族毎に相違することを意味するから



この方法が與える支出擴張線は圖上の各線を平均したものに他ならず各家族の有する支出擴出性向そのまゝを示すものではないことに注意せねばならない。このことは我々が實證的に把握しうる可能性の限界を示すものであり少くともこの問題に於ては平均人の支出擴張法則が知りうるすべてである。

以上述べた條件を具備すると思われる集團について水平軸に所得を目盛り垂直軸に支出額を目盛つた平面上に相關點圖を描くと略〻直線的な分布をなすことがわかる。最小自乘法により直線の當嵌めを行つて相關係數を求めると概ね .80 以上の良好な結果を得る。このことは Linear の假説の近似度が相當に高いことを意味する。この様にして支出擴張線が引かれたならばパラメター k_r 及び c_r の値を集團別に比較して夫々の集團の平均的選擇スケールが如何なる差異を存するかを測定しうるのである。我が國の資料を用ひて地域別職業別の比較を行うと次表の如くである。

第一表

都市名	k^1	c^1
東京	0.025	9.21
京都	0.026	9.52
大阪	0.028	9.80
金澤	0.021	8.53
神戸	0.017	10.35
長崎	0.013	8.42
廣島	0.012	10.30
横濱	0.038	7.40
札幌	0.033	7.37

地域別平均支出函數（消費單位當り）
〔昭和 1—2 年、内閣統計局家計調査資料による〕

第一表は全國九都市の飲食費グループに對する平均的選擇スケールの變化を示すものである。しかしこの比較

が嚴密な意味で可能であるためには價格體系不變という前提が滿たされなければならない。各都市の市場の狀態は一定とはなし難いから、この結果は近似的なものに過ぎないが東京、大阪、京都の三大都市が極めて類似しているのは興味ある事實である。各都市毎に小賣物價を檢討してその絕對的水準及び相對的價格關係に依る影響を除去することは或程度まで可能であるからこの手續きを行つて一層近似度の高い比較を行えば何等かの規則性が發見しうるかもしれない。

同一地域の同一時點に於ける職種別の平均的選擇スケールを比較することは市場狀態一定の前提が滿足されているから一層有效である。

第二表は東京市及びその附近の給料生活者と勞働者を必需品の四項目について比較したものである。

（第二表）　昭和二年東京市及びその附近に於ける職種別平均支出函數

		給料生活者	勞働者
消費單位當り	米麥費	$Y_R=-0.001E+4.37$	$Y_R=-0.006E+4.54$
	飲食費總額	$Y_F=\ 0.031E+8.75$	$Y_F=\ 0.019E+9.66$
	被服費	$Y_C=\ 0.032E+0.79$	$Y_C=\ 0.031E-0.13$
	住居費	$Y_H=\ 0.16\ E+8.1$	$Y_H=\ 0.13\ E+3.6$
	光熱費	$Y_L=\ 0.036E+0.46$	$Y_L=\ 0.023E+2.25$

支出擴張方程式 $Y=kE+C$ の常數 C は支出擴張線が垂直軸と交つて出來る截片であるが Allen-Bowley はその大さを以て緊急度順位を示すものとし C が正なる値をとる財を必需品負となるものを贅澤品と定義してゐる。これによればこゝに擧げた品目は給料生活者にとつてはすべて必需品勞働者にとつては被服項目以外のものが必需品となつている。この際 k は限界支出係數であつて米麥費は兩階級ともに負なる値をとるが殆ど零に等しい。全體を通じて k の値が極めて小であるのはエンゲル法則の存在を示すものである。飲食費、光熱費の緊急度は勞働者にとつて高く、被服費、住居費は給料生活者において高い緊急度を示すことに注意されたい。

