Title	数学線について
Sub Title	Mathematical lines in statistics
Author	安川, 正彬
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1948
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.41, No.11/12 (1948. 12) ,p.649(31)- 670(52)
JaLC DOI	10.14991/001.19481201-0031
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19481201-0031

利子率の決定を論ずる場合にも、b曲線の變化に伴つてa曲線が如何に移動するかについて何ら述べようとしてゐない。そこでは主としてb曲線の變化が所得を增加せしめ、その增加が更にb曲線を變化せしめる狀態を說明し、利子率は結局において實物的要因によつて決定されるといふ結論を導くのである（註9）。

このようにハイエクによつて實物的利子論と貨幣的利子論とを統一しようとする一つの試みがなされたけれども、それは成功したものとはいへないであらう。それは貨幣の特殊性を殆んど考慮することなく、しかも古典的利子論の缺點をなほそのまま包含するところのものである。われわれの進むべき途は、ケインズによつて示された古典理論の缺點を克服し、しかもケインズの貨幣的利子論に生產力要因を體系的に織り込むことである。ケインズによつて初めて明らかにされた貨幣及び貨幣利子率の諸特質は高く評價さるべきものであつて、われわれはこの收穫を無視して、利子論を再び古典的利子論へ復歸せしめるようなことをしてはいけない。ケインズは「金融的準備」をとり入れることによつて、生產力側の要因を考慮しようと試みたけれども、まだそのような利子論を體系化するには至らなかつた。生產力要因を一定とする「一般理論」の前提を取り除いて理論の再構成をしない限り、このような體系化は困難であらう。

（註1）　F. A. Hayek, Pure Theory of Capital, 1941. pp. 354-5.〔谷藤一郎教授邦譯三四一頁以下。〕
（註2）　Hayek, ibid., pp. 356-7.
（註3）　Hayek, ibid., pp. 358-9.
（註4）　Hayek, ibid., pp. 359-361.
（註5）　Hayek, ibid., pp. 362-8.
（註6）　詳しくは拙稿「前揭論文」の中で述べた。
（註7）　詳しくはケインズ「一般理論」第十四章を參照されたい。
（註8）　Hayek, ibid., pp. 363-4.
（註9）　Hayek, ibid., pp. 369ff.

數學線に就いて

安川正彬

一、序

偶々現實が理論に一致するのではなく、理論は偶々現實に近似する。そのため統計學に於ては數量を以て理論を現實に近似せしめんとし、現實にその端を發して絕えず統計理論に修正を加へ、現實に妥當近似しうる理論を確定することを以てその目的とする。

統計的方法は數量を以て現象の解析を行ふために、これを法則化せしめんとして數學の援用を必要とする。殊に統計解析に於て取扱はれる數量は根本に理論なる背景を有するため、その分析方法は絕えず數量の背後にある理論を充分認識してこれを決定する必要がある。併し一旦分析方法が決定されゝば、「數學」と云ふ分析手段の嚴密な過程を經てその結果が現實に妥當する一箇の數値として現れる。そこでこの方法に關して統計學の根本理論の一たる數學線に就いてその理論的基礎を附與せんとするのである。

統計解析に於て遍く一般に使用されてゐる數學線は

Legendre の創始した最小自乘法(Méthode des moindres quarrés) によるものであるが、この方法は誤差の理論がその緒をなしてゐるため Gauss distribution に密接不可分の關係があり、從つて經濟系列に關する統計解析に客觀的妥當性を有するものではないとの理由から該方法を援用せる數學線に代る H. Schultz の The line of mutual regression、即ち彼自ら稱する The line of best fit、及び山田勇助教授の最小一次法による數學線等があるが、孰れもその理論的基礎が附與されてゐないやうである。よつてこれら數學線に對する相互の關係を明かならしめるのが本稿の目的である。

二、數學線に對する若干の考察

數學線には直線、二次、三次、……等々の曲線、及びフーリエ曲線等、種々の曲線があるが、その根本とする理論は總て同一なるため、直線の場合に限定して說明する。

(a)最小一次法、最小自乘法が統計系列の各項と、その決定された數學線の各數値の縱軸に對する乖離の自乘の總和を最小ならしめるのに對し、最小一次法に於ては、この乖離の絶對値の總和を最小ならしめるのである。

即ち決定された數學線の方程式を

$$y=a+bx$$

とし、x_1に對應するyの原數値をy_1とすれば、y_1と直線の同一點に於けるyの數値との乖離は

$$y_1-(a+bx_1)$$

である。この乖離の絶對値の總和を零ならしめれば

$$(1)\quad \Sigma y=na+b\Sigma x$$

である。玆に未知なる係數は、a、及びbの二箇であるから、これらを決定する方程式に於ても二箇を必要とする。從つて統計系列を二分し

$$(2)\quad \begin{cases}\Sigma x=\Sigma x_1+\Sigma x_2\\ \Sigma y=\Sigma y_1+\Sigma y_2\end{cases}$$

とする。從つて(1)式をも二分し

$$(3)\quad \begin{cases}\Sigma y_1=n_1a+b\Sigma x_1\\ \Sigma y_2=n_2a+b\Sigma x_2\end{cases}$$

但し

$$n=n_1+n_2$$

これより(3)の方程式を解けば

$$(4)\quad \begin{cases}a=\dfrac{\begin{vmatrix}\Sigma y_1 & \Sigma x_1\\ \Sigma y_2 & \Sigma x_2\end{vmatrix}}{\Delta}\\[2ex] b=\dfrac{\begin{vmatrix}n_1 & \Sigma y_1\\ n_2 & \Sigma y_2\end{vmatrix}}{\Delta}\end{cases}$$

但し

$$\Delta=\begin{vmatrix}n_1 & \Sigma x_1\\ n_2 & \Sigma x_2\end{vmatrix}$$

を得る。

以上が最小一次法の概要であるが、聯立方程式(3)を變形すれば

$$\begin{cases}\dfrac{\Sigma y_1}{n_1}=a+\dfrac{\Sigma x_1}{n_1}b\\[2ex] \dfrac{\Sigma y_2}{n_2}=a+\dfrac{\Sigma x_2}{n_2}b\end{cases}$$

となつて、この聯立方程式を滿足する係數a、bは、二點$\left(\dfrac{\Sigma x_1}{n_1},\ \dfrac{\Sigma y_1}{n_1}\right)\left(\dfrac{\Sigma x_2}{n_2},\ \dfrac{\Sigma y_2}{n_2}\right)$を通る直線の方程式

$$y=\frac{\Sigma x_2\Sigma y_1-\Sigma x_1\Sigma y_2}{n_1\Sigma x_2-n_2\Sigma x_1}+\frac{n_1\Sigma y_2-n_2\Sigma y_1}{n_1\Sigma x_2-n_2\Sigma x_1}x$$

