

Title	数学線について
Sub Title	Mathematical lines in statistics
Author	安川, 正彬
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1948
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.41, No.11/12 (1948. 12) ,p.649(31)- 670(52)
JaLC DOI	10.14991/001.19481201-0031
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19481201-0031

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

利子率の決定を論ずる場合にも、*b* 曲線の變化に伴つて *a* 曲線が如何に移動するかについて何ら述べようとしてゐない。そこでは主として *b* 曲線の變化が所得を増加せしめ、その増加が更に *b* 曲線を變化せしめる状態を説明し、利子率は結局において實物的要因によつて決定されるといふ結論を導くのである(註9)。

このようにハイエクによつて實物的利子論と貨幣的利子論とを統一しようとする一つの試みがなされたけれども、それは成功したものとはいへないであらう。それは貨幣の特殊性を殆んど考慮することなく、しかも古典的利子論の缺點をなほそのまま包含するところのものである。われわれの進むべき途は、ケインズによつて示された古典理論の缺點を克服し、しかもケインズの貨幣的利子論に生産力要因を體系的に織り込むことである。ケインズによつて初めて明らかになされた貨幣及び貨幣利子率の諸特質は高く評價されるべきものであつて、われわれはこの收穫を無視して、利子論を再び古典的利子論へ復歸せしめるようなことをしてはいけぬ。ケインズは「金融的準備」をとり入れることによつて、生産力側の要因を考慮しようと試みたけれども、まだそのような利子論を體系化するには至らなかつた。生産力要因を一定とする「一般理論」の前提を取り除いて理論の再構成をしない限り、このような體系化は困難であらう。

(註1) F. A. Hayek, *Pure Theory of Capital*, 1941, pp.

354-5. 一谷藤一郎教授邦譯三四二頁以下。

(註2) Hayek, *ibid.*, pp. 356-7.

(註3) Hayek, *ibid.*, pp. 358-9.

(註4) Hayek, *ibid.*, pp. 359-361.

(註5) Hayek, *ibid.*, pp. 362-8.

(註6) 詳しくは拙稿「前掲論文」の中で述べた。

(註7) 詳しくはケインズ「一般理論」第十四章を参照された

5。

(註8) Hayek, *ibid.*, pp. 363-4.

(註9) Hayek, *ibid.*, pp. 363ff.

數學線に就いて

安川正彬

一、序

二、數學線に對する若干の考察

三、趨勢變動除去と座標軸變換

四、最小自乗法による數學線の妥當性

一、序

偶々現實が理論に一致するのではなく、理論は偶々現實に近似する。そのため統計學に於ては數量を以て現實を現實に近似せしめんとし、現實にその端を發して絶えず統計理論に修正を加へ、現實に妥當近似しうる理論を確定することを以てその目的とする。

統計的方法は數量を以て現象の解析を行ふために、これを法則化せしめんとして數學の援用を必要とする。殊

數學線に就いて

に統計解析に於て取扱はれる數量は根本に理論なる背景を有するため、その分析方法は絶えず數量の背後にある理論を充分認識してこれを決定する必要がある。併し一旦分析方法が決定されれば、「數學」と云ふ分析手段の嚴密な過程を経てその結果が現實に妥當する一箇の數値として現れる。そこでこの方法に關して統計學の根本理論の一たる數學線に就いてその理論的基礎を附與せんとするのである。

統計解析に於て遍く一般に使用されてゐる數學線は

Legendreの創始した最小自乘法(Methode des moindres quares) によるものであるが、この方法は誤差の理論がその緒をなしてゐるため Gauss distribution に密接不可分の關係があり、従つて經濟系列に關する統計解析に客觀的妥當性を有するものではないとの理由から該方法を採用せる數學線に代る H. Schultz の The line of mutual regression 即ち彼自稱す The line of best fit 及び山田勇助教授の最小一次法による數學線等があるが、孰れもその理論的基礎が附與されてゐないやうである。よつてこれら數學線に對する相互の關係を明かならしめるのが本稿の目的である。

二、數學線に對する若干の考察

數學線には直線、二次、三次、……等々の曲線、及びフリーエ曲線等、種々の曲線があるが、その根本とする理論は總て同一なるため、直線の場合に限定して説明する。

(a) 最小一次法、最小自乘法が統計系列の各項と、その決定された數學線の各數値の縦軸に對する乖離の自乗の總和を最小ならしめるのに對し、最小一次法に於ては、

この乖離の絶対値の總和を最小ならしめるのである。即ち決定された數學線の方程式を

$$y = a + bx$$

とし、 x_i に對應する y_i の原數値を y_i とすれば、 y_i と直線の同一點に於ける y_i の數値との乖離は

$$y_i - (a + bx_i)$$

である。この乖離の絶対値の總和を零ならしめれば

$$(1) \sum y_i = na + b \sum x_i$$

である。茲に未知なる係數は、 a 、及び b の二箇であるから、これらを決定する方程式に於ても二箇を必要とする。従つて統計系列を二分し

$$(2) \begin{cases} \sum x_1 = \sum x_1 + \sum x_2 \\ \sum y_1 = \sum y_1 + \sum y_2 \end{cases}$$

とする。従つて(1)式をも二分し

$$(3) \begin{cases} \sum y_1 = n_1 a + b \sum x_1 \\ \sum y_2 = n_2 a + b \sum x_2 \end{cases}$$

但し

$$n = n_1 + n_2$$

これより(3)の方程式を解けば

$$(4) \begin{cases} a = \frac{\sum y_1}{\sum x_1} \\ b = \frac{\sum y_2}{\sum x_2} \end{cases}$$

但し

$$\Delta = \frac{n_1 \sum x_2 - n_2 \sum x_1}{n_1 n_2}$$

を得る。

以上が最小一次法の概要であるが、聯立方程式(3)を變形すれば

$$\begin{cases} \sum y_1 = a + \frac{\sum x_1}{n_1} b \\ \sum y_2 = a + \frac{\sum x_2}{n_2} b \end{cases}$$

となつて、この聯立方程式を満足する係數 a 、 b は、二

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum y_1}{n_1} - \frac{\sum x_1}{n_1} \left(\frac{\sum y_2}{n_2} - \frac{\sum x_2}{n_2} \right) \\ b &= \frac{\sum x_2 \sum y_1 - \sum x_1 \sum y_2}{n_1 \sum x_2 - n_2 \sum x_1} + \frac{n_1 \sum y_2 - n_2 \sum y_1}{n_1 \sum x_2 - n_2 \sum x_1} \end{aligned}$$

の常數項、及び a の係數である。即ち

數學線に就て

$$\begin{cases} a = \frac{\sum x_2 \sum y_1 - \sum x_1 \sum y_2}{n_1 \sum x_2 - n_2 \sum x_1} \\ b = \frac{n_1 \sum y_2 - n_2 \sum y_1}{n_1 \sum x_2 - n_2 \sum x_1} \end{cases}$$

この結果は(4)式と全く同一である。この結果は(4)式と全く同一である。この結果は(4)式と全く同一である。

及び b の系列、 y_2 系列の算術平均に外ならない。結局所與の統計系列を二分し、前半各項よりの算術平均をその中央座標とし、後半も亦同様にしてその座標を決定し、この二點を結ぶ直線を數學線とする方法であつて、折半平均法 (Semi-average method) と全く同一である。

