Title	比較静学･ 極値条件と安定条件 : 理論経済学の若干の基礎
Sub Title	Comparative statistics : extremum condition and stability condition : some fundamental problems of economic theory
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1949
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.42, No.5/6 (1949. 6) ,p.298(18)- 319(39)
JaLC DOI	10.14991/001.19490601-0018
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19490601-0018

比較靜學・極値條件と安定條件

――理論經濟學の若干の基礎――

福岡正夫

序

理論經濟學の進展の過程をその根底に横はる基礎的理論様式に想ひをひそめつゝとりわけ内在的にあとづけるひとにとつて、レオン・ワルラスの樹立した業績は永遠に光輝を失はぬひとつの記念碑的存在とされてゐる。(1) 經濟體系が一般均衡にあるための諸條件をはじめて定式化することによつて經濟諸量の決定性の思想に最も精密な姿態を賦與し、あまねく世界的共通地盤の生成と呼ばれる爾後の理論經濟學の躍進に確固不動な隅の首石を安置した貢献を顧るとき、われわれはこのことの眞實性を今日なほいさゝかの躊躇もなく首肯することが出來るであらう。

しかしながら、未知の經濟的變量をそれと同數の一聯の經濟的條件を以て決定するといふ、いはゆる「均衡分析」の根本思想がワルラスにいたつて最美の結晶を見出したといふ事實は、未だ決して經濟理論の本來の車輪がそこに停滞することを意味するものではない。ひとたび特定の所與條件の下に一聯の均衡方程式を以てする均衡的位置の決定が解明されるならば、次に來るべき論理的段階は當然に、それらの所與條件の變化に伴ふ均衡的位置の變位の追及にあらねばならぬであらう。價格の變化に伴ふ「供給および需要の一般法則」(lois générales de l'offre et de la demande) を問ふことを以て、方程式と未知數との數の整合に終始した舊來の靜學分析より新しき一歩をすゝめ、後の比較靜學分析への萌芽を示したものは、他ならぬワルラスの後繼者パレートであつた。(2) 通常效用函數の可測性にかゝはる寄與によつてのみもつぱら賞揚されるのをつねとする彼の業績になほまたかゝる側面の存在することは、われわれの決して看過すべからざる一つの事實である。たゞ彼の論議は、數學上の手續の非洗練性と極値の充分條件に對する取扱ひの不備とに災されて、この主題を中心とする有意義な定理を數多く樹立するにはいたらなかつた。さうしてパレートによつて端緒を與へられたこの課題はやがて彼の思想の方向に沿ふヨリ近代の學者ジョンソン、スルーツキイ、ホテリング、アレン、ヒックス、ジョルジスク＝ロージェン、サミュエルソンなど(3)の取扱ひを俟つてはじめて充全に展開され、個人の極大化行爲に基礎をおく變化の法則はいはゆる「價値理論の基本方程式」を中心としてこゝにはじめて精緻な理論様式を確立することが出來たのである。

けれども、一經濟主體の極大化行爲は未だ經濟分析の一面に過ぎない。ワルラスによる理論的解法が明示してゐるやうに、全經濟體系の均衡は、たゞにひとりの經濟主體が所與の各個の價格體系に基いて自らの極大的地位を達成すべき條件のみならず、更にまたあらゆる經濟主體の極大的地位を妥當ならしむべき特定の價格體系の決定條件をも要求する。これらの條件の滿足におのおの主觀的均衡および客觀的均衡といふ稱呼を與へるとき、主觀的均衡の領域における變化の法則が所與條件たる價格の變化に伴ふ個人的需給の變化の法則といふ形態で導出され得ることを考慮すれば、客觀的均衡の領域においてもまた嗜好、技術、制度などによつて代表される所與條件の變化は價格體系の變化の法則の演繹を可能ならしめるはずである。もとより、こゝにあげられた代表的な所與條件は從來の理論經濟學者が

殆ど傳統的に自己の領域外に放逐し來つたところのいはゆる「與件」ではあるけれども、しかし、經濟學のかゝる境界線を內と外とに相分つ規定は決して侵すべからざる神聖さを有するものといふべきではなく、「體系の「與件」はヨリ廣汎な體系の「變數」たることを決して妨げるものではない。われわれは at hand な目的に應じ好むがまゝに所與條件のあるものを可變常數（パラメーター）として特定化する自由を許容されるのである。さて客觀的均衡の具有する性質をつぶさに檢討することによりワルラス＝マーシャルの單一市場の安定條件をはじめて多數市場に擴充し、嗜好の變化が價格體系に及ぼす波及效果を究明することを以て、眞に理論のうちに如上の課題への曙光をもたらしたものはまさにヒックスであつた。(4) 主觀的均衡の變化の法則が個人の極大的地位の充分條件から誘導されることを明らかにしてパレート＝スルーツキィの寄與を大成するとともに、更にまた客觀的均衡の變化の法則が均衡安定の條件から演繹されることを確立し、かくして比較靜學への架橋の方途を指示し得たヒックスの貢獻は、一般均衡分析を豫想の世界におしすすめた彼のいま一つの寄與と相俟つて、『價値と資本』を二〇世紀の古典たらしめてゐる強力な理由といはねばならぬ。