の常數項、及びxの係數である。即ち

$$\begin{cases}a=\dfrac{\Sigma x_2\Sigma y_1-\Sigma x_1\Sigma y_2}{n_1\Sigma x_2-n_2\Sigma x_1}\\[2ex] b=\dfrac{n_1\Sigma y_2-n_2\Sigma y_1}{n_1\Sigma x_2-n_2\Sigma x_1}\end{cases}$$

この結果は(4)式と全く同一であつて、この$\dfrac{\Sigma x_1}{n_1}$, $\dfrac{\Sigma y_1}{n_1}$, 及び$\dfrac{\Sigma x_2}{n_2}$, $\dfrac{\Sigma y_2}{n_2}$は(2)式より誘導されるx_1系列、y_1系列、及びx_2系列、y_2系列の算術平均に外ならない。結局所與の統計系列を二分し、前半各項よりの算術平均をその中央座標とし、後半も亦同樣にしてその座標を決定し、この二點を結ぶ直線を數學線とする方法であつて、折半平均法 (Semi-average method) と全く同一である。

最小一次法と折半平均法の理論が同一であれば、この方法に對して次の如き批判が生れる。即ち數學線を適用すべき系列に大なる不規則變動がある場合に、二分した系列の算術平均は妥當しうる代表値たるを得ないのである。算術平均の性質に關する說明は敢て述べる迄もなく、系列中に於ける變則的數値に蒙る影響大であつて、統計系列が斯くの如き分布を示す場合に、この方法は妥當し得ないのである。更に Range が如何に變化しても、各〻の算術平均が不變であれば、この數學線は常に同一

である。且つ二分された項の數は同數なること、換言すれば全項數が偶數なることを必要とする。即ち項數が奇數なる場合は、中央に位する項を二分した section の何れに歸屬せしめるかによつて數學線の方程式を異にするからである。又系列の各項が略々連續的分布を示すと判斷し得ない場合、換言すれば、前半と後半の各項それ自體は略々連續的なりと斷を下し得ても、二分された系列の interval が前、及び後の系列中の各項よりも變動甚だしい場合に、該方法による數學線の適用は極めて危險であると云はなければならない。更に最小一次法は系列を二分する組合が $n-1$ 箇得られるため、これらの組合に對して同一の數學線は統計系別が完全な函數關係にある場合にのみ得られるのであつて、その場合に最小自乘法による數學線と一致する。

註、山田勇助教授が「鐵鋼需給曲線の統計的研究—本邦鐵鋼業の調査研究（其一）—」（名古屋高等商業學校産業調査室、調査報告第二十一輯、昭和十五年）に於て發表された數學線導出に關する最小㈠次法の適用に關して直線の外に二次曲線に對しても述べられてゐる。即ち二次曲線を求める未知なる係數は先に説明した理に從ひ三箇必要なるため、系列を三分して二次曲線を決定すればこれが求める數學線の方程式である。玆にそれを紹介しよう。

二次曲線の方程式を

$$y=a+bx+cx^2$$

とし、所與の系列を三分すれば、係數を決定する方程式は

$$\begin{cases}\Sigma y_1=n_1a+q\Sigma x_1+c\Sigma x^2_1\\ \Sigma y_2=n_2a+q\Sigma x_2+c\Sigma x^2_2\\ \Sigma y_3=n_3a+q\Sigma x_3+c\Sigma x^2_3\end{cases}$$

但し

$$\begin{cases}n=n_1+n_2+n_3\\ \Sigma x=\Sigma x_1+\Sigma x_2+\Sigma x_3\\ \Sigma x^2=\Sigma x^2_1+\Sigma x^2_2+\Sigma x^2_3\\ \Sigma y=\Sigma y_1+\Sigma y_2+\Sigma y_3\end{cases}$$

によつて示される。之を解いて

$$\begin{cases}a=\dfrac{\begin{vmatrix}\Sigma y_1 & \Sigma x_1 & \Sigma x^2_1\\ \Sigma y_2 & \Sigma x_2 & \Sigma x^2_2\\ \Sigma y_3 & \Sigma x_3 & \Sigma x^2_3\end{vmatrix}}{\Delta}\\[2ex] b=\dfrac{\begin{vmatrix}n_1 & \Sigma y_1 & \Sigma x^2_1\\ n_2 & \Sigma y_2 & \Sigma x^2_2\\ n_4 & \Sigma y_3 & \Sigma x^2_3\end{vmatrix}}{\Delta}\\[2ex] c=\dfrac{\begin{vmatrix}n_1 & \Sigma x_1 & \Sigma y_1\\ n_2 & \Sigma x_2 & \Sigma y_2\\ n_3 & \Sigma x_3 & \Sigma y_3\end{vmatrix}}{\Delta}\end{cases}$$

但し $\Delta=\begin{vmatrix}n_1 & \Sigma x_1 & \Sigma x^2_1\\ n_2 & \Sigma x_2 & \Sigma x^2_2\\ n_3 & \Sigma x_3 & \Sigma x^2_3\end{vmatrix}$

これは直線の場合と同様に、系列を三分して得られる三箇の算術平均を、各群の中央座標とし、その三點を通る二次曲線求める方法に等しい。

三次以上の高次曲線に就いても同様にして求めることが出來る。

猶、鈴木諒一氏は「國民所得の統計的解析」（三田學會雜誌、第三十九卷、第十號）に於て、最小一次法によつて回歸係數（Coefficient of regression）を求め、これより Pearson の Product-moment correlation coefficient、及び Spearman の Rank correlation coefficient に代る方法を誘導されてゐるが、最小一次法が既述の性質を有する限り、相關係數測定の簡便法の一たるに止まり、相關係數導出の簡便法として知られてゐる Spearman の Foot-rule、及び Pearson の Grade correlation 等に對して如何なる關係にあるかを検討する必要が存するであらう。

（b）最小距離自乘法　最小自乘法に對して、原數値と數學線との距離の自乘の總和を最小ならしめる方法が考へられる。

即ち一點 $(x_1,\ y_1)$ より直線 $y=a+bx$ に至る距離の自乘を r とすれば

$$r=(a+bx_1-y_1)^2\ (1+b^2)^{-1}$$

で與へられる。これを系列の總てに對してその總和を S とすれば

$$S=\Sigma(a+bx-y)^2(1+b^2)^{-1}\qquad\text{(i)}$$

によつて示される。この S を最小ならしめる a、b を決定するには、$\dfrac{\partial S}{\partial a}=0$、$\dfrac{\partial S}{\partial b}=0$ ならしめればよい。即ち

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial S}{\partial a}=\Sigma(a+bx-y)\ (1+b^2)^{-1}=0\\[2ex] \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial S}{\partial b}=\Sigma[(a+bx-y)\cdot x\cdot(1+b^2)^{-1}-(a+bx-y)^2(1+b^2)^{-2}\cdot b]=0\end{cases}$$