最小一次法と折半平均法の理論が同一であれば、この方法に對して次の如き批判が生れる。即ち數學線を適用すべき系列に大なる不規則變動がある場合に、二分した系列の算術平均は妥當しうる代表値たるを得ないのである。算術平均の性質に關する説明は敢て述べる迄もなく、系列中に於ける變則的數値に蒙る影響大であつて、統計系列が斯くの如き分布を示す場合に、この方法は妥當し得ないのである。更に Range が如何に變化しても、各々の算術平均が不變であれば、この數學線は常に同一

である。且つ二分された項の数は同数なること、換言すれば全項数が偶数なることを必要とする。即ち項数が奇数なる場合は、中央に位する項を二分した section の何れに歸屬せしめるかによつて數學線の方程式を異にするからである。又系列の各項が略々連続的分布を示すと判断し得ない場合、換言すれば、前半と後半の各項それ自體は略々連続的なりと斷を下し得ても、二分された系列の interval が前、及び後の系列中の各項よりも變動甚だしい場合に、該方法による數學線の適用は極めて危険であると云はなければならぬ。更に最小一次法は系列を二分する組合が一一箇得られるため、これらの組合に對して同一の數學線は統計系列が完全な函數關係にある場合にのみ得られるのであつて、その場合に最小自乘法による數學線と一致する。

註、山田勇助教授が「鐵鋼需給曲線の統計的研究—本邦鐵鋼業の調査研究(其一)—」(名古屋高等商業學校産業調査室、調査報告第二十一輯、昭和十五年)に於て發表された數學線導出に關する最小(一)次法の適用に關して直線の外に二次曲線に對しても述べられてゐる。即ち二次曲線を求める未知なる係数は先に説明した理に従ひ三箇必要なるため、系列を三分

して二次曲線を決定すればこれが求める數學線の方程式である。茲にそれを紹介しよう。

二次曲線の方程式を

$$y = a + bx + cx^2$$

とし、所與の系列を三分すれば、係数を決定する方程式は

$$\begin{cases} \sum y_1 = na + q \sum x_1 + c \sum x_1^2 \\ \sum y_2 = na + q \sum x_2 + c \sum x_2^2 \\ \sum y_3 = na + q \sum x_3 + c \sum x_3^2 \end{cases}$$

但し

$$\begin{cases} n = n_1 + n_2 + n_3 \\ \sum x = \sum x_1 + \sum x_2 + \sum x_3 \\ \sum x^2 = \sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \sum x_3^2 \\ \sum y = \sum y_1 + \sum y_2 + \sum y_3 \end{cases}$$

によつて示される。之を解くと

$$\begin{cases} a = \frac{\sum y_1 \sum x_1^2 + \sum y_2 \sum x_2^2 + \sum y_3 \sum x_3^2 - \sum y_1 \sum x_1 \sum x_1^2 - \sum y_2 \sum x_2 \sum x_2^2 - \sum y_3 \sum x_3 \sum x_3^2}{\Delta} \\ b = \frac{\sum y_1 \sum x_1 + \sum y_2 \sum x_2 + \sum y_3 \sum x_3 - \sum y_1 \sum x_1^2 - \sum y_2 \sum x_2^2 - \sum y_3 \sum x_3^2}{\Delta} \\ c = \frac{\sum y_1 \sum x_1^2 + \sum y_2 \sum x_2^2 + \sum y_3 \sum x_3^2 - \sum y_1 \sum x_1 \sum x_1^2 - \sum y_2 \sum x_2 \sum x_2^2 - \sum y_3 \sum x_3 \sum x_3^2}{\Delta} \end{cases}$$

$$\text{但し } \Delta = \begin{vmatrix} n_1 & \sum x_{11} & \sum x_{11}^2 \\ n_2 & \sum x_{21} & \sum x_{21}^2 \\ n_3 & \sum x_{31} & \sum x_{31}^2 \end{vmatrix}$$

これは直線の場合と同様に、系列を三分して得られる三箇の算術平均を、各群の中央座標とし、その三點を通る二次曲線求める方法に等しい。三次以上の高次曲線に就いても同様にして求めることが出来る。

猶、鈴木諒一氏は「國民所得の統計的解析」(三川學會雜誌、第三十九卷、第十號)に於て、最小一次法によつて回歸係數(Coefficient of regression)を求め、これより Pearson の Product-moment correlation coefficient、及び Spearman の Rank correlation coefficient に代る方法を誘導されてゐるが、最小一次法が既述の性質を有する限り、相關係數測定の簡便法の一たるに止まり、相關係數導出の簡便法として知られてゐる Spearman の Foot-rule、及び Pearson の Grade correlation 等に對して如何なる關係にあるかを検討する必要があるであらう。

(b) 最小距離自乘法 最小自乘法に對して、原數値と數學線との距離の自乗の總和を最小ならしめる方法が考へられる。

即ち一點 (x_1, y_1) より直線 $y = a + bx$ に至る距離の自乗を r とすれば

$$r = (a + bx_1 - y_1)^2 (1 + b^2)^{-1}$$

で與へられる。これを系列の總和に對してその總和を S とすれば

$$S = \sum (a + bx - y)^2 (1 + b^2)^{-1} \quad (i)$$

によつて示される。この S を最小ならしめる a, b を決定するには、 $\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0$ ならしめればよい。即ち

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial a} = \sum (a + bx - y) (1 + b^2)^{-1} = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial b} = \sum [(a + bx - y) \cdot x \cdot (1 + b^2)^{-1} - (a + bx - y)^2 (1 + b^2)^{-2} \cdot b] = 0 \end{cases}$$

故にこれより次の聯立方程式を得る。

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum x \\ (1 - b^2)(a \sum x - \sum xy) + b(\sum x^2 + a(2 \sum y - na) - \sum y^2) = 0 \quad (ii) \end{cases}$$

この方法は最小自乘法に比して複雑であり、殊に b に關する偏微分によつて得られた方程式(ii)が b の項を有するため、 b の數値は正、及び負の場合が得られるが、この b の符號は極大極小の判別法によつて決定することが出来る。即ち極小の場合の數値をとるのである。

茲で原式(i)に負の冪乗の項があるため第二次偏微分に關しては第一次偏微分に於ける負の冪乗の項を問題にする必要はない。即ち(ii)式の左邊をbで偏微分して判別すればよいのである。

先づ(ii)式よりbを求めれば

$$a(y-a)b^2 + [x^2 - (y-a)^2]b - x(y-a) = 0$$

$$[ab^2 - (y-a)] [(y-a)b + x] = 0$$

$$\therefore b = \frac{y-a}{x} \quad \text{(iii)}$$

又は

$$b = -\frac{x}{y-a} \quad \text{(iv)}$$

を得る。更に(ii)式の左邊をbに關して偏微分すれば

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2(y-a)bx + x^2 - (y-a)^2$$

となり、この式に(iii)を代入すれば

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = x^2 + (y-a)^2 > 0$$

又(iv)を代入すれば

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = -[x^2 + (y-a)^2] < 0$$

を得る。即ち(iii)は極小であつて、(iv)は極大である。これ

は數學線の方程式 $\sum ax + by = c$ に於て、所與の系列が上昇的發展傾向、即ち $b > 0$ なる場合に正値をとるのであつて、該系列が下降的發展傾向、即ち $b < 0$ なる場合の極大極小は符號が逆になり負なるときに極小となる。換言すれば所與の系列が上昇的發展傾向を示す場合は得たるbの正値をとり、下降的發展傾向を示す場合にはbの負値をとればよい。殊に

$$\text{(iii)} \times \text{(iv)} = \frac{y-a}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y-a}\right) = -1$$