ところでヒックスは多數市場の安定條件を用具として嗜好および豫想の變化に關する比較靜學を考察し得たけれども、その際彼によつて使用された安定條件の理論は、經濟體系を一時的均衡（テムポラリィ・エキリブリアム）の系列として把握した彼の分析方法の故に、必然的に單位時間內における均衡への迅速且容易な到達を想定し、そのかぎりにおいて無時間的たらざるを得ぬものであつた。しかしながら、いまもし安定均衡の意味するところを仔細に吟味するならば、われわれはそこに均衡からの乖離が自らふたたび均衡への收斂を生ぜしめるといふインプリシットな假定を見出すであらう。しかるにかゝる收斂運動は、時間を通じての經濟的變量の運動一般からみれば、一つの特殊な型の運動であるに過ぎない。從つてヨリ一般的には、安定均衡に關する論議は、所與の初期條件から出發するあらゆる經濟的變量が時間の經過とともに示す運動態樣を決定すべき動學を當初から前提してはじめて成立つわけであり、それ故に眞正の安定條件はむしろかゝる動學的な關係をエクスプリシットに考慮してのみ規定さるべきはずのものである。ヒックスの安定條件はかくの如き考慮を全く缺如し、正しくは動學的考察からのみ導出せらるべき單一市場の安定條件をその結論のみについて機械的に多數市場に擴充したが故に、動學的視點よりすればいかにも重大な弱點を包藏せざるを得なかつた。

ヒックスの瞬間的調整といふ假定に代へて價格の時間的變化率を需給の相對差の函數と規定し、眞に正しい安定條件を導出したのはサミュエルソンである。さうしてかゝる安定條件の吟味を契機とする彼の論議は、たゞにヒックス的形態における安定條件の不備を補足する程度に安んずるものではなく、理論經濟學の基礎的な分析方法に關するはるかに廣汎な新展開を含み得るものであつた。彼の新著『經濟分析の基礎』(5)は、變化の法則に關する有意義な諸定理が均衡の方程式からよりもむしろ極値ならびに安定を保證する不等式から導出され得ることを一般的に論じたのち、かゝる觀點にウェイトを附しつゝ、まづ生產者および消費者の極大化行爲をとりあげ、次いで比較靜學と動學との關聯を「安定分析」の論議を媒介として明らかにしてゐるが、この後半の所論こそメッツラーのくりかへし指摘してゐるやうにサミュエルソンの最もすぐれたパイオニア的寄與を示すものに他ならぬであらう。およそ今日にいたるまで、いはゆる靜學と動學とは相互にいかなる脈絡をも共有しない分裂せる探究領域であつた。かゝる二つの分析の型の相違は傳統的な價格の理論と傳統的な景氣循環理論との相違によつて最もよく例示される。前者は價格や數量の均衡的位置を論ずるけれども、需給が齟齬した場合の價格の運動については殆ど言及するところがない。これに對比して、後者は擴張縮小の累積的變動を時間的繼起にアクセントをおいて敍述し、何らかの正常水準をめぐる體系の振動

を分析するけれども、かゝる正常水準の性質や累積過程と均衡條件との關聯については多くのことが不問に附されてゐる。いまやサミュエルソンは、動學的見地からヨリ周到な「安定分析」の理論を構成することによつて、經濟體系の動學的安定性の研究が比較靜學分析に多くの有用な定理をもたらしまた逆に比較靜學の有する既知の性質がその體系の動學的性質の規定に際して利用され得るといふいはゞ双方的な關係を明るみに出し、これを「對應原理」と名づけて靜學・動學を結ぶ理論的鍵鐶たらしめようと試みたのである。かのフリッシュの先驅的論文[6]以來、理論經濟學の動向が靜學的な樣式（モード）から動學的なそれへと、恰も古典力學から量子力學への推移にも比すべき思想的革新を經つゝあることを思ふならば、古き理論と新しき理論との關聯を明斷ならしむるかゝる原理をさぐり得たサミュエルソンの業績はまことに大なるものと稱すべきであらう。

進歩こそ科學の本質であるといはれてゐる。理論經濟學の躍進のあとをふりかへつてみるとき、われわれの感慨を深めるものもまたこの言葉の含蓄する歴史的眞實性に他ならない。靜學は均衡水準における經濟的變量の決定を解決した。比較靜學は所與條件の變化に由來する新しき均衡的位置の方向を無時間的に確立した。更に時間的繼起に即しての經濟的變量の内生的（エンドジナス）な運動が探究されたとき動學の領域が開拓され、やがて比較靜學と動學との間にはその體系の安定性を通じて一定の依存關係の介在することが闡明された。考へらるべき次の前進は動學の膨琢と相俟つて新しき比較動學の創造に見出されるであらう。初期條件、衝擊（ショック）、可變常數（パラメーター）などの變化より生ずる經濟的變量の時間的運動を分析すべきこの分野は、事實サミュエルソンの構想するところに從へば、比較靜學をはじめそれに先行する一切の分野を特殊として包含し、はるかに豐沃な領土を相蔽ふべきものである。今後の理論經濟學の發展がかゝるラインに沿ひつゝすぐれて強力に推進され、小は單一商品の微細な作用より始めて景氣循環の重要因子の變動をも含め更には經濟發展の莊嚴な諸問題にいたるまで、およそこれまでの經濟學が呈示してきた數限りない問題と樣相とが漸く統一的な基盤のうちに包含され攝取されんとする動向を前にするとき、ひとはいつしか共通地盤そのものの成長を思ふとともに、なほ將來にゆだねられた課題の大いさを痛感せざるを得ないであらう。