Nonlinear の支出擴張線

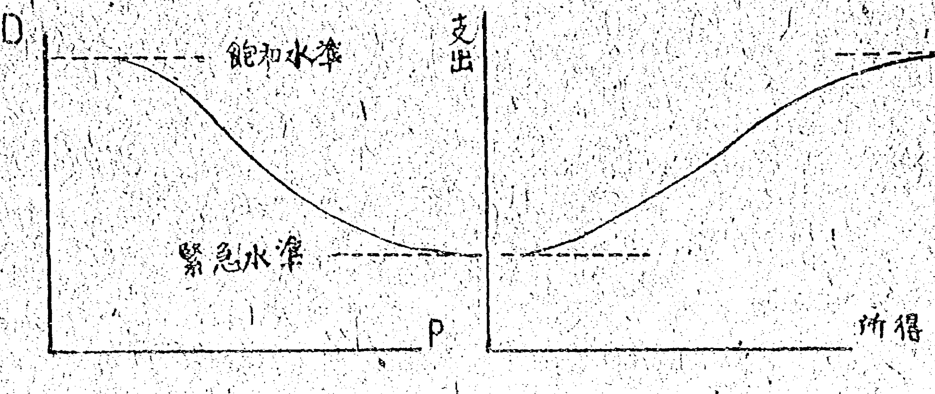
前節では Linear の假説に基く直線的支出擴張線が資料分析の結果と可成りよく一致することを知つたがそれは資料から得られる所得範圍についてのことであつてこの範圍以下若しくは以上の所得についても普遍的に妥當するという保證を與えるものではない。

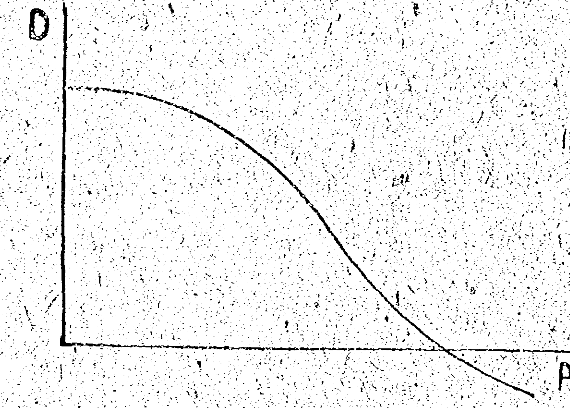
一定の市場價格組織の下に於て所得水準とは獨立に一定の係數 k' 及び c' が有效であるということは選擇スケールの係數 a が所得水準から獨立であることを意味するがこれには疑問の餘地がある。この問題は無差別曲線系の有效域に關するものとして重要（註1）であるが理論的な解析は別の機會にゆずり本稿では從來多く論じられている需要曲線（價格—需要）の形狀から推論するにとゞめて置く。マーシャルは需要量の價格彈力性の大小について次の如く論じている。先ず一般の財について

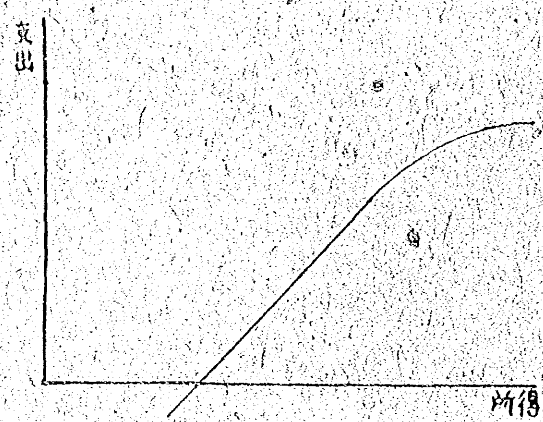
「或物の價格が或階級にとつて甚だ高い場合には此の階級に屬する人達はその僅量しか買わない。……其の價格の著しい低落はその需要を增大する。需要の彈力性は高い價格に大きく、そして中位の價格に大きいか或ひは少くとも相當の程度のものであるが、その價格の低落に伴つて小となり、價格の低落にして飽和點に達する程進むならば彈力性は漸次消失する」次に必需品について

「必需品の場合は例外である。小麥の價格が非常に高い時でも又非常に低い時でもその需要は非常に小なる彈力性しか有しない。……」

いま特に對象を必需品の各グループ、特に飲食費グループに限定すると、該グループの價格水準が極めて高いときには彈力性の小さい主食品が需要量の下限を決定し、逆に價格水準の極めて低い場合は副食品の最も贅澤なるものと雖も飽和點に達するから彈力性は消失するに至る。いま價格を X 軸に、需要量を Y 軸にとつて需要曲線を描くと、曲線の兩端に於て、彈力性係數の値が小となるのであるから、曲線は價格軸に平行な直線に漸近する。さてこの價格—消費の曲線を所得消費の曲線に置き換える場合に價格水準が極めて高いことゝ所得額が極めて小であることゝはこの場合同義と考へ得るから、後者は前者を裏返した形をとる。即ち必需品グループに對する支出擴張線は緊急水準（註2）を下限とし飽和水準を上限とする