であつて、これは直線の直交條件であるから實際にbの符號を決定するには所與の系列が上昇的なるか下降的なるかによつて容易に判断することが出来る。

次に最小距離自乗法を適用する二三の例を最小自乗法のそれと比較して述べてみよう。

例1 時系列が第1表のy系列の如く與へられたとする。

最小自乗法1 第1表より得られた數値を

$$\begin{cases} \sum y = ma + b \sum x \\ \sum xy = a \sum x + b \sum x^2 \end{cases}$$

に代入すれば

第1表

x	y	xy	x ²	y ²
0	1	0	0	1
1	2	2	1	4
2	3	6	4	9
3	4	12	9	16
4	5	20	16	25
5	6	30	25	36
6	7	42	36	49
7	8	56	49	64
8	9	72	64	81
9	10	90	81	100
10	11	110	100	121
11	12	132	121	144
12	13	156	144	169
13	14	182	169	196
14	15	210	196	225
15	16	240	225	256
16	17	272	256	289
17	18	306	289	324
18	19	342	324	361
19	20	380	361	400
20	21	420	400	441
21	22	462	441	484
22	23	506	484	529
23	24	552	529	576
24	25	600	576	625
25	26	650	625	676
26	27	702	676	729
27	28	756	729	784
28	29	812	784	841
29	30	870	841	900
30	31	930	900	961
31	32	992	961	1024
32	33	1056	1024	1089
33	34	1122	1089	1164
34	35	1190	1164	1241
35	36	1260	1241	1324
36	37	1332	1324	1411
37	38	1406	1411	1504
38	39	1482	1504	1601
39	40	1560	1601	1704
40	41	1640	1704	1811
41	42	1722	1811	1924
42	43	1806	1924	2041
43	44	1892	2041	2164
44	45	1980	2164	2291
45	46	2070	2291	2424
46	47	2162	2424	2561
47	48	2256	2561	2704
48	49	2352	2704	2851
49	50	2450	2851	3004
50	51	2550	3004	3161
51	52	2652	3161	3324
52	53	2756	3324	3491
53	54	2862	3491	3664
54	55	2970	3664	3841
55	56	3080	3841	4024
56	57	3192	4024	4211
57	58	3306	4211	4404
58	59	3422	4404	4601
59	60	3540	4601	4804
60	61	3660	4804	5011
61	62	3782	5011	5224
62	63	3906	5224	5441
63	64	4032	5441	5664
64	65	4160	5664	5891
65	66	4290	5891	6124
66	67	4422	6124	6361
67	68	4556	6361	6604
68	69	4692	6604	6851
69	70	4830	6851	7104
70	71	4970	7104	7361
71	72	5112	7361	7624
72	73	5256	7624	7891
73	74	5402	7891	8164
74	75	5550	8164	8441
75	76	5700	8441	8724
76	77	5852	8724	9011
77	78	6006	9011	9304
78	79	6162	9304	9601
79	80	6320	9601	9904
80	81	6480	9904	10211
81	82	6642	10211	10524
82	83	6806	10524	10841
83	84	6972	10841	11164
84	85	7140	11164	11491
85	86	7310	11491	11824
86	87	7482	11824	12161
87	88	7656	12164	12504
88	89	7832	12504	12851
89	90	8010	12851	13204
90	91	8190	13204	13561
91	92	8372	13561	13924
92	93	8556	13924	14291
93	94	8742	14291	14664
94	95	8930	14664	15041
95	96	9120	15041	15424
96	97	9312	15424	15811
97	98	9506	15811	16204
98	99	9702	16204	16601
99	100	9900	16601	17004
100	101	10100	17004	17411
101	102	10302	17411	17824
102	103	10506	17824	18241
103	104	10712	18241	18664
104	105	10920	18664	19091
105	106	11130	19091	19524
106	107	11342	19524	19961
107	108	11556	19961	20404
108	109	11772	20404	20851
109	110	11990	20851	21304
110	111	12210	21304	21761
111	112	12432	21761	22224
112	113	12656	22224	22691
113	114	12882	22691	23164
114	115	13110	23164	23641
115	116	13340	23641	24124
116	117	13572	24124	24611
117	118	13806	24611	25104
118	119	14042	25104	25601
119	120	14280	25601	26104
120	121	14520	26104	26611
121	122	14762	26611	27124
122	123	15006	27124	27641
123	124	15252	27641	28164
124	125	15500	28164	28691
125	126	15750	28691	29224
126	127	16002	29224	29761
127	128	16256	29761	30304
128	129	16512	30304	30851
129	130	16770	30851	31404
130	131	17030	31404	31961
131	132	17292	31961	32524
132	133	17556	32524	33091
133	134	17822	33091	33664
134	135	18090	33664	34241
135	136	18360	34241	34824
136	137	18632	34824	35411
137	138	18906	35411	36004
138	139	19182	36004	36601
139	140	19460	36601	37204
140	141	19740	37204	37811
141	142	20022	37811	38424
142	143	20306	38424	39041
143	144	20592	39041	39664
144	145	20880	39664	40291
145	146	21170	40291	40924
146	147	21462	40924	41561
147	148	21756	41561	42204
148	149	22052	42204	42851
149	150	22350	42851	43504
150	151	22650	43504	44161
151	152	22952	44161	44824
152	153	23256	44824	45491
153	154	23562	45491	46164
154	155	23870	46164	46841
155	156	24180	46841	47524
156	157	24492	47524	48211
157	158	24806	48211	48904
158	159	25122	48904	49601
159	160	25440	49601	50304
160	161	25760	50304	51011
161	162	26082	51011	51724
162	163	26406	51724	52441
163	164	26732	52441	53164
164	165	27060	53164	53891
165	166	27390	53891	54624
166	167	27722	54624	55361
167	168	28056	55361	56104
168	169	28392	56104	56851
169	170	28730	56851	57604
170	171	29070	57604	58361
171	172	29412	58361	59124
172	173	29756	59124	59891
173	174	30102	59891	60664
174	175	30450	60664	61441
175	176	30800	61441	62224
176	177	31152	62224	63011
177	178	31506	63011	63804
178	179	31862	63804	64601
179	180	32220	64601	65404
180	181	32580	65404	66211
181	182	32942	66211	67024
182	183	33306	67024	67841
183	184	33672	67841	68664
184	185	34040	68664	69491
185	186	34410	69491	70324
186	187	34782	70324	71161
187	188	35156	71161	72004
188	189	35532	72004	72851
189	190	35910	72851	73704
190	191	36290	73704	74561
191	192	36672	74561	75424
192	193	37056	75424	76291
193	194	37442	76291	77164
194	195	37830	77164	78041
195	196	38220	78041	78924
196	197	38612	78924	79811
197	198	39006	79811	80704
198	199	39402	80704	81601
199	200	39800	81601	82504
200	201	40200	82504	83411
201	202	40602	83411	84324
202	203	41006	84324	85241
203	204	41412	85241	86164
204	205	41820	86164	87091
205	206	42230	87091	88024
206	207	42642	88024	88961
207	208	43056	88961	89904
208	209	43472	89904	90851
209	210	43890	90851	91804
210	211	44310	91804	92761
211	212	44732	92761	93724
212	213	45156	93724	94691
213	214	45582	94691	95664
214	215	46010	95664	96641
215	216	46440	96641	97624
216	217	46872	97624	98611
217	218	47306	98611	99604
218	219	47742	99604	100601
219	220	48180	100601	101604
220	221	48620	101604	102611
221	222	49062	102611	103624
222	223	49506	103624	104641
223	224			

