Title	統計的平均値の理論的構造
Sub Title	
Author	寺尾, 琢磨
Publisher	慶應義塾理財学会
Publication year	1939
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.33, No.6 (1939. 6) ,p.755(63)- 792(100)
JaLC DOI	10.14991/001.19390601-0063
Abstract	
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19390601-0063

統計的平均値の理論的構造

寺尾琢磨

目次

一　統計値に於ける具體性の要請

統計値は觀察値と誘導値の二つに分つことが出來る。觀察値とは統計調査、即ち大量觀察乃至はその代用法によつて得られた粗材的數字、又はこれに素朴な整理を加へて得られた統計系列であり、これに對して誘導値とはこれらの粗材的數字乃至統計系列に或る程度の數學的操作を施すことによつて得られる解析値である。簡單に言へば、統計調査の結果が觀察値で、普通に統計と稱せられるものはこれに屬し、これに對して統計解析の結果が誘導値で

ある。前者即ち觀察値が正確か否かは一に觀察方法の良否によつて決せられる。この場合問題となるものは觀察即ち調査に於ける技術的及び論理的適格性即ち統計集團の規定、調査の單位並びに標識の概念的統一の如きものであるから、數學的方面から來る困難は介入しない。整理に於ては多少の數學的手續きを必要とするとはいへ、殆ど加減乘除の四則を以て足りる程度のもので、從つてこれ亦とりたてゝ言ふほどのものではない。反之、誘導値に於てはその基礎となる觀察値の正否の外に、更にこれに加へられる數學的操作の手續きに於て常に多かれ少かれ種々なる困難に遭遇するのである。こゝにいふ困難とは素より計算上のそれを指すのではない。運算なるものは如何なる場合にも複雜なのが原則であつて、殊に科學的研究に於けるそれが屢々想像も及ばぬ煩雜な手續きを必要とすることは、多少とも自然科學に於ける各種計算の實例を知る人ならば容易に肯けることゝ思ふ。統計的方法に適用される運算も、その概して煩雜なることは少しも右に劣らないのであつて、例へば連環比率法による季節指數の決定とか、最小自乘法による高次曲線の當嵌めの如き、原理そのものはたとへ簡單なりとしても、實際の運算は可成り煩雜なるを免れないのである。即ちこれら困難は全く技術的なもので、計算者の熟練と計算用器の整備を以てすれば限りなく排除しうる性質のものなのである。

然らば若し誘導値に何等かの數學的困難ありとせば、それが論理的方面に横はるといふことになる。これは數學の世界に於ける數と統計學の世界に於けるそれとの根本的相違から來るのである。前者は一ケの純粹理念であり、先驗的にして抽象的なものである。反之、後者は何等かの具象物の反映であり、從つて經驗的にして具體的なものなのである。即ち一方を純粹數とすれば、他方は具體數といへやう。數學はかゝる純粹數を對象とする論理學であるから、要求されるものは何處までも數學的嚴格さのみである。然るに具體數を對象とする場合には、數の論理の外に更に、その數の背後に横はる具象性即ち事物の本性に關する論理が要求される。統計學は一ケの方法の學であるから、それ自體は一ケの形式科學であり、この點に於て數學とは同一範疇に屬すものであるが、この事から統計學の具象性が沒却されてはならぬ。統計學が方法學だといふ意味は、それが種々の實質科學の研究方法の一つだといふことで、從つて何等かの具象に關聯せしめられずしては存在の理由を持ち得ないのである。素より方法學としての統計學は統計的方法一般を問題とするから、その限りに於ては何等具體的對象を必要としない。そこに現はれる數字は單に例示を目的とするから、必ずしも現實の統計たるを要せず、假想的又は抽象的なものを以て足りるのである。併し一度びかゝる方法が何等かの研究に適用されゝば、對象は現實的具象でなければならぬ。この具象は或る特定の統計集團に外ならない。統計集團とは一定の標識の下に客觀的に規定された同種個體の集團の謂ひであり、人口・物價・學生・住宅の如き可量的大さとして成り立つ。即ち統計的方法は特定の統計集團について始めて可能となるのであつて、斯かる集團を表示する數字即ち統計は、數學の對象たる抽象的先驗的數とは根本的に異るものである。かゝる具體的數字もそれが數たる以上は常に數學の援用を俟つことは言ふ迄もないが。而もこの場合、數學は一ケの手段たるに止まり、窮極の目的は統計集團の理解でなければならぬ。數學的には是認せられても、この目的に適はざる誘導値は卒直に言へば統計値ではない。それは現實から遊離した虛構値であり、從つて現實の解明