さて本稿およびこれに續いてわたくしがこの雜誌に掲載してゆかうと思ふ論稿は、以上かなりの紙幅にわたつて素描し來つた理論經濟學の發展動向を基軸とし、その中に起伏する諸問題のうちとりわけ根本的と思はれるいくつかの主要問題を抽出して、そのそれぞれをわたくしなりに整理してゆかうとする試みである。いふまでもなくこの動向の示す問題と樣相とはきはめて複雜困難であつて、殆ど攝取と理解以上のことをなし得てをらず、そのことに際してすら數多くの誤謬を犯してゐるであらう。御教示と御批判を仰ぐことを得るならばまことに幸福である。

まづわたくしは本稿において比較靜學の基本的理論を定式化するとともに、それが極値條件および安定條件に對して有するところの構造的關聯を明確ならしめることを意圖した。それはまた以後に展開される論議の序論的考察たる役割をも有してゐる。

(1) Léon Walras, *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, 1er éd. 1. part, 1847, 2. part, 1877, 2me éd. 1889, 3me éd. 1896, 4me éd. 1900, l'édition définitive. 1926.

ワルラス生誕百年祭にあたり現代一流のすぐれた理論家が表明した讃頌の辭をこゝに摘記しておく。ヒックス「およそ經濟學者にしてワルラスがなせるほど確立された眞理の恒久體に多大の寄與をなせるものは殆ど存在しない。」(J. R. Hicks, Léon Walras, *Econometrica*, October, 1934, p. 347)。シュムペーター「他のすべての科學と同じやうに、經濟學もまた數限りない問題と樣相とを呈示し、それらは何れも異つた才能と異つた資質とに訴へてゐる。しかし、樣相または進路が何であらうとも、レオン・ワルラスの名は殘餘一切の學者の名の上に聳立するものであ

る。視野ならびに業績の二つながらの點において、彼は、疑ひもなく、最大の經濟理論家であつた。彼の著作は過去におけるよりも今日において一層强く生きてゐる。それは著者の生前よりも一層大なる感化力を及ぼし一層大なる程度に精神成長の出發點となりつゝある。今日源泉より距ること既に遠いとしても、われわれすべてはいかに屢々ワルラスの著述をふりかへつてみることであらう。これはまことに驚くべきことと言はねばならぬ。」(J. A. Schumpeter, *Econometrica*, July, 1935, p. 258. 安井琢磨『ワルラス』——河合榮治郎編『學生と先哲』三四七頁)。

(2) パレートのかゝる貢獻については、とりわけ、Vilfredo Pareto, *Manuel d'économie politique*, 1er éd. 1909, 2me éd. 1927, pp. 579 ff. *ditto*, Économie mathématique, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Tome I. Vol. IV. 1911, pp. 628 ff. を參照せよ。

(3) W. E. Johnson, The Pure Theory of Utility Curves, *Economic Journal*, December, 1913. Eugenio Slutsky, Sulla teoria del bilancio del consumatore, *Giornale degli Economisti*, 2° Semestre, 1915. Hotelling, Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Function, *Journal of Political Economy*, October, 1932. J. R. Hicks and R. G. D. Allen, A Reconsideration of the Theory of Value, *Economica*, February and May, 1934. N. Georgescu-Roegen, The Pure Theroy of Consumer's Behavior, *Quarterly Journal of Economics*, August, 1936. P. A. Samuelson, A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior, *Economica*, February, 1938.

(4) J. R. Hicks, *Théorie mathématique de la valeur en régime de libre concurrence*, 1937, *ditto*, *Value and Capital*, 1st ed. 1939, 2nd ed. 1946.

(5) Paul A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, 1st ed. 1947. 2nd ed. 1948.

(6) Ragnar Frisch, Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics, *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*, 1933. 同じく一九三三年九—一〇月ライデンにおいて開催されたエコノメトリック・ソサイエティのミーティングは、フリッシュによる上記論文の報告のほか、なほかゝる革新の有力なる推進者カレツキ、ティンベルゲンの報告をもまじへ、新動向への出發をかざるにふさはしき會合であつた。Cf. *Econometrica*, April, 1934, pp. 187-194.