故にこれより次の聯立方程式を得る。

$$\begin{cases}\Sigma y=na+b\Sigma x\\ (1-b^2)(a\Sigma x-\Sigma xy)+b(\Sigma x^2+a(2\Sigma y-na)-\Sigma y^2)=0\end{cases}\qquad\text{(ii)}$$

この方法は最小自乘法に比して複雜であり、殊に b に關する偏微分によつて得られた方程式(ii)が b^2 の項を有するため、b の數値は正、及び負の場合が得られるが、この b の符號は極大極小の判別法によつて決定することが出來る。即ち極小の場合の數値をとるのである。

兹で原式(i)に負の冪乗の項があるため第二次偏微分に關しては第一次偏微分に於ける負の冪乗の項を問題にする必要はない。即ち(ii)式の左邊をbで偏微分して判別すればよいのである。

先づ(ii)式よりbを求めれば

$$x(y-a)b^2+[x^2-(y-a)^2]b-x(y-a)=0$$

$$[xb-(y-a)][(y-a)b+x]=0$$

$$\therefore b=\frac{y-a}{x} \qquad \text{(iii)}$$

又は

$$b=-\frac{x}{y-a} \qquad \text{(iv)}$$

を得る。更に(ii)式の左邊をbに關して偏微分すれば

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}=2(y-a)bx+x^2-(y-a)^2$$

となり、この式に(iii)を代入すれば

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}=x^2+(y-a)^2>0$$

又(iv)を代入すれば

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}=-[x^2+(y-a)^2]<0$$

を得る。即ち(iii)は極小であつて、(vi)は極大である。これは數學線の方程式 $y=a+bx$ に於て、所與の系列が上昇的發展傾向、即ち $b>0$ なる場合に正値をとるのであつて、該系列が下降的發展傾向、即ち $b<0$ なる場合の極大極小は符號が逆になり負なるときに極小となる。換言すれば所與の系列が上昇的發展傾向を示す場合は得たるbの正値をとり、下降的發展傾向を示す場合にはbの負値をとればよい。殊に

$$\text{(iii)}\times\text{(iv)}=\frac{y-a}{x}\cdot\left(-\frac{x}{y-a}\right)=-1$$

であつて、これは直線の直交條件であるから實際にbの符號を決定するには所與の系列が上昇的なるか下降的なるかによつて容易に判斷することが出來る。

次に最小距離自乘法を適用する二三の例を最小自乘法のそれと比較して述べてみよう。

例1　時系列が第1表のy系列の如く與へられたとする。

最小自乘法1　第1表より得られた數値を

$$\begin{cases}\Sigma y=na+b\Sigma x\\ \Sigma xy=a\Sigma x+b\Sigma x^2\end{cases}$$

に代入すれば

第1表

x	y	xy	x^2	y^2
0	7	0	0	49
1	8	8	1	64
2	4	8	4	16
3	6	18	9	36
4	2	8	16	4
5	5	25	25	25
6	3	18	36	9
21	35	85	91	203

$$\begin{cases}35=7a+21b\\ 85=21a+91b\end{cases}$$

となる。これを解いて

$$\begin{cases}a=\dfrac{50}{7}=7.143\\ b=\dfrac{5}{7}=-0.714\end{cases}$$

を得る。故に數學線の方程式は

$$y=7.143-0.714x \qquad \text{（第1圖 } A_1\text{）}$$

である。

最小自乘法2　右の方法は原系列よりの乖離を縦軸に平行としたのであるが、次にこの乖離を横軸と平行にした場合には右の公式に於てxとyとが入換はる。即ち

$$\begin{cases}\Sigma x=na+b\Sigma y\\ \Sigma xy=a\Sigma y+b\Sigma y^2\end{cases}$$

この方程式に代入すれば

$$\begin{cases}21=7a+35b\\ 85=35a+203b\end{cases}$$

となり、これを解けば

$$\begin{cases}a=\dfrac{46}{7}=6.57\\ b=-\dfrac{5}{7}=-0.714\end{cases}$$

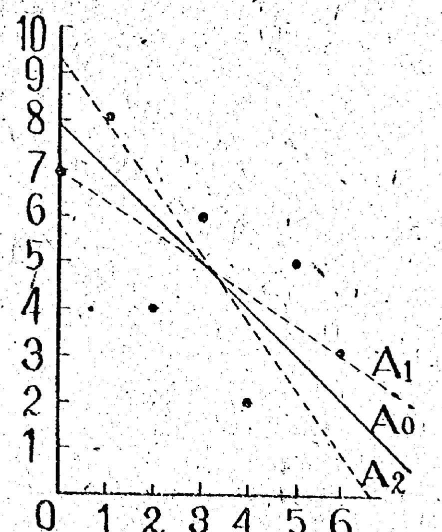
を得る。よつて方程式は

$$x=6.57-0.714y$$

$$\therefore y=9.2-1.4x \qquad \text{（第1圖 } A_2\text{）}$$

となる。

最小距離自乘法　第1表で得たる數値を先の方程式に代入して



第1圖

$$\begin{cases}35=7a+21b\\(1-b^2)(21a-85)+b[91+a(70-7a)-203]=0\end{cases}$$

これより

$$a=5-3b$$

を代入すれば

$$(1-b^2)[21(5-3b)-85]+b[91+(5-3b)\{70-7(5-3b)\}-203]=0$$

$$(1-b^2)(20-63b)+63b(1-b^2)=0$$

$$1-b^2=0 \qquad \therefore b=\pm1$$

このbの符號を極大極小の判別法によつて求めるには

$$\frac{\partial^2S}{\partial b^2}=-2b$$

にbの數値を代入すれば

$$\begin{cases}b=1\ ノトキ\ \dfrac{\partial^2S}{\partial b^2}=-2<0\\ b=-1\ ノトキ\ \dfrac{\partial^2S}{\partial b^2}=2>0\end{cases}$$

となるから求める數學線の方向係數は

$$b=-1$$

である。又これは系列自體から直ちに判斷出來る（第1表、第1圖）。これを

$$a=5-3b$$

に代入すれば

$$a=8$$

よつて最小距離自乘法による數學線の方程式は

$$y=8-x \qquad (第1圖\ A_0)$$

である。

例2　時系別に於てはx系列が等間隔であるため原點をその中央にとれば $\Sigma x=0$ となるから第2表より求めれば

第2表

	x	y	xy	x^2	y^2
1	−3	9	−27	9	81
2	−2	6	−12	4	36
3	−1	8	−8	1	64
4	0	2	0	0	4
5	1	4	4	1	16
6	2	5	10	4	25
7	3	1	3	9	1
	0	35	−30	28	227