を任務とする統計的方法に於て何等の價値をも持ち得ないものである。

Yule は嘗て統計系列間に屢々無意味の相關係數の成り立つことを指摘したことが[illegible]ある（註）。斯かる誘導値が意味を持つか否かは數學的には判斷されない。判斷の基準は全く統計系列[illegible]の示す集團の性質に在るのであつて、換言すれば集團の性質が誘導値の價値を決定するのである。故[illegible]れ同一の統計系列につき數學的には各種の取扱ひが可能であつても、この系列の具體的内容からはそ[illegible]の中の一つが是認されるに過ぎない。もし二つ又はそれ以上の異る方法が、延いて二つ又はそれ以上[illegible]の誘導値が、共に是認されるならば、それは何れも異る觀點に應ずるもので、同一の立場に立つ限り、[illegible]決してあり得ない事である。私はこの問題の一端を以下に於て統計的平均値を藉りて述べて見たい[illegible]と思ふ。蓋し統計的平均値は凡ゆる統計的誘導値のうち最も重要な地位を占むるものであり、更に後段述ぶるが如く、これを廣義に解釋すれば統計的誘導値の大半はこれに包含されるからである。

（註）　U. Yule-Why do we sometimes get non-sence correlation?(Journal of the Royal St. Society, 1926)

二　統計集團の概念としての統計的平均値

箇々の數値から成る系列に對して、これら數値によつて一義的に規定され且つ兩極の間に介在するところの中心的數値を平均値（又は中數値）といふ。即ち平均値は全く數學的概念であつて、如何なる方法によるを問はず、右の目的に應じうる數値は總べて平均値たりうるものである。斯かる數値は數學的には極めて多種多様に、否殆ど無數に成立する（註一）。併しその主たるものは算術的平均（Ma）、幾何平均（Mg）、調和平均（Mh）、並數（Mo）及び中位數（Me）の如きものである（註二）。

（註一）　Flaskämper-Beitrag zur Logik der st. Mittelwerte (Allg. St. Archiv. 21 Bd. III. Heft. S. 383)

（註二）　數學的平均値としてはこれ以外に例へば逆調和平均（Anti-hermonic Mean＝AHM）平方平均（Quadratic Mean＝QM）の如きものが擧げられる。

與へられた系列が $x_1\ x_2 \cdots\ x_n$ なる項より成るとき

$$AHM=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\frac{\Sigma(x^2)}{\Sigma(x)}$$

$$QM=\sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x^2)}$$

として定義される。平方平均は各項の値が算術平均よりの偏差を示す場合には、特に標準偏差（Standard deviation－σ）と呼ばれる。

なほ項が單に a 及び b の二つより成るときは（1）その幾何平均は調和平均と算術平均との幾何平均に等しい。

$$\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{2ab}{a+b}\times\frac{a+b}{2}}$$

（2）その算術平均は調和平均と逆調和平均との算術平均に等しい。

$$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{a+b}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)$$

（3）その平方平均は算術平均と逆調和平均との幾何平均に等しい。

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\times\frac{a^2+b^2}{a+b}}$$

(Ritz-Baur, Handbuch der mathematischen Statistik, 1930, S. 9)

與へられた數列の各項が無内容の數字、即ち純粹數なる場合には、その取扱ひは純數學的に行ひうるから、もしこれが平均値を求めんとすれば、上記の各種平均の何れを採つてもよいわけで、單にそれが如何なる種類の平均値なるか、即ち例へば算術平均なるか幾何平均なるかを明記すれば足りる。然るに統計的平均値は統計系列から求められる。この統計系列は無内容な數字から成るものではなく、必ず或る統計集團の大さ又は構成を示すところの具體的數字から成る。この場合、斯かる數字は絶對數なる場合もあり、比率なる場合もあり、時には平均値なる場合もあるが、これらが何れも特定の統計集團から求められてゐる點では同じである。故に求められた統計的平均値は必ずその系列の内容から是認されるものでなくてはならぬ。換言すれば單に數學的に規定された平均値はそのまゝでは統計的平均値たるを得ないといふことになる。Flaskämper は統計的平均値に次の如き定義を下してゐるが、これは全く正しい。曰く「統計的平均値とは箇々の數値から成る統計系列に對して、これら數値によつて一義的に規定され且つ兩極(上下の限界)の間に介在するところの中心的數字表現であり——こゝ迄は平均値一般の定義と一致する——更にこれに一ケの具象的内容的意義が適應するところの中心的數字表現である」と(註)。斯く統計的平均値がその内容によつて絶えず規定されねばならぬとすれば、與へられた統計系列からは合理的には一ケの平均値しか求められないことが判る。換言すれば無數に存在する數學的平均値の公式を隨意に選擇しうるのではなく、常にその系列の内容によつて或る一ケの公式のみが是認されるのである。勿論多くの場合には同一の統計系列について數ケの平均値が内容的にも合理的に算出されることはあらう。併しこの場合には、その各々の平均値は概念上別種の内容を物語つてゐるのであつて、從つて或る特定の提問に對しては常に一ケの平均値しか妥當しないのである。このことは統計的平均値の論理性を一考することによつて明かにされるであらう。これには先ず統計的平均値の任務を顧みなければならぬ。