右上りの曲線となる。

いま我々は先づ必需品グループに對しても有効である。たゞこの場合には下限となる緊急水準が負となるから圖の如くなるが上半部の形狀は理論的に承認し得るものである。したがつて我々はこゝに述べた如き條件を滿足する函數形を見出すことにより支出擴張方程式の一般式と考えてよいであろう。この樣な形狀の支出擴張線が描かれる場合には限界支出係數 a' は所得水準に應じて

變化するからその決定要因たる選擇スケールの係數 a' は所得水準の從屬變數であると考えるか、或いは Nonlinear の選擇スケールを考えるかしなければならない。

さて右に述べた支出擴張法則の實證性を資料に依つて檢討すると昭和一〇—一二年全國九都市のうち五都市の資料が略〻豫想される如き形狀の相關點圖を與え、〔註3〕又昭和六—七年の全國勞働者平均の資料もこの條件を滿足する。總ての資料が必しも豫想通りの結果を示さないのは家計調査の例數が極めて小であるため標本平均値の母集團平均からの偏差が大となる結果であるとも考えられる。次に右の如き Nonlinear 支出擴張線の方程式としては双曲函數の正切の式即ち $\tanh y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ があるけれどもこゝでは人口增加法則を示すものとして我々に親しみ深い Logistic curve の方程式を使用して當嵌めを行うことにする。

〔註1〕 試みに Linear の支出擴張線を無差別曲線系の有効域との關係を考えると次の樣になる。まず支出の對象となる全商品を一財或は一グループ（例えば飲食費グループ）と他のすべての財とに二分すると各の支出擴張線の方程式は

$Y_1=kE+C\cdots\cdots(1)$;　$Y_2=(1-k)E-C\cdots\cdots(2)$ （k 及び c は正值）となる

(1)(2) より $\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{kE+c}{E(1-k)-c}$,　$Y_1=P_1x_1$, $Y_2=P_2x_2$ とおく事が可能であるとすれば $\frac{P_1x_1}{P_2x_2}=\frac{kE+c}{(1-k)E-c}$

$\frac{P_1}{P_2}=\frac{(kE+c)x_2}{\{(1-k)E-c\}x_1}$ ここで $\frac{P_1}{P_2}=\frac{-dx_2}{dx_1}$ なる假定を導入すると $\frac{-dx_2}{dx_1}=\frac{kE+c}{(1-k)E-c}\cdot\frac{x_2}{x_1}$,　$\frac{kE+c}{(1-k)E-c}=a$ とおいて微分方程式をとくと

$\frac{dx_2}{x_2}=-a\frac{dx_1}{x_1}$,　$\int\frac{dx_2}{x_2}=-a\int\frac{dx_1}{x_1}$

$\log ex_2+m_2=-a(\log x_1+m_1)$ 〔m_1m_2 は積分常數〕

$\log ex_2=-a\log ex_1-\log[\mathrm{antelog}(am_1+m_2)]$,

$\mathrm{antelog}(am_1+m_2)=n$ とおくと $x_2=\frac{1}{x_1^{a}n}$ となる。

これを無差別曲線の方程式と考えていわゆる normal type となるべき條件を求めると $\frac{dx_2}{dx_1}=-ax_1^{-(a+1)}n$,

$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}=a(a+1)x_1^{-(a+2)}n$ となり $a>0$ なるとき原點に凸となつて曲線の條件をみたす。

$a>0$ なる條件は $\frac{kE+c}{(1-k)E-c}>0$, 分子は正であるから $(1-k)E-c>0$, $(1-k)E>c$, $E>\frac{C}{1-k}$ が條件となる。

以上を要約すれば飲食費グループと他の一切の商品との代替關係は所與の市場價格組織の下で所得が $\frac{C}{1-k}$ 以上の場合はじめて發生することになるのである。