一

近代經濟理論の傳統的基礎を形成してきた「均衡分析」の根本思想をいま最も凝縮的に表現するならば、それはおほよそ次の如くである。まづわれわれは經濟的にその決定機構を明らかにすべき所要の經濟的變量を未知數として選定し、かつこれらの未知數の間に成立する經濟體系を一つの均衡體系として構成する。この均衡體系を規定する條件が未知數と數において相一致し、所與條件とともにそれらを一義的に決定するに充分であるとき、われわれは以てその體系の機能的決定（ファンクショナル・デターミネイション）を理解することが出來るであらう。さて以上の如くに考へるならば、「均衡分析」の設題の骨子は畢竟するところ未知數と方程式とより成る自足體系の構成にあるのであるから、記號を以て敍述されるとき、それらの含蓄は最も明白である。いま n 個の經濟的變數もしくは未知數を $X=(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ で示す。同じく n 個のおのおの獨立的な、さうして相互に矛盾しない函數關係の存在を假定し、これらの關係を次の如き陰伏函數を以て最も一般的に表すことにしよう。

$$(1)\qquad f(X)=f^i(x_1, \ldots\ldots, x_n)=0 \qquad (i=1, \ldots\ldots, n)$$

(1)を以て均衡條件と規定すれば、それらの一義解がわれわれに變數の均衡値 $X^0=(x_1^0, \ldots\ldots, x_n^0)$ を告知する。[1] いはゆる靜學（statics）とは、以上の如き、一定の所與條件の下における經濟的數量の解法を、時間についてのエクスプリシットな配慮なしに、取扱ふものに他ならない。[2]

けれども、かゝる靜學的均衡分析はあくまで一定の所與條件の下における均衡的位置の考察にとゞまつてをり、未だそれのみでは有意義な經濟的定理の母胎たるに乏しいから、われわれは次いで所與條件の變化より生ずる均衡的位置の變化を確定する段階に進まねばならぬ。かゝる目的を遂行するためには、變化に際してさきの函數關係そのもの

を變位（シフト）せしめる若干の所與條件を可變常數（パラメーター）として體系の中に導入することが必要である。さてこれらの可變常數（パラメーター）を m 個とし $\alpha=(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_m)$ を以て表せば、さきの函數關係(1)は次の如くに書換へられる。[3]

$$(2)\qquad f(X,\alpha)=f^i(x_1,\ldots\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_m)=0\qquad(i=1,\ldots\ldots,n)$$

それ故に變數 $(x_1,\ldots\ldots,x_n)$ の均衡値はかゝる可變常數（パラメーター）の函數として解かれ、次の如くに示されるであらう。

$$(3)\qquad X=g(\alpha)\ \text{もしくは}\ x_j=g^j(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_m)\qquad(j=1,\ldots\ldots,n)$$

所與條件の變化に對する經濟諸量の方向的變化を明らかにするといふわれわれの課題は、任意の可變常數（パラメーター）たとへば α_k が變化したときの x_j の方向的變化、換言すれば偏導函數 $\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}$ の符號、を確定することに他ならない。かくの如く、所與條件の變化によつて惹起される經濟的變量の均衡値の質的變化を、その調整過程における時間的繼起とは無關係に、確定することが比較靜學 (comparative statics) の役割である。

いま可變常數（パラメーター）α_k が變化したものとすれば、かゝる變化が全經濟體系に及ぼす效果は、(2)の方程式をそれぞれ α_k について微分することにより、次の如くに示される。

$$(4)\qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x^1}{\partial \alpha_k}+\dfrac{\partial f^1}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_k}+\cdots\cdots+\dfrac{\partial f^1}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_k}=-\dfrac{\partial f^1}{\partial \alpha_k}\\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial x^1}{\partial \alpha_k}+\dfrac{\partial f^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_k}+\cdots\cdots+\dfrac{\partial f^2}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_k}=-\dfrac{\partial f^2}{\partial \alpha_k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_k}+\dfrac{\partial f^n}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_k}+\cdots\cdots+\dfrac{\partial f^n}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_k}=-\dfrac{\partial f^n}{\partial \alpha_k} \end{array}$$

われわれの目的は方程式(4)を n 個の未知數 $[(\partial x_1/\partial \alpha_k),\ldots\ldots,(\partial x_n/\partial \alpha_k)]$ について解くことにより接近される。

ところで、(4)の右邊の係數をなしてゐる偏導函數は諸變數が均衡値 $(x_1^0,\ldots\ldots,x_n^0)$ にあるときの偏導函數であり、從つて均衡點においてはそれらは常數と看做されるから、(4)は常數係數を有する n 個の一次方程式系である。それ故に周知の解法を用ひれば

$$(5)\qquad \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial \alpha_k}\Delta_{ij}}{\Delta}\qquad(j=1,\ldots\ldots,n)$$

こゝに

$$(6)\qquad \Delta=\left|\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f^n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

であり、Δ_{ij} は Δ の第 i 行第 j 列の元素の餘因數である。(5)はある可變常數（パラメーター）の變化に對しておのおのの經濟的變量がいかに反應するかを示す最も一般的な式である。[4] さうしてこの式の右邊に注意するときたゞちに明らかであるやうに、$\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}$ は均衡條件(2)の構造的性質にきはめて緊密に依存してゐる。このことからわれわれは、均衡條件が單に經濟的變量の均衡値の決定のみならず、なほ與件の變化に伴ふそれらの反應の確定にあたつても重要な知識の源泉となり得ることを理解することが出來る。[5]

さて以上の結果をマトリックスの形式で處理しておけば、後の論議にきはめて便利であらう。(4)をマトリックスと

して表せば

$$(7)\quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} & \frac{\partial f^n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f^1}{\partial \alpha_k} \\ -\frac{\partial f^2}{\partial \alpha_k} \\ \vdots \\ -\frac{\partial f^n}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix}$$