(註) P. Flaskämper-Beitrag zur Logik der st. Mittelwerte (Allg. st. Archiv. 21. Bd. III. Heft)

抑も統計的平均値は何が爲に求められるのであるか。Zizek に從へば「平均値の算出は、(1)專ら異れる個別値の數列を要約して、一定の方針の下にその特徴を表示せんとする場合には、それ自身が目的である。併し平均を求めるのは他の目的に對しては手段たる場合がある。この觀點の下で問題となる主たる場合は(2)比較をなす目的から、(3)或ひは個別値を判定する目的から平均値を算出するか、(4)又は系列の分散を測定するために其の基點として平均値を適用する場合である」と(註)。併しこの四ケ月の目的は決して相互に獨立して存在するものではない。否、(2)(3)及び(4)の三目的は何れも(1)即ちそれ自身を目的とする場合に當然包含せらるべきものである。蓋し一統計系列を一ケの集約的數字に收斂し、以て該系列の特徴を把捉せんとするには、同時に分散度の決定は不可避の要件であり、これが行はれゝば各項の判定も可能となるのであるから、(1)には當然(3)及び(4)が含まれねばならぬ。そして各統計系列についてこれらが明かにされて始めて(2)即ち系列間の比較も可能となるのである。この意味に於て統計的平均値の中心課題は、それ自身を目的とする場合だと言つて差支へなからう。

そこで問題は何故吾人はそれ自身を目的とする統計的平均値を必要とするかといふことである、Flaskämper は かゝる認識目的をば（1）代位作用（Ersatzfunktion）及び（2）中央値の二つに求めてゐる（註）。併しこれは統計的平均値の作用を分類したに過ぎず、吾人の提問に應へるものではない。

（註） F. Zizek-Grundriss der Statistik, 1923. S. 149.

（註） P. Flaskämper-ibid.

惟ふに統計的平均値の本質は、これによつて吾人が、與へられた統計集團に關する一義的概念を構成しうるといふ點に存するのである。概念とは廣い意味に於て事物に關する抽象的一般的理念である。例へば吾人が「家」といふ概念は、住宅・工場・神社佛閣等種々雜多な建造物を一括して指すのであつて、内容は極めて抽象的であり一般的である。そして吾人が概念の範圍を縮小するに連れて、概念は次第に具體的特定的性質を帶びるのであつて、例へば「家」なる概念を單に「人の住む」家に限定すれば、「家」よりも遙かに狹い「住宅」なる概念が構成され、更にこれに「木造」の制限を加へれば「木造住宅」たるより狹い概念が構成されやう。概念の抽象性は斯く大小の程度があるとはいへ、而も依然として多かれ少かれ抽象的一般的理念たることには變りはない。そして吾人が絶えず事物について各種の概念を構成するのは、これによつて複雜な事象を一義的に把握せんとする必然の要求に應へんが爲である。素より吾人は日常生活に於て不斷に且つ不知不識の裡に種々の概念を構成し使用してゐる。併し科學的嚴正を求むる場合概念は豫め嚴格に規定されねばならぬ。科學に於て常に各種の定義の要求されるのはこれか爲に外ならぬ。即ちいま吾人の言ふ概念規定とは定義と同一義なのである。