數學線に就いて

$$\begin{cases} 35 = 7a + 21b \\ (1-b^2)(21a-85) + b(91+a(70-7a)) - 203 = 0 \end{cases}$$

これより

$$a = 5 - 3b$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} (1-b^2)(21(5-3b)-85) + b(91+(5-3b)(70-7 \\ (5-3b)) - 203) &= 0 \\ (1-b^2)(20-63b) + 63b(1-b^2) &= 0 \\ 1-b^2 &= 0 \quad \therefore b = \pm 1 \end{aligned}$$

このbの符號を極大極小の判別法によつて求めるには

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = -2b$$

bの數値を代入すれば

$$\begin{cases} b=1 \text{ のとき } \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = -2 < 0 \\ b=-1 \text{ のとき } \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 > 0 \end{cases}$$

となるから求める數學線の方角係數は

$$b = -1$$

である。又これは系列自體から直ちに判断出来る(第1表、第1圖)。これを

$$\begin{cases} a = 5 - 3b \\ a = 8 \end{cases}$$

に代入すれば

$$a = 8$$

よつて最小距離自乘法による數學線の方程式は

$$y = 8 - x \quad (\text{第1圖 } A_0)$$

である。

例2 時系列に於てはx系列が等間隔であるため原點をその中央にとれば $M_S = 0$ となるから第2表より求めれば

最小自乘法1

$$\begin{cases} 7a = 35 \\ 28b = -30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -\frac{15}{14} = -1.07 \end{cases}$$

故に數學線の方程式は

$$y = 5 - 1.07x \quad (\text{第2圖 } A_1)$$

最小自乘法2

第2表

x	y	xy	x ²	y ²
1	3	3	1	9
2	2	4	4	4
3	1	3	9	1
4	0	0	16	0
5	2	10	25	4
6	4	24	36	16
7	1	7	49	1
8	3	24	64	9
9	2	18	81	4
10	1	10	100	1
11	0	0	121	0
12	2	24	144	4
13	4	52	169	16
14	1	14	196	1
15	3	45	225	9
16	2	32	256	4
17	1	17	289	1
18	0	0	324	0
19	2	38	361	4
20	4	80	400	16
21	1	21	441	1
22	3	66	484	9
23	2	46	529	4
24	1	24	576	1
25	0	0	625	0
26	2	52	676	4
27	4	108	729	16
28	1	28	784	1
29	3	87	841	9
30	2	60	900	4
31	1	31	961	1
32	0	0	1024	0
33	2	66	1089	4
34	4	136	1156	16
35	1	35	1225	1
36	3	108	1296	9
37	2	74	1369	4
38	1	38	1444	1
39	0	0	1521	0
40	2	80	1600	4
41	4	164	1681	16
42	1	42	1764	1
43	3	129	1849	9
44	2	88	1936	4
45	1	45	2025	1
46	0	0	2116	0
47	2	94	2209	4
48	4	192	2304	16
49	1	49	2401	1
50	3	147	2500	9
51	2	102	2601	4
52	1	52	2704	1
53	0	0	2809	0
54	2	108	2916	4
55	4	220	3025	16
56	1	56	3136	1
57	3	171	3249	9
58	2	116	3364	4
59	1	59	3481	1
60	0	0	3600	0
61	2	122	3721	4
62	4	248	3844	16
63	1	63	3969	1
64	3	192	4100	9
65	2	130	4241	4
66	1	66	4384	1
67	0	0	4529	0
68	2	136	4684	4
69	4	272	4849	16
70	1	70	5024	1
71	3	213	5211	9
72	2	144	5404	4
73	1	73	5601	1
74	0	0	5800	0
75	2	150	6001	4
76	4	304	6204	16
77	1	77	6409	1
78	3	231	6616	9
79	2	158	6824	4
80	1	80	7031	1
81	0	0	7240	0
82	2	164	7449	4
83	4	332	7660	16
84	1	84	7871	1
85	3	255	8084	9
86	2	174	8304	4
87	1	87	8521	1
88	0	0	8740	0
89	2	182	8961	4
90	4	360	9184	16
91	1	91	9409	1
92	3	273	9636	9
93	2	186	9864	4
94	1	94	10091	1
95	0	0	10316	0
96	2	192	10544	4
97	4	388	10771	16
98	1	98	11000	1
99	3	297	11224	9
100	2	200	11449	4

$$\begin{cases} 7a = -35b \\ 35a = -227b + 30 \end{cases}$$

を解くと

$$\begin{cases} a = \frac{75}{26} = 2.88 \\ b = -\frac{15}{26} = -0.577 \end{cases}$$

を得る。よつて數學線の方程式は

$$x = 2.88 - 0.577y$$

(第2圖 A₂)

最小距離自乘法

$$\begin{cases} a = 5 \\ (1-b^2) \cdot 30 + b(28+a(70-7a)) - 227 = 0 \end{cases}$$

これを解けば

$$-5b^2 - 4b + 5 = 0$$

$$\therefore b = 0.677 \text{ 又は } b = -1.477$$

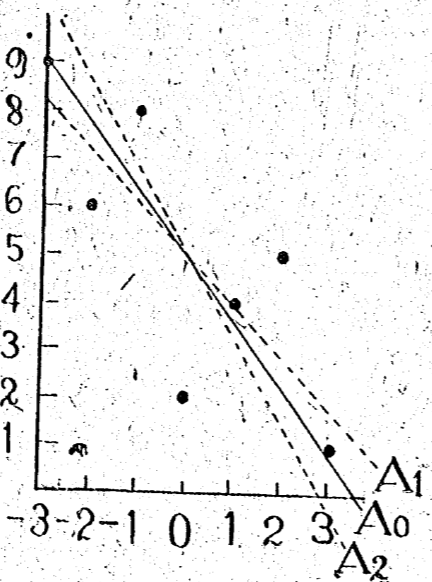
bの符號を決定するには

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = -10b - 4$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = -10b - 4$$

bの數値を代入すれば

數學線に就いて



第2圖

$$\begin{cases} 7b = 0.677 \text{ のとき } \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = -10.77 < 0 \\ b = -1.477 \text{ のとき } \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 10.77 > 0 \end{cases}$$

従つて數學線の方程式は

$$y = 5 - 1.477x \quad (\text{第2圖 } A_0)$$

となる。

例3 次に上昇的發展傾向を示す例を第3表によつて求めよう。

最小自乘法1

數學線に就いて

$$\begin{cases} 7a=56 \\ 28b=24 \end{cases}$$

これより

第3表

x	y	xy	x^2	y^2
1	3	3	1	9
2	2	4	4	4
3	1	3	9	1
4	0	0	16	0
5	1	5	25	1
6	2	12	36	4
7	3	21	49	9
	0	56	28	480

$$\begin{cases} 7a = -56b \\ 56a = -480b + 24 \end{cases}$$

これを解すと

$$\begin{cases} a = -6 \\ b = 0.75 \end{cases}$$

となるから數學線の方程式は

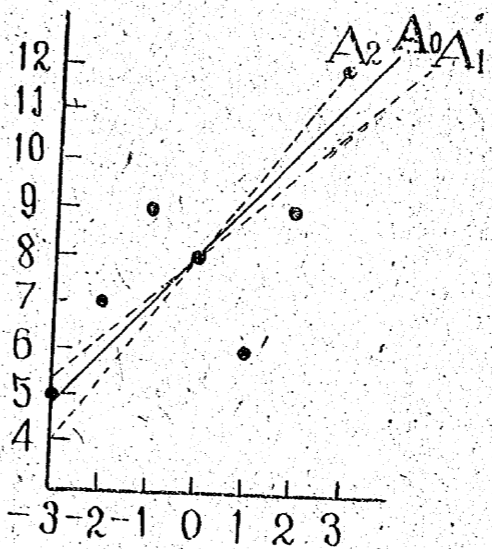
$$\begin{aligned} x &= -6 + 0.75y \\ \therefore y &= 8 + 1.333x \end{aligned}$$