(7)をより簡單に

$$(8)\quad \left[\frac{\partial f}{\partial X}\right]\left[\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right]=\left[-\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right]$$

と書き、これを(5)の交代的表示とする。(8)の左邊のマトリックス$\left[\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right]$は所與條件の變化が諸變數に及ぼす效果を示すものであつて、それらの符號を確定することが比較靜學分析の課題である。また右邊の$\left[-\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right]$は所與條件の變化が當初の函數關係をいかなる方向に移動せしめるかを示すものであつて、それらの個々の符號は考察される變化の性質から與へられる。それ故にのこされた問題は左邊の係數をなすマトリックス$\left[\frac{\partial f}{\partial X}\right]$がいかなる性質を具有するかといふことにあり、そのことの考察が次節以下の論議の主要內容を形成するであらう。

比較靜學の理論構造を最も一般的に示してゐるこれら(5)もしくは(8)の式に、われわれはこゝで「比較靜學の基本方程式」(the fundamental equation of comparative statics) といふ名を與へておかうと思ふ。

(1) われわれはこゝでかゝる一義解の存在を假定する。假定に關する吟味については A. Wald, Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Band. VII, Heft. 5. 1936. SS. 637-670 參照。

(2) 靜學 (statics) および動學 (dynamics) は經濟體系の作用を決定する分析形式の相違によつて對比すべき概念であり、定常狀態 (stationary state) および變動狀態 (evolutionary state) といふ用語に意味されるやうな對象の狀態叙述の相違にかゝはる概念ではない。從つて時間を通じて定常的ではない經濟體系を靜學的に分析することは可能である。ハイエクの指摘しているやうに、靜學分析と定常狀態とのかゝる分離はすでにマーシャルの長期および短期の識別を顧るとき明らかであると言ふことが出來よう。Cf. F. A. Hayek, Economics and Knowledge, *Economica*, February, 1937, p. 41. n. 1.

「靜態的」といふ慣習的な譯語を statical と stationary の兩者に混用することはそれら二つの概念のもつ如上の意味の相違を不鮮明ならしめるから、われわれは前者に「靜學的」、後者に「定常的」といふ譯語を提唱しておかうと思ふ。ちなみに stationary—evolutionary を靜態的—動態的なる譯語を以て statical—dynamical に等置する論者がこれまでわが國に多かつたのは主としてひところにおけるシュムペータア理論の流行に歸因するものと思はれるが、シュムペータア自身のちにフリッシュの指摘に從つて自己の二分法から statical—dynamical の稱呼を撤回してゐるのであるから、今日ではかゝる混亂はすみやかに霧散すべきであらう。Cf. Joseph A. Schumpeter, *The Theory of Economic Development* (English edition), 1934, Preface, p. xi. なほ P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, 1948, p. 313 を參照せよ。

靜學および動學の定義についてフリッシュ—サミュエルソンの線に沿ふ詳細な考察をなすことは他日に期したい。

(3) かくの如き方程式の表示はすでに V. Pareto, Économie mathématique, p. 594. に見出される。

(4) たとへば「スルーツキィの基本方程式」すなはちヒックスのいはゆる「價値理論の基本方程式」(J. R. Hicks, *Value and Capital*, 1939, p. 309.) は(6)の特殊的表現である。

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i}=\frac{-x_i\mu U_j+\mu U_{ij}}{U}$$

を(6)と比較していただきたい。

(5) 「あらゆる出來事はすでに攪亂されてゐる經濟的世界の上に働きかけるものであるけれども、何らかの新しい出來事に對する經濟的有機體の反應の仕方を理解しようとすれ

ば、われわれは不可避的に均衡方程式の理解に基かねばならぬ。」（J. A. Schumpeter, *Business Cycles*, Vol. I, 1939, p. 68.）「經濟理論は本質において變化に對する適應の理論である。均衡概念はかゝる變化の理論の分析用具である。」（Fritz Machlup, Marginal Analysis and Empirical Research, *American Economic Review*, September, 1946, p. 521.）

二

われわれは以上において比較靜學の理論樣式を最も基本的に考察した。しかしながら、そこにあつては、定式化の素材となつた均衡方程式そのものが一般的に陰伏函數を以て表示されてをり、それが經濟的均衡條件として具有すべき內容的な規定を缺如してゐるため、從來の經濟理論と基本方程式との關聯が未だ明白にされてゐない。それ故にわれわれはつゞく論議において均衡條件(2)の性質を更に明確に規定し、かくして一層具體的な意味を擔つた均衡條件より基本方程式を導出してその構造とりわけさきの係數の性質を檢討してみることにしよう。

まづわれわれはいはゆる合理性の公準（rationality postulate）を以て均衡條件(2)を限定することとする。[1] こゝに合理性の公準とはあらゆる經濟主體が主觀的に思はれた意味からそれぞれある大いさの極大化（もしくは極小化）を目的として行動するといふことを意味してゐる。われわれは經驗的に大部分の企業が利潤の極大化を目ざして運營されることを假定することが出來るであらう。また消費者の選好が一つの順位表に沿つて順序づけられ得るならば、大多數の家計が序數的效用の極大化を目ざしてコンシスタントな行動をとることを假定し得るであらう。かくしてこの公準の採擇はわれわれに次の如き均衡條件の解釋を可能ならしめる。すなはち、均衡條件が滿足されるならば所與の條件の下においてはいかなる家計も企業ももはや彼等の行爲を變更することにより自らの地位をヨリ好轉せしめることが出來ない。分析的には、このことはわれわれがさきの均衡條件を極値條件（extremum condition）として取扱ひ得ること、從つてわれわれの變數の均衡値を極大値（もしくは極小値）として取扱ひ得ること、を示してゐる。これが均衡方程式に對してわれわれの與へる第一の規定である。