さて統計的平均値とは與へられた統計集團を一ケの數値によつて一義的に規定したものであるから、その論理的性質は上述の概念の場合と何等異るところはない。即ち統計的・平均値は概念なる概念に包含されるものである。そして吾人が普通に概念と平均値とを對立せしめる理由は、前者が主として事物の質に關して成り立つに對し、後者は常にその量に關して成り立つといふ事實に求められやう。併しこの對立は素より竝行的對立ではなくて上位と下位の關係に立つものである。蓋し統計學に於ける量なるものは先天的に與へられるものではなく豫め事物が與へられこれを數へ又は量ることによつて求められるのであるが、事物とは概念規定を前提せずしては把握し得ないからである。統計集團なるものは豫め單位と標識とが概念的に規定されて始めて成り立つ。この統計集團なる概念を數字的に表現したものが統計或ひは統計系列である。故に統計的平均値が統計系列を一義的に規定したものであるといふ意味は、畢竟統計的平均値は統計集團なる概念を數字的に一義的に規定したものだといふことである。即ち統計的平均値はそれ自體一ケの概念であるが、同時により先行の概念（統計集團）の補塡的概念といはねばならぬ。

然らば何故吾人は斯かる補塡的概念を必要とするのであるか。惟ふに廣義の概念なるものは、それが質的範疇に屬するが故に、正確性に於て缺くるものがあるのである。普通の用語を以て表明した善惡大小の概念は、それが價値判斷の結果たることからして、著しい程度に主觀的なるを免れない。日本人は强い國民であるとか、身長の低い國民であるとかの一般的命題即ち客觀的概念が果して成立するかどうかは疑問であり、假令成立したとしてもそれが

一義的に解釋されるかどうかは更に疑問であらう。然るにもし吾人がこれら概念を統計集團として把捉しうるならば、常然一定の尺度を以て客觀的に表明しうることになる、從つてそれを一義的に規定した統計的平均値は客觀的概念たるを得るのである。

故に假りに吾人が客觀的に統計集團を把捉し得たとし、且つ平均値算出の方法が一ケしか與へられないものとすれば、吾人は凡ゆる集團の量的概念は統計的平均値によつて常に一義的に規定出來る筈である。然るに集團の把捉そのものが事實に於ては必ずしも純客觀的に行ひうるとは限らぬのみか、加之、平均値算出の方法が上述の如く極めて多種多岐であるとすれば、求めた統計的平均値もその客觀性は必ずしも無條件に是認されうるものではない。殊に統計的平均値が常に具體的な一ケの數字を以て示されるといふ事實は、動ともすればかゝる無條件の是認を許容するが如き印象を與へるのであつて、そこに統計的平均値の最も恐るべき陷穽が横はつてゐるのである。

ジァン・ロム（Jean Lhomme）は先つ統計的平均値を（1）嚴格な意味に於ける平均値即ち計算的平均値（算術平均、幾何平均、調和平均）（2）中位數（3）並數の三つに分類し、中位數はそれが單に項の排列を考慮に入れるのみだといふ理由から、概念的價値の範疇から除外し、更に次に別の觀點から統計的平均値を（1）客觀的平均値と（2）主觀的平均値に分ち、同樣前者即ち客觀的平均値を除外してゐる（註）。彼が中位數を除外したのは私の贊し得ないところであるが（後段、中位數の一節參照）、客觀的平均値を除外することには贊成である。彼は格別その理由を説明してゐないが、私は略〻次の如く解釋したい。客觀的平均値とは同一物の反復的觀測値について成り立つ平均値であるが、これが何故主觀的平均値即ち多數の同種個體に關する觀察値——普通にいふ統計系列とはかゝる觀察値を指す——について成り立つ平均値と對立せしめられるかは一應吟味して置く必要があらう。

（註）J. Lhomme-Essai sur la valeur cenceptuelle des moyennes statistique. (Mélanges, dédiés à M. Prof. H. Truchy, 1938, pp. 253-266

客觀的平均値は同一物の反復的觀察について成り立つものであるから、その場合の統計集團とはこの反復的觀察値そのものに外ならぬ。例へば一天體の地位を反復して觀測すれば、如何なる熟練と注意を以つてしても、決して常に同一結果を得るものではなく、必ず多少の相違を免れないから、これら數値を整理すれば觀測値の度數分布表を求めることが出來る。即ちその形態は、例へば多數の人々の身長を同時に即ち一回限り測定した結果を纒めた度數分布表と異るものではない。併しこの場合、その意味するところは本質的には根本的に異るのである。恒星の位置の如きは元來確定不易なるべきものであるから、毎回の觀測値が異なる結果を示すとすれば、一に觀測上の誤差に基くに過ぎず、斯かる誤差は所謂偶然誤差たるべき筈であるから、常に誤差法則によつて律せらるべき性質のものである。即ち斯かる誤差の分布はガウス曲線によつて示される對稱的分布なるべく、その頂點の示すx座標（これは算術平均値であり、同時に並數でありまた中位數でもある）は誤差の相殺された場合、即ち精確な觀測値と斷定される。