最小自乘法1

$$\begin{cases}7a=35\\28b=-30\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}a=5\\b=-\dfrac{15}{14}=-1.07\end{cases}$$

故に數學線の方程式は

$$y=5-1.07x \qquad (第2圖\ A_1)$$

最小自乘法2

$$\begin{cases}7a=-35b\\35a=-227b+30\end{cases}$$

を解いて

$$\begin{cases}a=\dfrac{75}{26}=2.88\\b=-\dfrac{15}{26}=-0.577\end{cases}$$

を得る。よつて數學線の方程式は

$$x=2.88-0.577y$$

$$\therefore y=5-1.733x \qquad (第2圖\ A_2)$$

最小距離自乘法

$$\begin{cases}a=5\\(1-b^2)\cdot30+b[28+a(70-7a)-227]=0\end{cases}$$

これを解けば

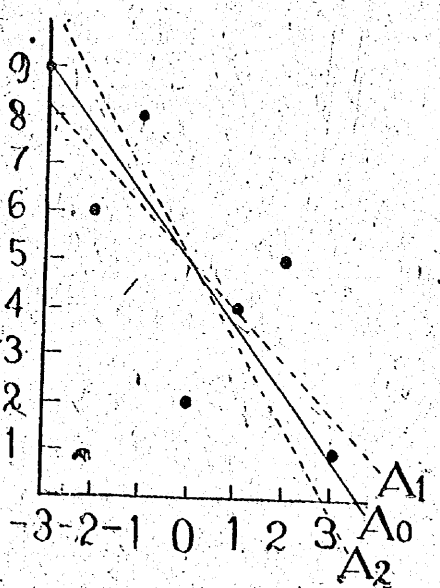
$$-5b^2-4b+5=0$$

$$\therefore b=0.677 \quad 又は \quad b=-1.477$$

bの符號を決定するには

$$\frac{\partial^2S}{\partial b^2}=-10b-4$$

にbの數値を代入すれば



第2圖

$$\begin{cases}b=0.677\ ノトキ\ \dfrac{\partial^2S}{\partial b^2}=-10.77<0\\ b=-1.477\ ノトキ\ \dfrac{\partial^2S}{\partial b^2}=10.77>0\end{cases}$$

從つて數學線の方程式は

$$y=5-1.477x \qquad (第2圖\ A_0)$$

となる。

例3　次に上昇的發展傾向を示す例を第3表によつて求めてみよう。

最小自乘法1

$$\begin{cases} 7a=56 \\ 28b=24 \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} a=8 \\ b=\frac{6}{7}=0.857 \end{cases}$$

よつて求める方程式は

$y=8+0.857x$　　（第3圖 A_1）

である。

最小自乘法2

第3表

	x	y	xy	x^2	y^2
1	−3	5	−15	9	25
2	−2	7	−14	4	49
3	−1	9	−9	1	81
4	0	8	0	0	64
5	1	6	6	1	36
6	2	9	18	4	81
7	3	12	36	9	144
	0	56	24	28	480

$$\begin{cases} 7a=-56b \\ 56a=-480b+24 \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} a=-6 \\ b=0.75 \end{cases}$$

となるから數學線の方程式は

$x=-6+0.75y$

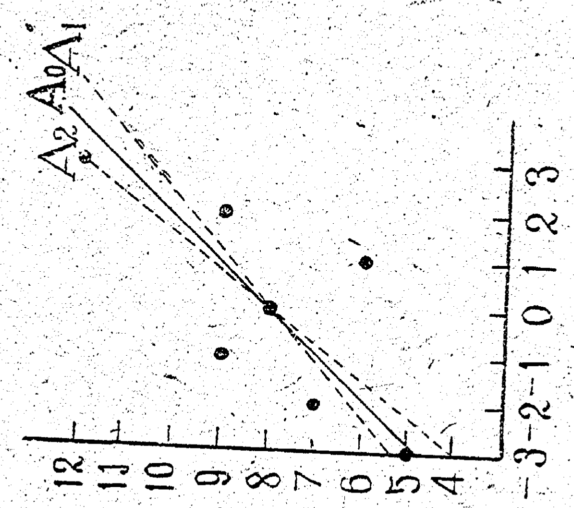
$\therefore y=8+1.333x$　　（第3圖 A_2）

となる。

最小距離自乘法

$$\begin{cases} a=8 \\ (1-b^2)(-24)+b[28+a(112-7a)-480]=0 \end{cases}$$

これを解いて



第3圖

$6b^2-b-6=0$

$b=\frac{1\pm\sqrt{145}}{12}$

$\therefore b=1.087$　又は　$b=-0.920$

所與の系列は上昇的傾向を示してゐるから

$b=1.087$

從つて數學線の方程式

$y=8+1.087x$　　（第3圖 A_0）

を得る。

これらの例から直ちに解ることは最小距離自乘法による數學線が最小自乘法による二方法のそれに對して言はゞ平均的位置に置かれてゐることである。

最小距離自乘法による數學線は H. Schultz がその Statistical laws of demand and supply, with special application to sugar, 1928 に於て、砂糖に對する需要曲線の導出に最小自乘法による方法と、彼自ら The line of best fit と稱するこの最小距離自乘法を適用する場合とを比較してこれを論じてゐるが、未だその論據が不正確と思はれる。この Schultz に對する批判は後に讓るとして、最小自乘法に對してその簡便法たる最小一次法が誘導されたと同樣に、最小距離自乘法に就いても簡便法が考へられる。

即ち系列の各項より直線に至る距離の絶對値の總和

$r=\Sigma(a+bx-y)(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}$

を最小ならしめる a、b を決定するには、r を二分して方程式を求めて各々を零ならしめれば

$$\begin{cases} \Sigma y_1=n_1a+b\Sigma x_1 \\ \Sigma y_2=n_2a+b\Sigma x_2 \end{cases}$$

となるが、これは最小一次法による結果と同一である。

猶、この外にも統計系列と數學線との乖離を縱軸に對すると、横軸に對するとの自乘の總和の合計を最小ならしめる方法(註)が考案されてゐるが、玆では割愛する。

註、W. E. Deming, Statistical adjustment of data, New York, 1943. 尚、この論文に於ては該方法を適用して一般曲線、Normal curve、指數曲線、双曲線等に就いても論述されてゐる。

三、趨勢變動除去と座標軸變換

時系列は一般に、長期傾向、即ち趨勢變動 (Secular trend)、季節變動 (Seasonal variation)、循環運動 (Cyclical movement)、及び不規則變動 (Irregular movement) を同時に包括してゐる場合が多く、或目的に對する一箇の手段として系列中にあるこれらの變動を除去し、以てその分析可能な系列に變換してこれを統計學の解析しうる範疇に歸屬せしめて分析を行ふ必要があ