〔註2〕 參考のために一言すると必要品グループの需要曲線を計量的に導出する試みな René Roy によって行はれている。（"La Damande dans sses rapports avec la repartition des ravenus", Metron, VIII, No. 3 [1930]）

Roy は「各個人は極大消費點あるいは飽和點を各商品についてもち小數の例外を除けば所得に無關係に凡ての諸個人に對して同一の飽和點が存在する」と前提し、所與の任意の價格指數 P に對して或る人には極大量 q_e を消費する資力をもち、他の人には q_e 以下を消費するとする。第一群に屬する各個人は q_eP を支出すると考えられるからこの集團の支出は q_eP に人員數を乘じたものとなる。

$q_eP\int_{q_eP}^{\infty}n(p)dp$ （$\int_{q_eP}^{\infty}n(r)dp$ は所得 q_eP 以上の人員數を示す）となり第二群（より貧しい人々）の支出は

$\int_{r_0}^{q_eP}n(r)dr$ となる。（r_0 は最低所得）

したがつて第二群の支出は

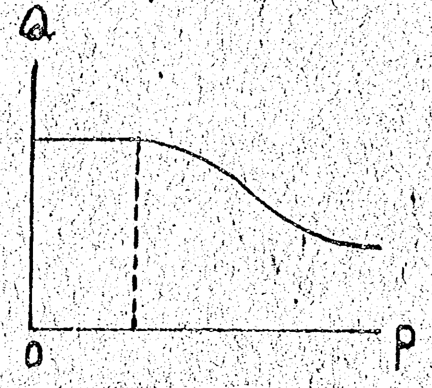
(1) $QP=\int_{x_0}^{q_eP} r.n(r)dr+q_eP\int_{q_eP}^{\infty} n(r)dr$ となる。之に Pareto の所得分布函數 $N=\frac{A}{x^2}$ を導入して $\int_{x}^{\infty} n(r)=Ax^{-2}$, $n(r)=aAr^{-(a+1)}$ としこれを (1) に代入して次式を得る

(2) $QP=aA\int_{x_0}^{q_eP} r^{-a}dr+q_eP.A.(q_eP)^{-2}$

之を積分して P で除すことにより R_{oy} は第一級必需品に對する需要法則を次の如く表現している。

(3) $Q=\frac{A}{a-1}\left[\frac{a}{r_0^{a-1}}\cdot\frac{1}{P}-\frac{1}{q_e^{a-1}}\cdot\frac{1}{P^2}\right]$

この曲線は圖の如くなる。彼の置いた前提は可成り非現實的であるがその方法の獨創性は注目に値する。



〔註 3〕 昭和 1.2 年內閣統計局家計調査資料より

所得	飲食費								
	東京	札幌	橫濱	金澤	名古屋	京都	大阪	神戶	廣島
60	29.0	25.0	30.2	21.5	23.9	29.3	25.9	30.5	29.5
80	30.9	29.8	32.4	27.5	27.9	31.5	29.8	29.4	26.8
100	33.6	35.4	34.9	32.2	30.8	33.6	35.0	33.8	30.4
120	33.2	37.0	37.3	34.5	34.9	36.5	38.1	36.6	35.2
140	42.6	42.2	42.3	40.2	38.7	42.7	40.1	40.6	39.9
160	48.4	42.5	45.2	[illegible]	41.9	47.4	41.5	45.5	45.6
180	49.8	43.3	50.9	47.9	43.2	49.5	48.0	47.3	51.1
200	50.3	54.1	51.0	52.8	48.5	51.6	48.0	48.1	45.1
220	58.2	64.0	57.3	58.8	52.9	53.0	56.9	54.7	49.1