(第3圖 A₂)

最小距離自乗法

$$\begin{cases} a=8 \\ (1-b^2)(-24)+b(28+a(112-7a)-480)=0 \end{cases}$$

これを解すと



第3圖

$$6b^2 - b - 6 = 0$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{12}$$

$$\therefore b = 1.087 \text{ 又は } b = -0.920$$

所與の系列は上昇的傾向を示してゐるから

$$b = 1.087$$

従つて數學線の方程式

$$y = 8 + 1.087x$$

(第3圖 A₀)

これらの例から直ちに解することは最小距離自乗法による數學線が最小自乗法による二方法のそれに對して言はゞ平均的位置に置かれてゐることである。

最小距離自乗法による數學線は H. Schultz がその Statistical laws of demand and supply, with special application to sugar, 1928 に於て、砂糖に對する需要曲線の導出に最小自乗法による方法と、彼自ら The line of best fit と稱するこの最小距離自乗法を適用する場合とを比較してこれを論じてゐるが、未だその論據が不正確と思はれる。この Schultz に對する批判は後に譲るとして、最小自乗法に對してその簡便法たる最小一次法が誘導されたと同様に、最小距離自乗法に就いても簡便法が考へられる。

即ち系列の各項より直線に至る距離の絶対値の總和

$$r = \sum (a+bx-y)(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

數學線に就いて

を最小ならしめる a 、 b を決定するには、 r を二分して方程式を求めて各々を零ならしめれば

$$\begin{cases} \sum y_1 = n_1 a + b \sum x_1 \\ \sum y_2 = n_2 a + b \sum x_2 \end{cases}$$

となるが、これは最小一次法による結果と同一である。猶、この外にも統計系列と數學線との乖離を縦軸に對すると、横軸に對するとの自乗の總和の合計を最小ならしめる方法(註)が考案されてゐるが、茲では割愛する。

註 W. E. Deming, Statistical adjustment of data, New York, 1942. 尚、この論文に於ては該方法を適用して「一般曲線」Normal curve. 指数曲線、双曲線等に就いても論述されてゐる。

三、趨勢變動除去と座標軸變換

時系列は一般に、長期傾向、即ち趨勢變動 (Secular trend)、季節變動 (Seasonal variation)、循環運動 (Cyclical movement)、及び不規則變動 (Irregular movement) を同時に包括してゐる場合が多く、或目的に對する一箇の手段として系列中にあるこれらの變動を除去し、以てその分析可能な系列に變換してこれを統計學の解析しうる範疇に歸屬せしめて分析を行ふ必要があ

る。これら諸般の變動を除去する方法として、移動平均法 (Moving average)、遞差法 (Difference method)、連鎖比率法 (Link-relative method)、連鎖比率法 (Chain-relative method) 等が存し、移動平均法、連鎖比率法、及び連鎖比率法が季節變動、循環運動、不規則變動の除去に資するに對し、趨勢變動のそれに就いては獨り數學線がその地位を占める。時系列解析に於ける數學線は、單に長期傾向を判斷するに用ひられるよりも、時系列からその趨勢變動の影響を除去する役割を演ずること屢々であつて、遞差法も亦趨勢變動除去に用ひられ、且つその論據は數學線に存するのであるが、技術的にはそれが表面に現れない。

即ち時系列は、time-interval が等間隔に置かれてゐる爲、系列を順次に結ぶ線が直線を示す場合には、系列各項の一時點前の數値との差、即ち第一次遞差 (First difference) は常に等しく、又二次曲線を示す場合にはこの第一次遞差の遞差、即ち第二次遞差が相等しい。一般に n 次曲線に於ける n 次の遞差は恒等となり、 $n+1$ 次の遞差は總て零となる。この理に従ひ、遞差が最も零に近接する場合の一次少ない次數のそれを採るのである。

が、原系列の分布が不規則の灣曲を示す場合、即ち偶々符號を變へる遞差があると、それよりも高次の遞差の絶對値は零に接近しないで却つて發散しはじめる。所與の時系列は決して完全な函數關係にあるのではなく、右に述べた如き變動を有してゐるため、原系列が斯くの如き分布を示すことは寧ろ特殊な場合であり、一般には遞差の變動がその次數を増すごとに漸次増大するのであつて、該方法は次數を次第に増加する遞差が零に接近する場合のみ妥當する。又、この方法は系列各項の差をとるため、その數値は相對數ではなく絶對數である。それ故原系列の絶對値大なるときはその差も必然大であつて、變動の大きさによつて著しく左右され、趨勢變動を除去することは不可能である。又遞差の次數を増せば移動平均法と同様に兩端に位する値は得られず、茲に數學線が登場する。

時系列の解析用具としての數學線を傾向線と云ふが、從來はこの傾向線が直線以外の高次曲線に對してもこの名稱が附されてゐた。然し先に述べた諸般の變動を一考すればこれが妥當し得ないことは直ちに理解しうる。即ち高次の曲線が最も近接するやうな時系列は必ず趨勢變動

動以外の變動、換言すれば、季節變動、循環運動及び不規則變動等を有してゐるのであつて、これをも趨勢變動に導入することは誤謬を冒すも甚だしいと云はなければならぬ。趨勢、又は傾向とは原系列を總體的に觀たる場合にその趨勢、即ち傾向が上昇的なるか、又は下降的なるかを識別するのであつて、當該變動に關する數學線は必ず直線でなければならぬ。換言すれば傾向線は直線のみを指すのである。

註、茲に「直線」と限定したのは、その發展が本質的に算術級數的な場合であつて、現象が幾何級數的發展をする場合、即ち semi-logarithm をとれば直線で示される場合は指數曲線、及び特殊な場合として有機體の發展には、Gompertz curve Logistic curve をも包含する。

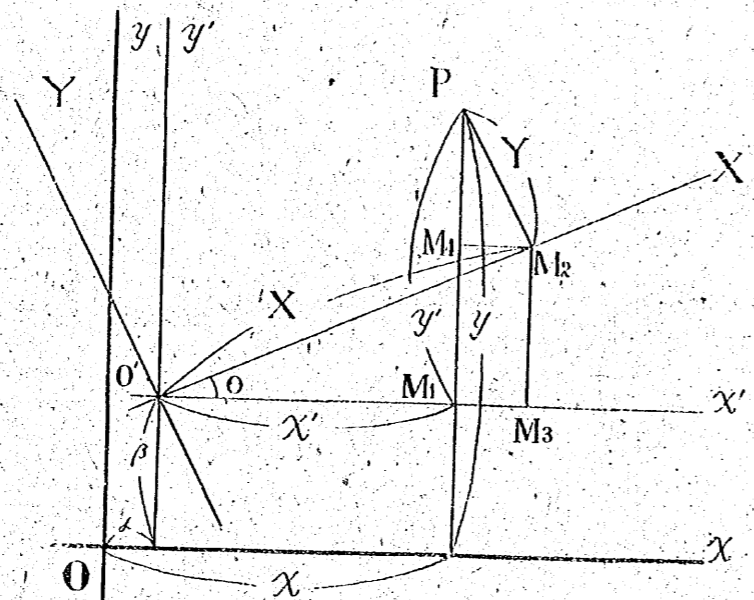
而して統計的な諸般の變動を除去する場合は右に述べた如く、絶對數をとつたのでは完全に變動を除去することは出来ず、相對數を必要とするのである。趨勢變動に於ても亦同様である。即ち傾向線が系列に對する趨勢の標準であつて、これに對して原系列の各項と、その照應する傾向線の各數値、即ち傾向値との差を傾向値で除した比率及び原系列と傾向値との比率をとる對傾向値比率