る。これら諸般の變動を除去する方法として、移動平均法（Moving average）、遞差法（Difference method）、連鎖比率法（Chain-relative method）、連環比率法（Link-relative method）等が存し、移動平均法、連環比率法、及び連鎖比率法が季節變動、循環運動、不規則變動の除去に資するに對し、趨勢變動のそれに就いては獨り數學線がその地位を占める。時系列解析に於ける數學線は、單に長期傾向を判斷するに用ひられるよりも、時系列からその趨勢變動の影響を除去する役割を演ずることと屢〻であつて、遞差法も亦趨勢變動除去に用ひられ、且つその論據は數學線に存するのであるが、技術的にはそれが表面に現れない。

即ち時系列は time-interval が等間隔に置かれてゐる爲、系列を順次に結ぶ線が直線を示す場合には、系列各項の一時點前の數値との差、即ち第一次遞差（First differences）は常に等しく、又二次曲線を示す場合にはこの第一次遞差の遞差、即ち第二次遞差が相等しい。一般に n 次曲線に於ける n 次の遞差は恒等となり、$n+1$ 次の遞差は總て零となる。この理に從ひ、遞差が最も零に近接する場合の一次少ない次數のそれを採るのであるが、原系列の分布が不規則の灣曲を示す場合、即ち偶々符號を變へる遞差があると、それよりも高次の遞差の絶對値は零に接近しないで却つて發散しはじめる。所與の時系列は決して完全な函數關係にあるのではなく、右に述べた如き變動を有してゐるため、原系列が斯くの如き分布を示すことは寧ろ特殊な場合であり、一般には遞差の變動がその次數を增すごとに漸次增大するのであつて、該方法は次數を次第に增加する遞差が零に接近する場合にのみ妥當する。又、この方法は系列各項の差をとるため、その數値は相對數ではなく絶對數である。それ故原系列の絶對値大なるときはその差も必然大であつて、變動の大さによつて著しく左右され、趨勢變動を除去することは不可能である。又遞差の次數を增せば移動平均法と同樣に兩端に位する値は得られず、茲に數學線が登場する。

時系列の解析用具としての數學線を傾向線と云ふが、從來はこの傾向線が直線以外の高次曲線に對してもこの名稱が附されてゐた。然し先に述べた諸般の變動を一考すればこれが妥當し得ないことは直ちに理解しうる。即ち高次の曲線が最も近接するやうな時系列は必ず趨勢變動以外の變動、換言すれば、季節變動、循環運動及び不規則變動等を有してゐるのであつて、これをも趨勢變動に導入することは誤謬を冒すも甚だしいと云はなければならない。趨勢、又は傾向とは原系列を總體的に觀たる場合にその趨勢、即ち傾向が上昇的なるか、又は下降的なるかを識別するのであつて、當該變動に關する數學線は必ず直線でなければならない。換言すれば傾向線は直線のみを指すのである。

註、茲に「直線」と限定したのは、その發展が本質的に算術級數的な場合であつて、現象が幾何級數的發展をする場合、即ち semi-logarithm をとれば直線で示される場合は指數曲線、及び特殊な場合として有機體の發展には、Gompertz curve Logistic curve をも包含する。

而して統計的な諸般の變動を除去する場合は右に述べた如く、絶對數をとつたのでは完全に變動を除去することは出來ず、相對數を必要とするのである。即ち傾向線が系列に對する趨勢の標準であつて、これに對して原系列の各項と、その照應する傾向線の各數値、即ち傾向値との差を傾向値で除した比率及び原系列と傾向値との比率をとる對傾向値比率（Method of trend-ratios）による方法が考へられる。前者は後者から1を差引いたものであるから兩者の根本原理は全く同一である。又前者は算術平均を基準とする變化係數（Coefficient of variation）と同一の理に基く。この方法によれば相對數、即ち指數であるから遞差法の如き絶對數をとつた場合に冒した缺陷を補ふことが出來る。然しこの方法にも一つの前提を含んでゐるのである。即ち時系列の變動が傾向値に比例することとそれである。換言すれば傾向線を中心とする相對的變動も亦統計系列の如何によつて異にするのであつて、このため變動大なる系列は亦標準偏差（Standard deviation）大なりとして、對傾向値比率から1を減じた一種の偏差を基にして標準偏差を求め、これを以て對傾向値比率から1を減じた數値を除したとしても、嚴密な意味で趨勢變動を除去することは不可能である。即ちこの偏差の系列に尙變動ありとして再び偏差をとり、この操作を繰返しても尙趨勢變動は殘るのである。茲に述べた傾向線は勿論最小自乘法によつて導出されたものであるが、結局は時系列に對してその趨勢を最小自乘法によつて求めたのでは眞の意味での傾向を把握することが出來ないのである。

最小自乘法による傾向線は、前述せる如く原系列と決定された數學線の同一時點の數値との乖離の自乘の總和を最小ならしめる傾向線を導出するのであつて、分布された系列の各數値が常に座標軸の影響を蒙る。このことは不合理であつて、一旦座標點が決定されゝば、座標軸とは無關係に傾向線が決定されなければならない。卽ち統計系列の一般傾向を判斷しうるのは同一時點に於ける乖離の自乘を最小にするのではなく、所與の系列よりの距離の自乘を最小にしなければならない。換言すれば最小距離自乘法によつてその傾向を判斷すべきである。從つてこの最小自乘法に代る Deming 氏の方法によるとしても、その原理は最小自乘法と同一であるため座標軸に蒙る影響を廢除することは不可能である。

この最小距離自乘法による傾向線の理論値は、原系列よりその傾向線に下された垂線の足の座標であつて、時點を共にする傾向線の數値ではない。然らば、この傾向線に對して、如何にその趨勢變動を除去するかの問題は、先に述べた比率等による方法と異り、この傾向線を橫軸とする座標軸に變換するのである。この座標軸變換は次に示す方法によつて得られる。

第4圖に於て座標軸 Ox, Oy に關する點 P の座標を (x, y)、點 O' の座標を (α, β) とし、Ox, Oy に對して各〻平行に引いた座標軸 Ox', Oy' に關する點 P の座標を (x', y') とすれば次の關係式が得られる。

$$(1)\quad \begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

次に座標軸 Ox', Oy' を $\angle\theta$ だけ回轉した場合の座標軸 OX, OY に關して點 P の座標を (X, Y) とし、點 P より x' 軸、X 軸に下した垂線の足を各〻 M_1, M_2 とし、M_2 より x' 軸に下した垂線の足を M_3、又 M_2 より x' 軸に對して平行に引いた線と PM_1 との交點を M_4 とすれば