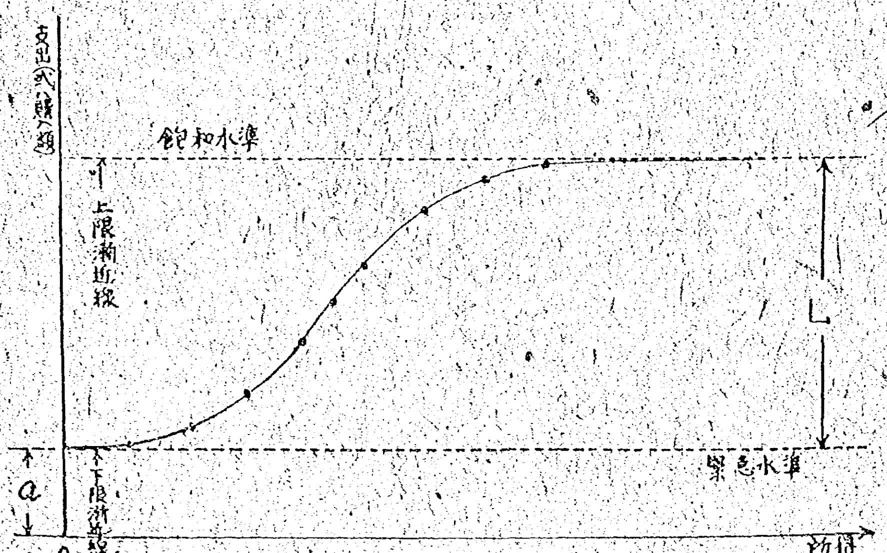
Logistic 型支出擴張線の常嵌(註1)

前節に近べた様な支出擴張線の方程式は次のかたちで示される。

$$y=a+\frac{L}{1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}\quad\left(\begin{array}{l}x\text{は所得金額}\\ y\text{は飲食費支出額}\end{array}\right)$$

右式で $a=0$ とおけば G. U. Yule の表現による人口增加曲線の方程式 $y=\frac{L}{1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}$ と一致する。人口增加曲線に於ける L は極限人口を、β は人口が極限人口の二分の一に達する時點を示し曲線は β を彎曲點として對稱形をなすのであるが支出擴張線の場合は前提により有限値の下方漸近線をもつ。圖の如く下方漸近線の座標は緊急水準を示すのである。

曲線の當嵌を行うには極限支出 L 最低支出 a 彎曲點の座標 β 及び金額を示すパラメター α なる四箇の常數を決定しなければならない。この際に Linear の場合の如く最小自乘法を使用しうれば最もよいのであるが計算の勞が極めて大で到底實用し難いため(註2)止むを得ず誤差の大となることを承知で他の方法に依らざるを得なかった。こゝで使用した常數決定法は Verhulst 及び Pearl-

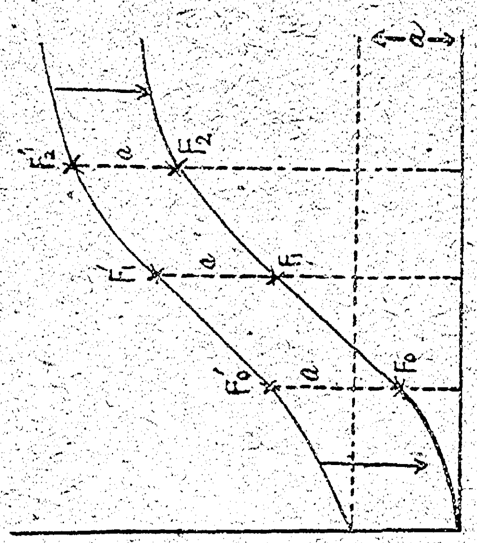


ロジスティック型支出拡張線

Reed の人口増加曲線當嵌め法を有限値の下方漸近線を有する曲線の場合に改造したものである。Verhulst の方法は等時隔の三時點の人口 P_0, P_1, P_2 から次の公式によりまず極限人口 L を求めるのであるが

$$L=\frac{P_1(P_0P_1+P_1P_2-2P_0P_2)}{P_1^2-P_0P_2}$$

支出擴張線ロジスティック曲線は假定に依り有限値の下方漸近線を有さねばならぬからデータで與えられる等間隔の三つの支出額は P_0, P_1, P_2 に相當するものではなく P_0, P_1, P_2 に相當するものは支出擴張線を a だけ垂直下方に平行移動した場合の曲線上の各點 F_0, F_1, F_2 であり データで與えられる各數値はこれに下限支出 a を加えたもの、即ち F_0+a F_1+a, F_2+a であって實際には F_0, F_1, F_2 及び a は