數學線に就いて

(Method of trend-ratios) による方法が考へられる。前者は後者から 1 を差引いたものであるから兩者の根本原理は全く同一である。又前者は算術平均を基準とする變化係數 (Coefficient of variation) と同一の理に基く。この方法によれば相對數、即ち指數であるから遞差法の如き絶對數をとつた場合に冒した缺陷を補ふことが出来る。然しこの方法にも一つの前提を含んでゐるのである。即ち時系列の變動が傾向値に比例することそれである。換言すれば傾向線を中心とする相對的變動も亦統計系列の如何によつて異なるのであつて、このため變動大なる系列は亦標準偏差 (Standard deviation) 大なりとして、對傾向値比率から 1 を減じた一種の偏差を基にして標準偏差を求め、これを以て對傾向値比率から 1 を減じた數値を除したとしても、嚴密な意味で趨勢變動を除去することは不可能である。即ちこの偏差の系列に尙變動ありとして再び偏差をとり、この操作を繰返しても尙趨勢變動は残るのである。茲に述べた傾向線は勿論最小自乗法によつて導出されたものであるが、結局は時系列に對してその趨勢を最小自乗法によつて求めたものでは眞の意味での傾向を把握することが出来ないのである。

最小自乗法による傾向線は、前述せる如く原系列と決定された數學線の同一時点の數値との垂線の自乗の總和を最小ならしめる傾向線を導出するのであつて、分布された系列の各數値が常に座標軸の影響を蒙る。このことは不合理であつて、一旦座標軸が決定されれば、座標軸とは無關係に傾向線が決定されなければならぬ。即ち統計系列の一般傾向を判断しうるのは同一時點に於ける垂線の自乗を最小にするのではなく、所與の系列よりの距離の自乗を最小にしなければならぬ。換言すれば最小距離自乗法によつてその傾向を判断すべきである。従つてこの最小自乗法に代る Deming 氏の方法によつても、その原理は最小自乗法と同一であるため座標軸に蒙る影響を廢除することは不可能である。

この最小距離自乗法による傾向線の理論値は、原系列よりその傾向線に下された垂線の足の座標であつて、時點を共にする傾向線の數値ではない。然らば、この傾向線に對して、如何にその趨勢變動を除去するかの問題は、先に述べた比率等による方法と異り、この傾向線を横軸とする座標軸に變換するのである。この座標軸變換は次に示す方法によつて得られる。



第 4 圖

故に
 (3) $y' = X \cdot \sin\theta + Y \cdot \cos\theta$
 即ち方程式(1)、(2)、(3)より次に示す公式を得る。

數學線に就いて

第4圖に於て座標軸 Ox, Oy に関する點 P の座標を (x, y) 、點 O の座標を (α, β) とし、 Ox, Oy に對して各々平行に引いた座標軸 Ox', Oy' に関する點 P の座標を (x', y') とすれば次の關係式が得られる。

$$(1) \begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

次に座標軸 Ox', Oy' を $\angle\theta$ だけ回轉した場合の座標軸 Ox, Oy に関する點 P の座標を (X, Y) とし、點 P より Ox 軸に下した垂線の足を各々 M_1, M_2 とし、 M_2 より Oy 軸に下した垂線の足を M_3 、又 M_1 より Oy 軸に對して平行に引いた線と P, M_2 との交點を M_4 とすれば

$$x' = OM_1 = OM_2 - M_4M_2 = OM_2 \cdot \cos\theta - PM_2 \cdot \sin\theta$$

然るに

$$\angle P = \angle\theta$$

故に

$$(2) x' = X \cdot \cos\theta - Y \cdot \sin\theta$$

同様にして

$$y' = PM_1 = M_2M_3 + PM_4 = OM_2 \cdot \sin\theta + PM_2 \cdot \cos\theta$$

原座標軸によつて與へられた數學線の方程式に對して座標軸變換を行ふには、所與の方程式にこの公式を代入することによつて得られる。

然し趨勢變動の除去にこの方法を適用する場合は、導出された傾向線を横軸とする座標軸に變換するのであるから傾向線の方程式から得られる數値と原系列の數値とを該公式に代入して解けばよい。

茲で一考せねばならぬことは變換された系列の座標は X 座標に關してその interval は等しくなく、従つて X 座標は α 座標に於けると同様に time-interval を等しく置き換へる。即ち原系列各項の時點を換へることなく變換された座標軸に關して、 X 座標が等間隔をうるやうに Y 座標を X 軸に對して平行移動を行ふのである。そのため新なる座標の決定には Y 座標のみを求めればよい。従つて Y 座標は原系列と傾向線との距離に正、負の符號をつけたものに等しい。尙この變換した系列に關して決定された數學線は不變である。

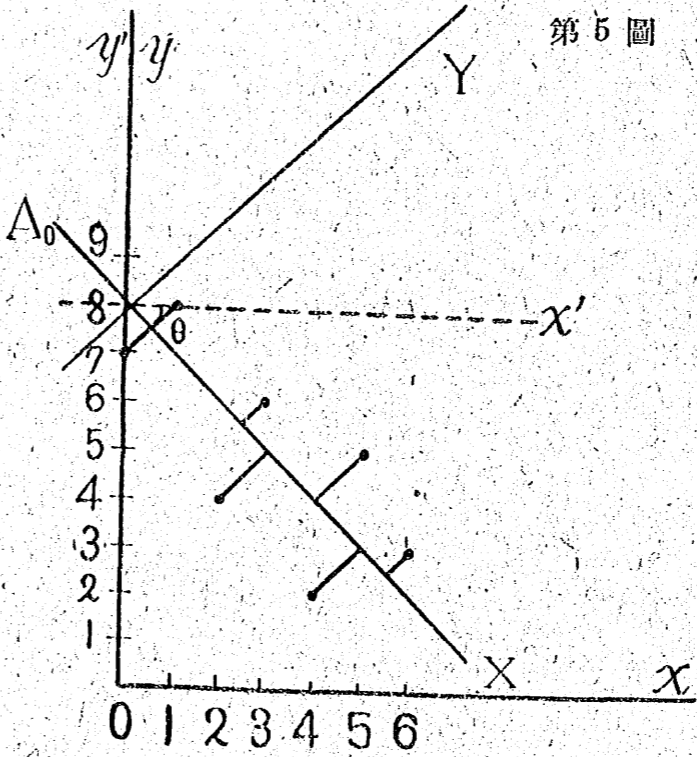
試みに先の例に就いて趨勢變動を該方法によつて除去

数値線に就いて

してみよう。

第1表より最小距離自乗法を適用して得た傾向線の方程式は、

$$y = 8 - x$$



第5圖

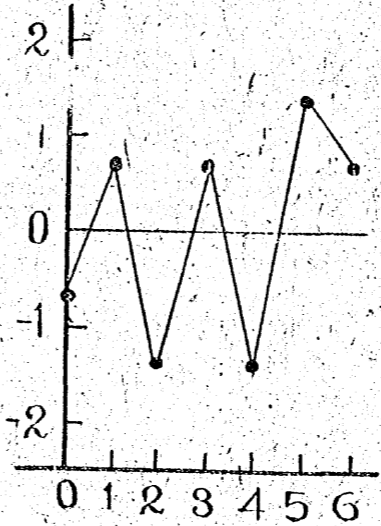
四六一 (六六四)