$$x' = O'M_1 = O'M_3 - M_4M_2 = O'M_2 \cdot \cos\theta - PM_2 \cdot \sin P$$

然るに

$$\angle P = \angle\theta$$

故に

$$(2)\quad x' = X \cdot \cos\theta - Y \cdot \sin\theta$$

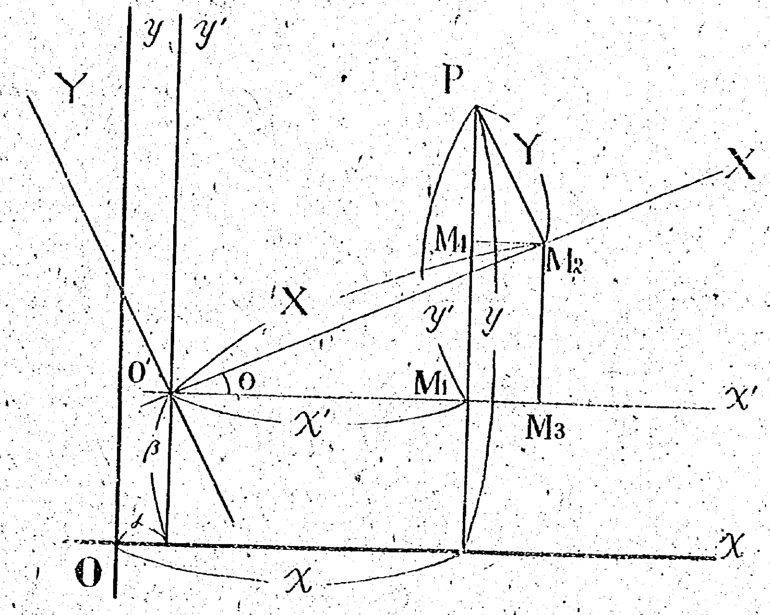
同様にして

$$y' = PM_1 = M_2M_3 + PM_4 = O'M_2 \cdot \sin\theta + PM_2 \cdot \cos P$$

故に

$$(3)\quad y' = X \cdot \sin\theta + Y \cdot \cos\theta$$

卽ち方程式(1)、(2)、(3)より次に示す公式を得る。



第 4 圖

$$\begin{cases} x = X \cdot \cos\theta - Y \cdot \sin\theta + \alpha \\ y = X \cdot \sin\theta + Y \cdot \cos\theta + \beta \end{cases}$$

原座標軸によつて與へられた數學線の方程式に對して座標軸變換を行ふには、所與の方程式にこの公式を代入することによつて得られる。

然し趨勢變動の除去にこの方法を適用する場合は、導出された傾向線を橫軸とする座標軸に變換するのであるから傾向線の方程式から得られる數値と原系列の數値とを該公式に代入して解けばよい。

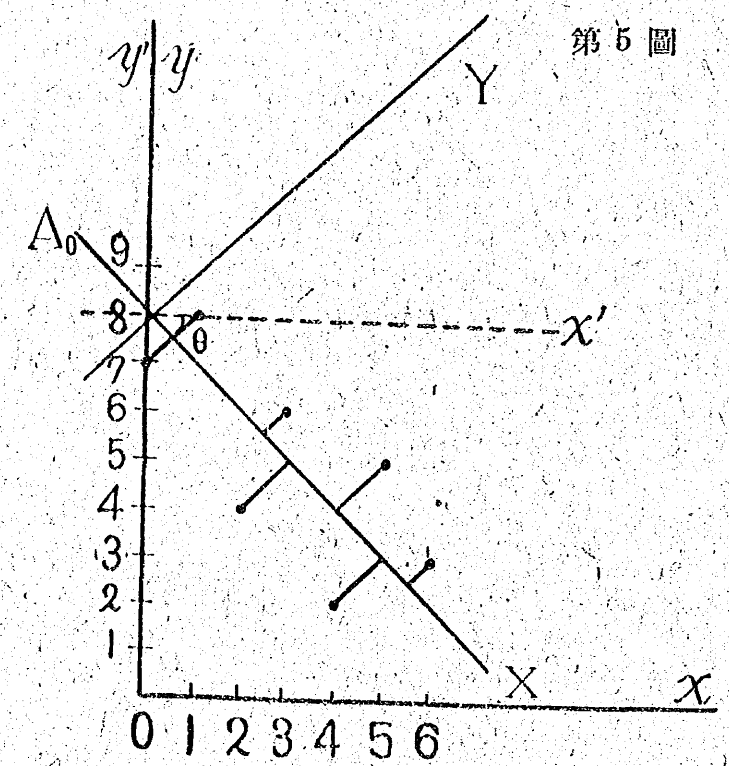
玆で一考せねばならぬことは變換された系列の座標は X 座標に關してその interval は等しくない。從つて X 座標は x 座標に於けると同様に time-interval を等しく置き換へる。卽ち原系列各項の時點を換へることとなく變換された座標軸に關して、X 座標が等間隔をうるやうに Y 座標を X 軸に對して平行移動を行ふのである。そのため新なる座標の決定には Y 座標のみを求めればよい。從つて Y 座標は原系列と傾向線との距離に正、負の符號をつけたものに等しい。尙この變換した系列に關して決定された數學線は不變である。

試みに先の例に就いて趨勢變動を該方法によつて除去

してみよう。

第1表より最小距離自乘法を適用して得た傾向線の方程式は

$$y=8-x$$



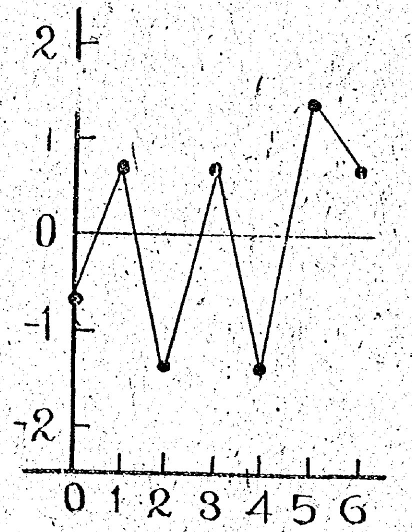
第5圖

であるから座標軸變換を行ふには第5圖より

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=8 \\ \sin\theta=\sin(-45^\circ)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta=\cos(-45^\circ)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