未知であるのだからこの條件に應ずる方法を考案せねばならない。いま $F_0+a=F_0^1, F_1+a=F_1^1,$ ……等と置いてこれを前節に示された上限決定の式に投入すれば

$$L^1=\frac{F^{11}(F_0^1F_1^1+F_1^1F_2^1-2F_0^1F_2^1)}{F_1^{12}-F_0^1F_2^1}$$ となる。

而して實際の支出擴張線の上限の値は $L+a$ となるべきであるから上限と擬上限 L^1 との差を d とすれば

$d=L^1-(L+a)$　即ち

$$d=\frac{F_1^1(F_0^1F^{11}+F_1^1F_2^1-2F_0^1F_2^1)}{F_1^{12}-F_0^1F_2^1}-\left(\frac{F_1(F_0F_1+F_1F_2-2F_0F_2)}{F_1^2-F_0F_2}+a\right)$$

となる。$F_0=F_0^1-a,$ ……を右邊に代入し且

$$F_0^1F_1^1+F_1^1F_{21}-2F_0^1F_2^1=A,\ F_1^{12}-F_0^1F_2^1=B,$$

$$F_0^1+F_2^1-2F_1^1=C$$ と置けば

$$L^1-(L+a)=d=\frac{a(A-B)^2}{B(B+ac)}$$ となる。

こゝで L^1 及び $A, B, C,$ は F_0^1, F_1^1……より成るから未知數は L と a である。したがってデータより二組の $F_0^1, F_1^1,$ ……をとり方程式を二箇作れば L 及び a を決定しうる。即ち

$$L_1^1-(L+a)=d_1^{(1)},\ 及び\ L_2^1-(L+a)=d_2^{(2)}$$

の(1)より(2)を減ずれば

$$L_1^1-L_2^1=d_1-d_2$$

となり、まず a の値を決定することが出來る。次に a の値を(1)或は(2)に代入すれば L の値が求められるわけである。L は所與の分布を圖上で a だけ下方に垂直移動して、下限零なるロジスティック曲線を作ったときの上限の値である。この算出にあたって注意すべきことはデータから三箇の等間隔の點をとる際は間隔が廣い程良好なるフィットが得られること及び

$C=F_0^1+F_2^1+2F_1^1=0$ なる場合には $d=a$ となって a が決定不能となるから $c\neq o$ なる如く三箇の數値を選ばねばならぬことである。以上の手續きを昭和一二一二年の地方別生計費調査に於て最も良好なロジスティック分布をなすと思われる京都府の資料に適用すると次の如くである。

（單位圓）

所　得	50	70	90	110	130	150	170	190	210
飲食費	29.3	31.5	33.6	36.5	42.7	47.4	49.5	51.6	53.0

$F_0^1=29.3, F_1^1=42.7, F^1_2=53.0$ より

$$L_1=64.49,\ d_1=\frac{19044a}{73116.2-838.2a}\quad(1)$$

$F_0^{11}=31.5, F_1^{11}=42.7, F_2^{11}=51.6$ より

$$L_2=64.21,\ d_2=\frac{9940,1a}{39164.4-455.2a}\quad(2)$$

$F_0^{111}=33.6, F_1^{111}=47.4, F_2^{111}=53.0$ より

$$L_3=55.29,\ d_3=\frac{5972.2a}{217156-3821.2a}\quad(3)$$

(1)と(3)より $a=26$ 又は 56

(2)と(3)より $a=24.5$ 又は 85.5 を得る。a の値は求める曲線の下限の値であるから 56. 58.5 等は妥當しない。したがって $a=26$ 或ひは $a=24.5$ が採用される。兩者の値が完全に一致せぬのはデータが誤差を含むためである。兩者の中間をとり $a=23$ として $L+a$ を算出すると(1)より 55.31, (3)より 54.07 を得る。前述の如くモデルに依るテストの結果として三箇の數値の間隔が大なる程誤差が小なることが知られているから試みに(1)に 5 (2)に 4 (3)に 3 を加重して平均すると $\frac{m}{n}+a=55.0$ るを得。

以上により所與のデータにロジスティック曲線を當嵌めた場合の下限の値は 25.0 上限は 55.0 なることが知られまたこれより $L=30$ 及び彎曲點の値 $a+\frac{L}{2}=40$ を得る。