であるから座標軸變換を行ふには第5圖より

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 8 \\ \sin \theta = \sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta = \cos(-45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

よつて

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) + 8 \end{cases}$$



第6圖

これを解いて

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-8)$$

を得る。この x, y に原系列の各数値を代入して解けば第4表に示す新なる数値が得られる。尙これを圖示すれば第6圖の如く表される。

x	y	Y
0	7	-0.707
1	8	0.707
2	4	-1.414
3	6	0.707
4	2	-1.414
5	5	1.414
6	3	0.707

次に原系列と傾向線との距離を求めてみよう。

一點 (x_1, y_1) より直線 $y = a + bx$ に至る距離の方程式

$$r = \frac{y_1 - a - bx_1}{\sqrt{1+b^2}}$$

で示されるからこの傾向線から得られる方程式は

$$r = \frac{y_1 - 8 + x_1}{\sqrt{2}}$$

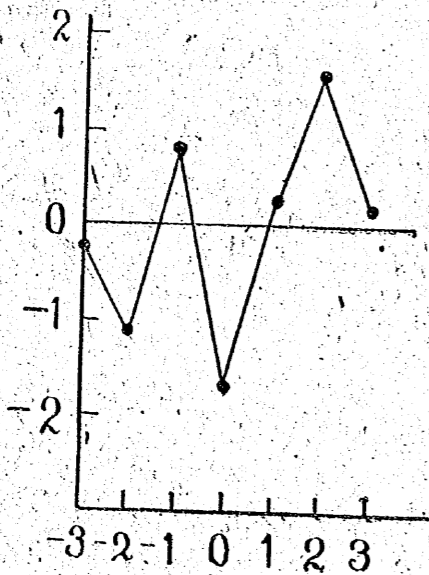
x	y	Y
-3	9	-0.244
-2	6	-1.096
-1	8	0.852
0	2	-1.680
1	4	0.268
2	5	1.656
3	1	0.244

となり、座標軸變換によつて求めた方程式と同一である

数値線に就いて

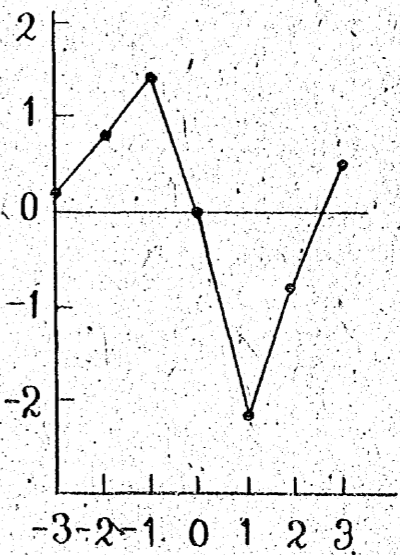
る。同様にして第2表、第3表より求めれば第5表、第6表に示す数値が得られ、これを圖示すれば第7圖、及び第8圖によつて示される。

x	y	Y
-3	5	0.177
-2	7	0.803
-1	9	1.429
0	8	0.000
1	6	-2.114
2	9	-0.803
3	12	0.508



第7圖

四七 (六六五)



第8圖

斯くの如くして時系列の趨勢變動を除去する。これは最小自乗法によつて趨勢變動を除去する方法と異り、傾向線が座標軸に對して影響されず合理的であるため當該變動の影響を完全に除去することが出来る。

時系列解析に於ける傾向線の導出は單に當該系列の發展傾向を認識するに止まらず、進んで諸般の變動を控除して循環運動を誘導するのであつて、時系列、特に年次系列から趨勢變動を除去すれば、年次系列には季節變動が存在しないから残存する變動は循環運動と不規則變動である。この不規則變動を把握し、且つ解決することは不可能であるため、この循環運動と不規則變動をも一體

とした系列をも敢て循環運動と認めて週期解析を行ふのである。即ち時系列を總體的に觀た場合の長期的週期が前述した最小距離自乗法に基く座標軸變換によつて得られるのに對して、長期的週期自體が包含してゐる短期的週期はこれのみから直接に誘導することは出来ない。従つてこの短期的週期を測定するには長期的週期に對してフリーエ曲線を當嵌め、修正された系列と該曲線との距離を求めて週期解析を行へば短期の循環運動が具體的に得られるのである。

勿論趨勢變動はそれ自體時系列の各項に存在してゐる諸般の變動に對して相當の影響を蒙つてゐるため、その各々が有してゐる變動の程度、換言すれば各種の variation weight をも充分考慮する必要があるが、この質を量に轉換することの困難は、Marshall が經濟諸量の分析に「時といふ要素に關する困難」を論じたるに等しい。

四、最小自乗法による數學線の妥當性

數學線に關して今日迄論議されて來たことは最小自乗法が確率論に於ける誤差の理論より出發したことであるが、結局は誤差の起る確率法則に基いてその適用される

對象、即ち問題を社會科學の領域に限定するならば、現實社會に生起する現象が確率論で取扱ふ at random に選出された個々の獨立事象とその本質を異にすることである。この社會に生起する現象は、殊に經濟學に於て問題にする如く、總てが相互依存の關係を有してゐるのであつて、社會現象が抽出された個々の數量も亦この從屬的關係に置かれてゐるのである。この理由から數學で取扱はれる確率論の從屬事象に結合されると考へるのは誤りである。例へば同一の袋に入れられた數個の球より一球を取り出して、次にこの抽出された球を再びその袋に入れることなく同一の袋から次の一球を取り出すときは、確に從屬的關係に置かれてゐるが、この第一回目も、又第二回目に於ても抽出するときは個々獨立であつて、唯茲で從屬と云ひうるのは第二回目の抽出に際しては、第一回目のそれよりも球の數が一箇少いと云ふに止まる。

斯くの如く確率論に於ける理論的根據が社會科學のそれと異なるため認識の客觀性を無視して、この最小自乗法を統計解析に適用することが妥當し得ないとしても、抽象的・形式的な數學を援用する限りは、この相互依存の

數學線に就いて

關係を解決することは不可能である。若しそのために社會科學の領域に於てこの數學を援用することが誤謬であるとすれば、今日迄達して來た數理經濟學、及び經濟學へ統計的方法が適用されたことは却つて經濟學の本質を破壊するものであつて、寧ろ經濟學がこれら數學の力を借りてその分析手段たらしめたことは一大不祥事であるといはなければならぬ。

翻つて冒頭に記した如く科學的研究は理論を現實に近似せしめんとするその理論、即ち法則を導出するに存するのである。經濟學に數學、乃至統計的方法を導入せしめたのは、その形式的形態が著しく近似してゐることに依存するものであつて、このことは何人と雖も認めなければならぬ規約である。Jevons はその The theory of political economy の序文に「余は久しく經濟學は終始數量を取扱ふが故に、假令言葉に於ては然らずとするも實質的には一箇の數學的科學たらざる可らずと考へて來た。余は效用、價值、勞動、資本等に關する正確なる數量的概念に到達せんと努力し、そして余は最も困難なる概念の或るもの、就中價值なる最も錯雜せる概念が如何に明白に數學的解析と表現とを許すかを發見して屢々驚