よつて

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)+8 \end{cases}$$



第6圖

これを解いて

$$Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-8)$$

を得る。このx、yに原系列の各數値を代入して解けば第4表に示す新なる數値が得られる。尚これを圖示すれば第6圖の如く表される。

第4表

x	y	Y
0	7	−0.707
1	8	0.707
2	4	−1.414
3	6	0.707
4	2	−1.414
5	5	1.414
6	3	0.707

次に原系列と傾向線との距離を求めてみよう。

一點(x_1, y_1)より直線$y=a+bx$に至る距離の方程式は

$$r=\frac{y_1-a-bx_1}{\sqrt{1+b^2}}$$

で示されるからこの傾向線から得られる方程式は

$$r=\frac{y_1-8+y_1}{\sqrt{2}}$$

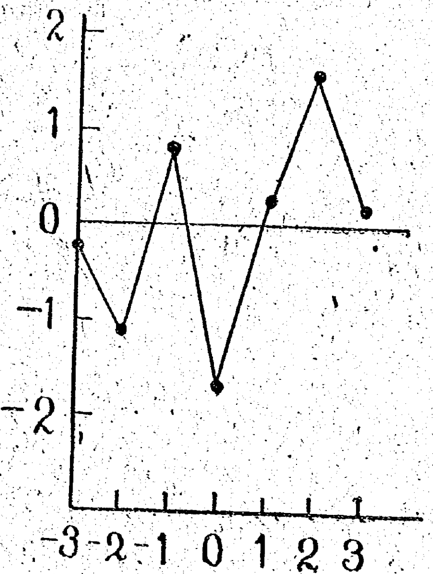
第5表

x	y	Y
−3	9	−0.244
−2	6	−1.096
−1	8	0.852
0	2	−1.680
1	4	0.268
2	5	1.656
3	1	0.244

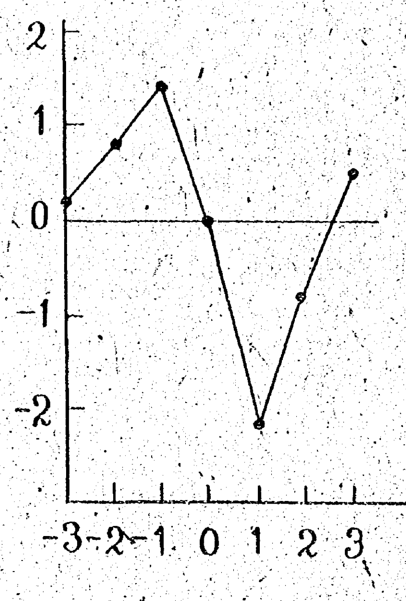
となり、座標軸變換によつて求めた方程式と同一である。同様にして第2表、第3表より求めれば第5表、第6表に示す數値が得られ、これを圖示すれば第7圖、及び第8圖によつて示される。

第6表

x	y	Y
−3	5	0.177
−2	7	0.803
−1	9	1.429
0	8	0.000
1	6	−2.114
2	9	−0.803
3	12	0.508



第7圖



第８圖

斯くの如くして時系列の趨勢變動を除去する。これは最小自乘法によつて趨勢變動を除去する方法と異り、傾向線が座標軸に對して影響されず合理的であるため當該變動の影響を完全に除去することが出來る。

時系列解析に於ける傾向線の導出は單に當該系列の發展傾向を認識するに止まらず、進んで諸般の變動を控除して循環運動を誘導するのであつて、時系列、特に年次系列から趨勢變動を除去すれば、年次系列には季節變動が存在しないから殘存する變動は循環運動と不規則變動である。この不規則變動を把握し、且つ解決することは不可能であるため、この循環運動と不規則變動をも一體とした系列をも敢て循環運動と認めて週期解析を行ふのである。即ち時系列を總體的に觀た場合の長期的週期が前述した最小距離自乘法に基く座標軸變換によつて得られるのに對して、長期的週期自體が包含してゐる短期的週期はこれのみから直接に誘導することは出來ない。從つてこの短期的週期を測定するには長期的週期に對してフーリェ曲線を當嵌め、修正された系列と該曲線との距離を求めて週期解析を行へば短期の循環運動が具體的に得られるのである。

勿論趨勢變動はそれ自體時系列の各項に存在してゐる諸般の變動に對して相當の影響を蒙つてゐるため、その各〻が有してゐる變動の程度、換言すれば各種の variation weight をも充分考慮する必要が存するが、この質を量に轉稼することの困難は、Marshall が經濟諸量の分析に「時といふ要素に關する困難」を論じたるに等しい。

四、最小自乘法による數學線の妥當性

數學線に關して今日迄論議されて來たことは最小自乘法が確率論に於ける誤差の理論より出發したことである が、結局は誤差の起る確率法則に基いてその適用される

對象、即ち問題を社會科學の領域に限定するならば、現實社會に生起する現象が確率論で取扱ふ at random に選び出された個々の獨立事象とその本質を異にすることである。この社會に生起する現象は、殊に經濟學に於て問題にする如く、總てが相互依存の關係を有してゐるのであつて、社會現象から抽出された個々の數量も亦この從屬的關係に置かれてゐるのである。この理由から數學で取扱はれる確率論の從屬事象に結合されると考へるのは誤りである。例へば同一の袋に入れられた數個の球より一球を取り出して、次にこの抽出された球を再びその袋に入れることなく同一の袋から次の一球を取り出すときは、確に從屬的關係に置かれてゐるが、この第一回目も、又第二回目に於ても抽出するときは個々獨立であつて、唯茲で從屬と云ひうるのは第二回目の抽出に際しては、第一回目のそれよりも球の數が一箇少いと云ふに止まる。

斯くの如く確率論に於ける理論的根據が社會科學のそれと異るため認識の客觀性を無視して、この最小自乘法を統計解析に適用することが安當し得ないとしても、抽象的・形式的な數學を援用する限りは、この相互依存の關係を解決することは不可能である。若しそのために社會科學の領域に於てこの數學を援用することが誤謬であるとするならば、今日迄達して來た數理經濟學、及び經濟學へ統計的方法が適用されたことは却つて經濟學の本質を破壞するものであつて、寧ろ經濟學がこれら數學の力を借りてその分析手段たらしめたことは一大不祥事であると云はなければならない。

翻つて冒頭に記した如く科學的研究は理論を現實に近似せしめんとするその理論、即ち法則を導出するに存するのである。經濟學に數學、乃至統計的方法を導入せしめたのは、その形式的形態が著しく近似してゐることに依存するのであつて、このことは何人と雖も認めなければならぬ規約である。Jevons はその The theory of political economy の序文に「余は久しく經濟學は終始數量を取扱ふが故に、假令言葉に於ては然らずとするも實質的には一箇の數學的科學たらざる可らずと考へて來た。余は效用、價値、勞働、資本等に關する正確なる數量的概念に到達せんと努力し、そして余は最も困難なる概念の或るもの、就中價値なる最も錯雜せる概念が如何に明白に數學的解析と表現とを許すかを發見して屢〻驚

かされた」と、又 Cournot は Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesse. に於て「大さの間の關係が問題となれる場合に、數學の符號を使用することは極めて自然である。假りに嚴密に必要ならずとしても、それが讀者の或る人々に緣遠いがために、又それが時に誤つて使用せられるがために、これを拒絶することは決して合理的ではない。蓋しこれは問題の敍述を容易にし、これを一層簡潔ならしめ、更に廣き發展への道を開き、又漠然たる討論の邪道に入ることを防ぐことが出來るからである」。と述べてゐるが、孰れもこの規約に基くのである。