いまある經濟主體が變數としての財貨の數量（$x_1,\cdots\cdots,x_m$）ならびに可變常數としてのそれらの價格（$p_1,\cdots\cdots,p_n$）の一價函數

（9）　$z=f(x_1,\cdots\cdots,x_m,p_1,\cdots\cdots,p_n)$

を以て表示されるある大いさ z を極大ならしめようとして行動するものと假定する。f が少くとも第二階までの偏導函數を有し、かつ $f_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$，$f_{ij}=\dfrac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}$ とすれば、その主體が極大的地位にあるための必要條件ならびに充分條件はそれぞれ

（10）　$dz=\sum_{i=1}^{m}f_i dx_i=0$

（11）　$d^2z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}dx_i dx_j<0$

として與へられる。すなはち眞正の極大條件が滿足されるためには f のあらゆる第一階偏導函數が零にひとしいことに加へて、f の第二階偏導函數を係數とする二次形式が負の定符號形式とならねばならない。[2]

われわれは論議を簡單にすゝめるためこゝでは均衡點において滿足さるべきいかなる附帶條件をも考へることなく、たゞちに可變常數の變化による均衡値の變化の問題を取扱ふことにしよう。讀者はたとへばホテリングの「家計の制約のない需給の理論」の如き事例を考へられゝばよいであらう。[3] (11)を

$$(13)\qquad f_i(x_1,\cdots\cdots,x_n,p_1,\cdots\cdots,p_n)=0 \qquad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

の形に書換へれば、この n 個の方程式が可變常數（パラメーター）たる價格の函數として n 個の變數の均衡値を決定する。

$$(14)\qquad x_j=g^j(p_1,\cdots\cdots,p_n) \qquad (j=1,\cdots\cdots,n)$$

さて一つの可變常數（パラメーター） p_k が變化するものとしよう。かゝる變化がすべての均衡値に及ぼす效果はわれわれが前節に展開したところに從つて容易に求めることが出來る。すなはち均衡條件(13)を p_k について微分すれば

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_k}+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_k}+\cdots\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial p_k}+\frac{\partial f_i}{\partial p_k}=0 \qquad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

ヨリ簡單に表現すれば

$$(15)\qquad \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial p_k}=-\frac{\partial f_i}{\partial p_k} \qquad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

さきの(5)と同樣の手續によつてこれを解けば

$$(16)\qquad \frac{\partial x_j}{\partial p_k}=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial p_k}H_{ij}}{H} \qquad (j=1,\cdots\cdots,n)$$

いふまでもなくこゝで

$$(17)\qquad H=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots\cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots\cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots\cdots & f_{nn} \end{vmatrix}=|f_{ij}|$$

であり、かつ H_{ij} はこのヘッシャンの第 i 行第 j 列の元素の餘因數である。いまさきと同樣に以上の分析をマトリックスで處理すれば

$$(18)\qquad \left[f_{ij}\right]\left[\frac{\partial x_j}{\partial p_k}\right]=\left[-\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\right]$$

(18)から明らかなやうに、可變常數（パラメーター）の變化に對する函數關係(13)の變位が規定されさへすれば、$\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\right]$ はもつぱらヘッシャン $[f_{ij}]$ に依存する。しかるに極大の充分條件(12)より

$$(19)\qquad f_{ii}<0,\quad \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} & f_{ik} \\ f_{ji} & f_{jj} & f_{jk} \\ f_{ki} & f_{kj} & f_{kk} \end{vmatrix}<0,\cdots\cdots$$

といふ規定が與へられるから、[4] こゝにわれわれは $\frac{\partial x_j}{\partial p_k}$ の符號の確定にあたり極値の充分條件がきはめて重要な役割を有することを看取することが出來る。いまヒックスのようにかゝる極値の充分條件をも安定條件と看做すならば、[5] 以上の分析は主觀的均衡の領域においても個人的需給の比較靜學が安定條件と緊密な構造的關聯にあることを示すものに他ならない。

(1) Oscar Lange, The Scope and Method of Economics, *Review of Economic Studies*, 1945-46. Vol. XIII. p. 30.

(2) J. R. Hicks, *Value and Capital*, Mathematical Appendix p. 306. P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Mathematical Appendix A. p. 360.

(3) H. Hotelling, Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Function, *Journal of Political Economy*, October, 1932. pp. 590-598. ホ

テリングにおいては、⑽式は

$z=f(x_1,\ldots\ldots,x_n)-p_1x_1-\cdots\cdots-p_nx_n$

といふヨリ特殊な形で與へられてゐる。

(4) 高木貞治『代數學講義』三八二頁參照。

(5) Hicks, *op. cit.*, p. 21. p. 25.