他の二箇のパラメター α 及び β は前と同様二箇の方

程式から決定しうる。資料より$(x=60,y=29.3)$，$(x=80,y=31.5)$なる二組をとると

$$(1)\quad 29.3=25+\frac{30}{1+l^{\frac{\beta-60}{\alpha}}},\quad l^{\frac{\beta-60}{\alpha}}=\frac{30-4.3}{4.3}=6$$

$$\frac{\beta-60}{\alpha}\log l=\log 6,\quad \frac{\beta-60}{\alpha}=1.81$$

$$(2)\quad 31.5=25+\frac{30}{1+l^{\frac{\beta-80}{\alpha}}},\quad \frac{\beta-80}{\alpha}=1.30$$

(1)と(2)より $\alpha=40$, $\beta=132$ を得る。β は彎曲點の x 座標である。よつて求める支出擴張線の方程式は次の如くなる。

$$y=25+\frac{30}{1+l^{\frac{122-x}{40}}}$$

右式により x に對應する y の理論値を求め實際値と比較すると次の如くなる。(Y)は實際値

X	60	80	100	120	140	160	180	200	220
Y	29.32	31.49	34.34	37.76	41.48	45.0	47.9	50.42	51.92
(Y)	29.3	31.5	36.6	36.5	42.7	47.4	49.5	51.6	53.0

右より標準誤差を算出すると

$$S_y=\sqrt{\frac{\sum(d^2)}{N}}=\sqrt{\frac{14.2}{9}}=1.26$$ となり相關比は

$$\eta_y=\sqrt{1-\frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}=\sqrt{1-\frac{14.2}{74.5}}=0.9$$ となつてアレン・ボウレイ線 $y=0.165x+20.3$ の相關係數 $Y=0.86$ の 1.07 倍である。

〔註1〕人口 Logistic 曲線の當嵌めについてはすべて森田優三教授著「人口増加の分析」に依つた。

〔註2〕試みに常數決定の公式をつくると左の如くなる。

$$\sum y=na+b\sum\frac{1}{1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}\cdots\cdots(1)$$

$$\sum y\frac{1}{1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}=a\sum\frac{1}{1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}+\sum\frac{1}{\left(1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}\right)^2}\cdots\cdots(2)$$

$$\sum y\frac{(\beta-x)l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}{\left(1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}\right)^2}=a\sum\frac{(\beta-x)l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}{\left(1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}\right)^2}+b\sum\frac{(\beta-x)l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}{\left(1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}\right)}\cdots\cdots(3)$$

$$\sum y\frac{l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}{\left(1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}\right)^2}=a\sum\frac{e^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}{\left(1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}\right)^2}+b\sum\frac{l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}}{\left(1+l^{\frac{\beta-x}{\alpha}}\right)^2}\cdots\cdots(4)$$

Logistic 型支出擴張線の特性

前述の如く直線型支出擴張線よりも Logistic 線の方が近似度が高いことが確認されゝば、この經驗的な結果から選擇スケールが所得水準の變化に伴つて變化することが歸納的に推論され無差別曲線系の形狀に關する我々の知識を Linear の假說以上に一歩進めることが出來るわけである。特に該線により推定され緊急水準、飽和水準は各財間或ひは各グループ間の代替可能の限界についての知識を與えるものであり、價格體系の變化に伴う兩者の變化を辿ることにより飽和域 (satiable range) とも云うべきものを見出し得れば價格論上また生計費論上大なる收獲となるであろう。

特定の市場價格組織に對應する資料から得られた常數値は嚴密に言つてそのまゝ一般的な場合に應用することは出來ないが Linear の假說の與えるものよりは實用性がある。Allen Bowley が直線型支出擴張線 $Y=kE+c$ に於ける截片 c' の値を以て緊急度順位 (Order of urgency) を示すものと考えたことは前述したが Logistic 線の常數 a' は緊急水準 (Level of urgency) を示すから所與の價格體系の下に於ける最低生計費算定の素材として直ちに使用しうるのである。從來最低生計費の算定は榮養學的なカロリー計算を基礎として行われたのに對しこの妨法は純經濟學的な手續きに依る算定方式として特色を有する。昭和六一七年全國勞働者の飲食費支出擴張線の當嵌めを行つて Linear の場合と比較すると次の如くなる。