かされた」と、又 Cournot は Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses に於て「大さの間の關係が問題となれる場合に、數學の符號を使用することは極めて自然である。假りに嚴密に必要ならずとしても、それが讀者の或る人々に縁遠いのために、又それが時に誤つて使用せられるがために、これを拒絶することは決して合理的ではない。蓋しこれは問題の敘述を容易にし、これを一層簡潔ならしめ、更に廣き發展への道を開き、又漠然たる討論の邪道に入ることとを防ぐことが出来るからである」と述べてゐるが、孰れもこの規約に基くのである。

一般均衡論に於てその需要法則を $D = F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ なる數學記號を起用するのも Cournot の云へる如く「數學解析に長ずる人々は、數學の目的が單に數を計算するに止まらず、進んで數字的に表現し得ざる大さの關係を見出すためにも、又その法則が代數的記號を以て説明し得ざる函數間の關係を見出すためにも用ひられることを知つてゐる」からであつて、この需要法則を具體的に解くことは不可能に近いが、經濟學の本質よりこれを眺めるならば、この方程式を以てしても尙不充足であ

る。即ち個々の價格 p_1, p_2, \dots, p_n は決して獨立に與へられたものではなく、これ自體が亦相互依存の關係に置かれてるのである。然し數理經濟學に於ける數學の援用は理解を容易ならしめるための手段たるものであるが、統計的方法のそれは現實より得られた數量を以て具體的に解くと云ふことが附加されるため社會現象への適用には大なる問題を殘してゐるのである。然し茲でこの根本問題に觸れることは避けて、確率論で取扱ふ誤差と、それを統計解析に適用した場合の誤差乃至變動との關係に就いて述べてみよう。

確率論に於ける誤差を直ちに統計解析に於ける同様の誤差と解釋することは誤りである。即ち確率論で取扱ふ數値は一個の測定値であるから、必ず數値自體に誤差を含んでゐるのであるが、統計系列で取扱ふ場合のそれは、real value であつて確定値でなければならぬ。若しその數値が幾何の誤差を有してゐるとしても、統計解析を行ふ以上は確定値と認めて解析を行ふのである。統計解析で考慮すべき誤差は當該解析の結果得られた抽象的數値に對してなされるのである。最小自乗法の理論に於て、測定値より得られる最確値は見掛の誤差の自乗の總

和を最小ならしめる値であるが、この見掛の誤差を座標軸に對して測定しなければならぬ理由は毫もなく、傾向線に對する問題の中心は座標軸にその影響を蒙るか否かに存するのである。

即ち先に述べれ趨勢變動に關する考察に於ても、時系列の一般傾向を把握する場合に時系列として與へられた各項に誤差があるとの理由から最小自乗法による傾向線が屢々使用されて來たのであるが、時系列の各項を確定値と認めればこそ統計解析が可能とされるのであつて、座標軸に影響されるが如き解析方法が妥當しないのである。

最小自乗法によつて誘導された傾向線を基礎としてその對傾向値比率を算出し、それによつて如何に趨勢變動の影響を除去する數値を得たとしても、決して時系列自體の誤差は問題にされてゐないのである。若しこの時系列に含まれてゐる誤差が考慮されるとするならば、時系列が與へられたときの誤差に對する weight がその解析方法の中に存在しなければならぬ。

Schultz が砂糖に對する需要曲線の導出に「一般には變數の任意の一方を獨立變數とし、他方の從屬變數の

數學線に就て

み誤差があるとして最小自乗法を用ひてゐるのであるが、これは何れを獨立變數に選ぶかによつて、所與の變數が函數關係にある場合を除いては相異なる需要曲線が誘導されるから、この方法は不正確であるとして斥け、誤差は變數の双方にあるとの理由から、この最小距離自乗法を適用して需要曲線を求めて、これを The line of mutual regression 又は The line of best fit としたのであるが、この理由は誤りである。先にも述べた如く系列の誤差を考慮して數學線を求めるとしても、それ程系列誤差が問題の中心に置かれるとするならば、系列の誤差に對する weight を充分把握し、且つ解決されない限り、如何なる方法を以てしても數學線を導出することは不可能であるばかりでなく、經濟系列に關する統計解析が意義をもたない。即ち統計資料自體に有意義の誤差があると認められるが如き資料に對して統計解析を行ふことが既に誤謬である。結局最小自乗法を統計解析に適用する場合に、最小自乗法の理論で問題とする「誤差」は、統計解析に於ては「變動」、又は「理論値に對する乖離」と解すべきであつて、この間の事情が屢々混同して用ひられたため、統計解析に於ける客觀的妥當性が附

與されなかつたのである。然らば最小自乗法による數學線は如何なる場合にその意義を有するであらうか。最小自乗法によつて誘導された數學線は動態平均線であつて、系列の縦軸に對する乖離の自乗の總和は最小である。即ちこれと同一方法によつて算出する限り、他の如何なる方法で導出された數學線のそれよりも小である。換言すれば系列各項を結ぶ直線と、この數學線とが交つてなす面積の當該數學線に對する上位と下位の面積の總和が等しく、且つ最小である。このことは高次の曲線に就いても妥當する。この性質を認識すれば、最小自乗法による數學線の統計解析に於ける妥當性が明確となる。

即ち諸般の變動を有する所與の系列に關して、該系列が平均的な發展をするとしたならば如何なる推移過程を示すかを判断する場合、且又時系列に關しては當該系列中に含まれてゐる状態がそのまま持續すると假定するな

らば、將來の各時點に於て具體的に如何なる状態が得られるかを長期に亘つて豫測する場合に於ては、原系列の各項に照應する數學線の數値との乖離の自乗の總和を最小ならしむべきであつて、原系列各項に最も近接する數學線、即ち高次の曲線を選ぶべきである。この平均的推移過程、及び將來豫測に於ては單なる一般傾向が問題となるのではなく、原系列と同一時點に置かれた動態平均値を必要とするのであつて、斯かる場合に數學線と同一時點に於ける原系列各項との乖離の自乗の總和を最小ならしめる最小自乗法による數學線が最も妥當するのである。

統計學が數量を以て過去を把握し、又進んで具體的に將來を豫測するにその意義があるとすれば、時系列解析に關してこの數學線を傾向線と區別するため、例へば前者を「推移線」、後者の場合を「豫測線」とするのが至當であらう。(了) (二九四八・八・一五)

享保期を中心とせる

幕府徴租様式の變質について

— 檢見春法と定免制 —

新 保 博

- 一、本稿の課題
- 二、元祿——享保期に於ける幕府財政Ⅱ租租收取機構の危機の進展
- 三、危機への對應としての徴租様式の變質——定免制及檢見春法の實施
- 四、定免制及檢見春法の特質——兩者の對蹠性と連關性
- 五、結論——徴租様式の變質の、享保期を畫期とする封建的支配機構變質化への關連

享保期を中心とせる幕府徴租様式の變質について

近代日本を理解するには明治維新の性格を明かにする事が不可欠とされる。その明治維新は云う迄もなく、日本に於ける封建社會(使用價值生産の體系)から近代社會(交換價值生産の體系)への轉回點をなす。かゝる轉回點に於て近代社會の性格乃至「型」は規定されるが、その基準は「所與の封建的土地所有の内部組織、農奴制の構成及び強度そのものうちに、より直截に云へば、農業組織Ⅱ土地所有の特定の「型」に制約されるところの