三

前節の分析は、均衡條件を極値條件として取扱ふことにより、個人的行爲の比較靜學を處理するに際して極値の充分條件が多大の意義をもち得ることを示すものである。しかしながら、經濟的命題のことごとくが極大化（もしくは極小化）の假定からのみ導出され得るものでないことはわれわれの日常經驗に徵して明らかである。ひとたび一經濟單位の主觀的均衡から全經濟單位の客觀的均衡にすゝみ、均衡條件の對稱性（シンメトリイ）が缺如される場合には、われわれはもはや、二次形式の規定を以て均衡條件を制約する可能性を失はねばならないから前節におけるとアナロガスな分析を行ふためには極値の充分條件に代はる何らかの新しい規定が設けられねばならないであらう。こゝにいはゆる安定性の公準(stability postulate)[1]が重要な役割を擔つて登場する。われわれはわれわれの均衡條件がそれの決定する均衡的位置の近傍において安定性を滿足せしめることを假定して次のやうに論議をすゝめることにしよう。

いま變數たる價格 $(p_1,\ldots\ldots,p_n)$ と可變常數（パラメーター） $(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n)$ とを含む需給の均衡條件を

(20)　$X_i(p_1,\ldots\ldots,p_n,\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n)=D_i-S_i=0$　$(i=1,\ldots\ldots,n)$

を以て表すこととする。いふまでもなく X_i は超過需要函數を示しておる。⑳を解くことにより

(21)　$p_j=G^j(\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n)$　$(j=1,\ldots\ldots,n)$

すなはち所與條件にして一定なるかぎり價格 p_j は需給均衡 $D_j=S_j$ の水準に決定される。

ある可變常數（パラメーター） α_k が變化するならば⑳より

(22)　$\dfrac{\partial X_i}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}+\dfrac{\partial X_i}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_k}+\cdots\cdots+\dfrac{\partial X_i}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial \alpha_k}=-\dfrac{\partial X_i}{\partial \alpha_k}$　$(i=1,\ldots\ldots,n)$

そこで

(22)　$\dfrac{\partial X_i}{\partial p_j}\equiv a_{ij}$　$(i,j=1,\ldots\ldots,n)$

(24)　$J=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\equiv|a_{ij}|$

とし、かつヤコービアン J の第 i 行第 j 列の元素の餘因數を J_{ij} として(22)を解けば

(25)　$\dfrac{\partial p_j}{\partial \alpha_k}=\dfrac{-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial X_i}{\partial \alpha_k}J_{ij}}{J}$　$(i=1,\ldots\ldots,n)$

マトリックスの形式で表示すると

(26)　$\left[a_{ij}\right]\left[\dfrac{\partial p_j}{\partial \alpha_k}\right]=\left[-\dfrac{\partial X_i}{\partial \alpha_k}\right]$

さきと同樣に α_k の變化に對する X_i の變位（シフト）が規定されさへすれば、$\left[\dfrac{\partial p_i}{\partial \alpha_k}\right]$ はもつぱらヤコービアン $[a_{ij}]$ に依存する。しかるに安定性の公準を認容するとき、われわれは $[a_{ij}]$ に明確な符號的規定を與へる一つの便益を得る。いま $[a_{ij}]$ の奇數次の首座小行列式が負、偶數次の首座小行列式が正、の符號をとるとすれば

$$(28)\quad a_{ii}\lessgtr 0,\quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \gtrless 0,\quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \lessgtr 0,\ \cdots\cdots$$

これこそヒックスの完全安定條件に他ならない。(2) すなはち、ヒックスの完全安定條件が滿足され、ヤコービアン $[a_{ij}]$ がいはゆるヒックシァンとしての性質を具有するならば、われわれはかゝる性質を $\dfrac{\partial p_j}{\partial \alpha_k}$ の符號決定への有力なる手がかりとして利用することが出來るのである。こゝに價格體系の比較靜學が市場均衡の安定條件ときはめて緊密な構造的關聯を有することが理解せられるであらう。(3)

(1) 均衡からの乖離がいかなる大いさをとる場合にも一體系がふたゝび均衡への復歸運動を生ぜしめるならば、その體系は大範圍の安定性（stability in the large）を有するといはれる。一方、均衡からの乖離が均衡點の近傍において生ずる場合にのみかゝる復歸運動を示す體系は小範圍の安定性（stability in the small）を有するといはれる。大範圍の安定條件が小範圍の安定條件の充分條件であるに對し、後者は前者の必要條件であるに過ぎない。しかしながら、われわれの論議はさしあたり後者にのみ關聯する。なほこの點については P. A. Samuelson, The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics, *Econometrica*, April, 1941. p. 101.（*Foundations of Economic Analysis*, pp. 261-262.）、安井琢磨「收斂性の公準と動學的安定條件」（社會科學評論第一、第二合併集）一九二頁を見よ。右に與へた二種の安定性の稱呼は安井教授に從ふものである。サミュエルソンはそれらをそれぞれ完全な第一種安定性（perfect stability of the first kind）小範圍の第一種安定性（stability of the first kind in the small）と呼んでゐる。

(2) J. R. Hicks, *Value and Capital*, pp. 315-316. Jacob L. Mosak, *General- Equilibrium Theory in International Trade*, 1944, p. 41. O. Lange, *Price Flexibility and Employment*, 1944, p. 94. 安井琢磨「經濟理論の基本問題」(3)（經濟學講座第四卷）七六頁など參照。