Logistic

$$Y=15.3+\frac{19.4}{1+l^{\frac{71.5-E}{22.5}}}$$

Linear

$$Y=12.08+0.18E$$

Logistic 線の第二の特性は彎曲點を有することである。Linear 線で與えられる各グループの限界支出配分係數は k_i なる一定の數値をとるが各支出グループの限界支出配分係數が夫々一定であることは所得の増加分 ΔE がつねに $k_1:k_2:k_3\cdots\cdots:k_n$ なる一定の割合に配分されることを意味し所與の價格體系の下では各グループの限界效用が同率の變化をなすと考えることになる。これに對して Logistic 線を認めるならば限界支出配分係數は

$$\frac{dY}{dE}=\frac{Le^{\frac{\beta-E}{\alpha}}}{\left(1+l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}\right)\alpha}$$ となり所得水準の變化に伴つて變化する。この變化の狀況は

$$\frac{d^2Y}{dE^2}=\frac{L}{\alpha^2}\,l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}\left(1+l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}\right)^{-3}\left\{l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}-1\right\}$$

の正負によつて示されるがこの第二次微係數の符號は｛　｝内の正負によつてきまる、即ち

$$l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}-1\gtreqless 0,\ \therefore\ l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}\gtreqless 1$$

$\beta>\alpha$ ナラバ $l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}>1$　シタガツテ $\frac{d^2Y}{dE^2}>0$

$\beta=\alpha$　〃　$l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}=1$　〃　$\frac{d^2Y}{dE^2}=0$

$\beta<\alpha$　〃　$l^{\frac{\beta-E}{\alpha}}<1$　〃　$\frac{d^2Y}{dE^2}<0$

右の如く所得が β に達する以前には限界支出配分係數は所得の増加に伴つて漸増し、β に一致する點に於て極大に達し、しかる後に漸減する。これを飲食費グループについて考えると限界支出配分係數が増大（減少）すると云うことは所得増加分により購入される組合せに於て飲食費部分が相對的に増大（減少）することでありこのことは更に限界支出に於て貨幣一單位により購入される飲食物の平均効用が他財のそれに比して相對的に増大（減少）することを意味している。從來生計費論に於て未解決の課題となつているものに標準生計費の概念規定があるが飲食物に對する平均支出配分係數 $r_0=\frac{Y_F}{E}$ が所得増加に伴つて漸減するといふエンゲル法則に關聯して限界支出配分係數極大という特殊な所得水準を示す β はこの要求に應える一つの概念であろう。前掲の昭和六―七年全國勞働者の標準的所得水準は月額七〇圓前後でありこの水準を以て貧富の境界を劃するものと考えることも出來るわけである。

滿足すべき最低限の經濟的厚生水準なるものが辛うじて生存を維持しうる水準でないことは自明のことであり乍らその目安となるべきもの丶存在しないことが從來經濟政策の目標設定に於ても一つの弱點となつていたのであるが右述の概念を使用すれば飲食費グループに對する支出擴張線の形狀によつて基準時點と比較時點との實質所得の變化を測定しうる。

右の如く Logistic 型支出擴張線は理論的研究の手掛りとしても經濟政策の基礎資料としても非常に應用範圍が廣いのであるが前節に述べた通り Linear の場合に比し常數決定に際して計算の勞が大であるといふ缺點を有する。

また Logistic 支出法則の實證性そのものについても利用した資料が質量ともに不充分であるため確定的な決論を下し難く未だ一個の假說にすぎぬことは Linear の場合と同樣であり、今後の研究によりその適否を更に檢討する必要がある。

結　語

以上行われた分析は專ら所謂―消費の分析であつた。今後我々に殘された課題は市場價格組織變化に消費者需要が如何なる適應を示すかを知り嗜好、所得、價格の三變數の總てが變化する一般的な場合についての具體的豫見が如何なる程度まで可能なりやを究明することである。次の機會には異時點間に於ける支出擴張線の變位について分析してみたいと考えている。（一九四九・四・二一）