一般均衡論に於てその需要法則を $D=F(p_1, p_2, \cdots p_n)$ なる數學記號を起用するのも Cournot の云へる如く「數學解析に長ずる人々は、數學の目的が單に數を計算するに止まらず、進んで數字的に表現し得ざる大さの關係を見出すためにも、又その法則が代數的記號を以て說明し得ざる函數間の關係を見出すためにも用ひられることを知つてゐる」からであつて、この需要法則を具體的に解くことは不可能に近いが、經濟學の本質よりこれを眺めるならば、この方程式を以てしても尙不充分である。即ち個々の價格 $p_1, p_2, \cdots p_n$ は決して獨立に與へられたものではなく、これ自體が亦相互依存の關係に置かれてゐるのである。然し數理經濟學に於ける數學の援用は理解を容易ならしめるための手段たるものであるが、統計的方法のそれは現實より得られた數量を以て具體的に解くと云ふことが附加されるため社會現象への適用には大なる問題を殘してゐるのである。然し茲でこの根本問題に觸れることは避けて、確率論で取扱ふ誤差と、それを統計解析に適用した場合の誤差乃至變動との關係に就いて述べてみよう。

確率論に於ける誤差を直ちに統計解析に於ける同樣の誤差と解釋することは誤りである。即ち確率論で取扱ふ數値は一個の測定値であるから、必ず數値自體に誤差を含んでゐるのであるが、統計系列で取扱ふ場合のそれは、real value であつて確定値でなければならない。若しその數値が幾何の誤差を有してゐるとしても、統計解析を行ふ以上は確定値と認めて解析を行ふのである。統計解析で考慮すべき誤差は當該解析の結果得られた抽象的數値に對してなされるのである。最小自乘法の理論に於て、測定値より得られる最確値は見掛の誤差の自乘の總和を最小ならしめる値であるが、この見掛の誤差を座標軸に對して測定しなければならぬ理由は毫もなく、傾向線に對する問題の中心は座標軸にその影響を蒙るか否かに存するのである。

即ち先に述べれ趨勢變動に關する考察に於ても、時系列の一般傾向を把握する場合に時系列として與へられた各項に誤差があるとの理由から最小自乘法による傾向線が屢〻使用されて來たのであるが、時系列の各項を確定値と認めたればこそ統計解析が可能とされるのであつて、座標軸に影響されるが如き解析方法が妥當しないのである。

最小自乘法によつて誘導された傾向線を基礎としてその對傾向値比率を算出し、それによつて如何に趨勢變動の影響を除去する數値を得たとしても、決して時系列自體の誤差は問題にされてゐないのである。若しこの時系列に含まれてゐる誤差が考慮されてゐるとするならば、時系列が與へられたときの誤差に對する weight がその解析方法の中に存在しなければならない。

Schultz が砂糖に對する需要曲線の導出に、一般には變數の任意の一方を獨立變數とし、他方の從屬變數にのみ誤差があるとして最小自乘法を用ひてゐるのであるが、これは何れを獨立變數に選ぶかによつて、所與の變數が函數關係にある場合を除いては相異る需要曲線が誘導されるから、この方法は不正確であるとして斥け、誤差は變數の双方にあるとの理由から、この最小距離自乘法を適用して需要曲線を求めて、これを The line of mutual regression、又は The line of best fit としたのであるが、この理由は誤りである。先にも述べた如く系列の誤差を考慮して數學線を求めるとしても、それ程系列誤差が問題の中心に置かれるとするならば、系列の誤差に對する weight を充分把握し、且つ解決されない限り、如何なる方法を以てしても數學線を導出することは不可能であるばかりでなく、經濟系列に關する統計解析が意義をもたない。即ち統計資料自體に有意義の誤差があると認められるが如き資料に對して統計解析を行ふことが既に誤謬である。結局最小自乘法を統計解析に適用する場合に、最小自乘法の理論で問題とする「誤差」は、統計解析に於ては「變動」、又は「理論値に對する乖離」と解すべきであつて、この間の事情が屢〻混同して用ひられたため、統計解析に於ける客觀的妥當性が附

與されなかつたのである。然らば最小自乘法による數學線は如何なる場合にその意義を有するであらうか。

最小自乘法によつて誘導された數學線は動態平均線であつて、系列の縱軸に對する乖離の自乘の總和は最小である。卽ちこれと同一方法によつて算出する限り、他の如何なる方法で導出された數學線のそれよりも小である。換言すれば系列各項を結ぶ直線と、この數學線とが交つてなす面積の當該數學線に對する上位と下位の面積の總和が等しく、且つ最小である。このことは高次の曲線に就いても妥當する。この性質を認識すれば、最小自乘法による數學線の統計解析に於ける妥當性が明確となる。

卽ち諸般の變動を有する所與の系列に關して、該系列が平均的な發展をするとしたならば如何なる推移過程を示すかを判斷する場合、且又時系列に關しては當該系列中に含まれてゐる狀態がそのまゝ持續すると假定するならば、將來の各時點に於て具體的に如何なる狀態が得られるかを長期に亘つて豫測する場合に於ては、原系列の各項に照應する數學線の數値との乖離の自乘の總和を最小ならしむべきであつて、原系列各項に最も近接する數學線、卽ち高次の曲線を選ぶべきである。この平均的推移過程、及び將來豫測に於ては單なる一般傾向が問題となるのではなく、原系列と同一時點に置かれた動態平均値を必要とするのであつて、斯かる場合に數學線と同一時點に於ける原系列各項との乖離の自乘の總和を最小ならしめる最小自乘法による數學線が最も妥當するのである。

統計學が數量を以て過去を把握し、又進んで具體的に將來を豫測するにその意義があるとするならば、時系列解析に關してこの數學線を傾向線と區別するため、例へば前者を「推移線」、後者の場合を「豫測線」とするのが至當であらう。（了）

（一九四八・八・一五）

享保期を中心とせる幕府徵租樣式の變質について

——檢見春法と定免制——

新保博

一、本稿の課題
二、元祿——享保期に於ける幕府財政＝租祖收取機構の危機の進展
三、危機への對應としての徵租樣式の變質——定免制及檢見春法の實施
四、定免制及檢見春法の特質——兩者の對蹠性と連關性
五、結論——徵租樣式の變質の、享保期を畫期とする封建的支配機構變質化への關連

一

近代日本を理解するには明治維新の性格を明かにする事が不可缺とされる。その明治維新は云う迄もなく、日本に於ける封建社會（使用價値生産の體系）から近代社會（交換價値生産の體系）への轉回點をなす。かゝる轉回點に於て近代社會の性格乃至「型」は規定されるが、その基準は「所與の封建的土地所有の內部組織、農奴制の構成及び強度そのもののうちに、より直截に云へば、農業組織＝土地所有の特定の「型」に制約されるところの