(3) 更に $a_{ij}=a_{ji}$ が假定される場合には、ヤコービアン $[a_{ij}]$ は前節のヘッシアン $[f_{ij}]$ と同様の形式をとり、主觀的均衡の分析と客觀的均衡の分析とは同様の方法を以て取扱はれ得る便益を與へられる。われわれはかゝる場合を對稱（シンメトリカル・ケース）の場合と呼ぶことが出來るであらう。「スルーツキィの基本方程式」において所得項が無視され得るとき體系は對稱となるから、このことは企業家のみから成る體系について妥當するであらう。

四

さきに述べたとほり、安定條件の論議は動學的分析に基礎づけられてのみ有意義たり得るのであるから、われわれは更に動學的安定分析の立場からこの問題を眺めてみることが必要であらう。周知のように、この立場は、價格の時間的變化率が超過需要量に正比例するといふ假定から出發する。すなはち

$$(29)\quad \frac{dp_i}{dt}=k_iX_i \qquad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

いま X_i を均衡價格の組 $(p_1^0,\cdots\cdots,p_n^0)$ の近傍で展開するならば、常數係數を有する次の如き齊次線形聯立微分方程式系が成立する。(1)

$$(30)\quad \frac{dp_i}{dt}=k_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(p_j-p_j^0) \qquad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

(30)を入念に書けば

$$(31)\quad \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt}&=k_1a_{11}(p_1-p_1^0)+k_1a_{12}(p_2-p_2^0)+\cdots\cdots+k_1a_{1n}(p_n-p_n^0)\\ \frac{dp_2}{dt}&=k_2a_{21}(p_1-p_1^0)+k_2a_{22}(p_2-p_2^0)+\cdots\cdots+k_2a_{2n}(p_n-p_n^0) \end{aligned}$$

$$\frac{dp_n}{dt}=k_n a_{n1}(p_1-p_1^0)+k_n a_{n2}(p_2-p_2^0)+\cdots\cdots+k_n a_{nn}(p_n-p_n^0)$$

さきと同樣に(31)をマトリックスとして表せば

$$(32)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{dp_1}{dt}\\ \dfrac{dp_2}{dt}\\ \vdots\\ \dfrac{dp_n}{dt}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1-p_1^0\\ p_2-p_2^0\\ \vdots\\ p_n-p_n^0\end{pmatrix}$$

そこで(32)をヨリ簡單に次の(33)の如く示し、さきの(26)と對應せしめるならば

$$(33)\quad \left[\frac{dp_i}{dt}\right]=\left[k_i\,\delta_{ij}\right]\left[a_{ij}\right]\left[p_j-p_j^0\right]$$

$$(26)\quad \left[a_{ij}\right]\left[\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_k}\right]=\left[-\frac{\partial X_i}{\partial \alpha_k}\right]$$

こゝに兩式が $[a_{ij}]$ を連環として相互に關聯することはきはめて明白であり、われわれはかゝる表示から動學的安定分析と比較靜學分析との緊密な双方依存の關係を容易に理解することが出來る。さうして兩者の間のこの形式的依存性こそサミュエルソンが「對應原理」(Correspondence Principle)[2] と名づけたものに他ならないのである。

(1) 詳細な展開については P. A. Samuelson, The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics, *Econometrica*, April, 1941. pp. 109-110. (*Foundations of Economic Analysis*, pp. 270-271.), O. Lange, *Price Flexibility and Employment*, Appendix, pp. 94-96. 安井琢磨「收斂性の公準と動學的安定條件」(社會科學評論第一・第二合併集)一九八—二〇一頁、同「經濟的均衡の動學的安定條件」(經濟思潮第九集)七—九頁を參照せよ。

(2) Cf. P. A. Samuelson, The Stability of Equilibrium: Linear and Nonlinear Systems, *Econometrica*, January, 1942. p. 1. (*Foundations of Economic Analysis*, p. 284.)

追　記

本稿は單に一般均衡分析のみならず、部分均衡分析にも總體均衡分析にも適用可能な分析原理を提供するものである。その例示としてわたくしはリカアドォの賃銀理論、マアシャルの一財需給理論、およびケインズの所得決定の貯蓄投資理論に關する簡單な比較靜學分析を用意したけれども、紙數の制約がそれらの掲載を許さなかつた。これらの事例については讀者自ら分析を試みられるならば甚だ幸ひである。

（一九四九・四・五）

校正のとき記す

本稿擱筆より校正にいたるまでにかなりの日時が經過してゐる。その間わたくしは本稿の構想に基いて東洋經濟新報社の季刊「理論經濟學」創刊號に「比較靜學と安定條件」といふ論文を寄稿した。更にまたそののち、わたくしは古谷弘助教授の勞作「經濟均衡の安定分析」(東大經濟學部創立三十周年記念論文集第一部『理論經濟學の諸問題』一〇七—一八九頁)を讀むことを得た。わたくしの二つの論文における內容の不備はこの優れた論文において充分に滿されてゐる。ついて參照せられることを讀者に切望する次第である。

（一九四九・八・二〇）