然るに多數の同種個體を同時に觀察した數値は原則としてガウス曲線と一致するものでなく、左右何れかに偏倚

したり、時には――所得の分布に於けるが如く――寧ろ双曲線的分布を示すことすらある。素より人體の測定、例へば身長や體重の測定等に於ては著しく對稱的な分布を得ることがあるが、この場合の平均値を以て直ちに客觀的平均値と同一視しうるか否かは甚だしく疑問なのである。Quetelet の有名な「平均人」homme moyenne は、斯かる主觀的平均値と客觀的平均値との混同より生れたもので、各人の肉體的精神的素質に關する觀測値の平均を以て直ちに人間の原型と認めうるとの觀念に立脚するものである。惟ふに時と空間とによつて規制される統計集團に於ては、たとへその數値の分布は著しい程度に對稱的なりとしても、一度び得たる平均値が能くその現象の原型たりうるものではあるまい。それは一定の條件の下に是認されるに過ぎず、この點に於て客觀的平均値とは根本的に相違するのである。

（註）　統計集團とは一定の客觀的標識の下に把捉された同種個體の集合であるから、かゝる統計集團に關する平均値を主觀的平均値と名づけるのは逆說的に見えるかも知れないが、元來標識は一ヶの概念であり、從つて統計集團も概念の所産であるから、斯かる概念に關する平均値を主觀的と名づけることは必ずしも不合理ではない。

なほロムは Berillon に從つて主觀的平均を典型的平均（Moyenne typique）と指標的平均（Moyenne indice）とに分つてゐる。前者は同一人種より成る一國人口の身長の如く一ヶの集中點の存する場合であり、後者は大小の二つ又はそれ以上の異種人口より成る一國人口の身長の如く二つ又はそれ以上の集中點の存する場合である。統計的平均値を以て本質値と見做せば、後者は本來の統計的平均値とは言へないであらう。併し集團の概念規定と解する限りは、當然その資格を持つものと解してよからう。

客觀的平均値と主觀的平均値との斯かる根本的對立は、必然次の如き結論に導く。即ち前者は吾人のいふ統計的平均値の範疇から除外さるべく、單に後者のみがその資格を有するといふことである。前者に於ける統計集團は單に一物の測定に於ける偶然誤差に外ならず、從つて斯かる集團の背後に存する該物の眞實の値は豫め嚴然と與へられてゐるのである。故にこの場合の集團たる觀測誤差の系列について一義的概念が成り立つとすれば、それは必然如上の眞實の値たらざるを得ない。この眞實の値は平均値と一致するから、從つてこの場合の平均値は事物の眞實値に外ならず、延いて最早や抽象的假構的な概念とは別個のものなのである。これ客觀的平均値が統計集團の概念たらざる理由である。この事については後に至つて再び言及するであらう。

反之、主觀的平均値に於ては問題は全く異る。この場合の統計系列は統計集團を構成する同種の多數單位が各々持つ差異を示してゐる。そこには豫め與へられた眞實値なるものは全く存在しない。存在しないが故にこれを一ヶの概念によつて規定する必要が起るのであつて、これ即ち主觀的平均値である。統計的平均値を論ずる限り、問題を後者に限定すべき理由はこゝに在る

以上のことから、客觀的平均値を除外すれば、その種類の如何を問はず、統計的平均値は統計集團の一義的な量的概念として解釋さる可きことが判る。然らば斯かる要求に合致する平均値は常に出發點たる統計集團の性質によつて規定さるべく、從つて單に數學的に是認さるゝ平均値たるのみでは足りないことも亦自ら明かであらう。斯かる前提の下に、各種の平均値の論理的性質を概說し、并せて若干の特殊な平均値を紹介しやうと思ふ。紙數の增加

を惧れ、具體的計算例は一切省略する。

三 各種統計的平均値と其の擴張

(一)算術平均(B_a)

n箇の數 $x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n$ が與へられたとき

$$M_a=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$$

$$=\frac{1}{n}\Sigma x$$

更にこれが度數分布 $f_1 f_2 \cdots\cdots f_n$ の形態で與へられたときは

$$M_a=\frac{x_1 f_1+x_2 f_2+\cdots\cdots+x_n f_n}{f_1+f_2+\cdots\cdots+f_n}=\frac{\Sigma(xf)}{\Sigma f}$$

日常吾人の使用する平均なる文字は殆ど例外なくこの算術平均を意味する。一般にその普及性は計算の容易にして理解の簡單なるに歸せられてゐるが、これには實は深い科學的根據があるのである。第一に平均といふ以上は、假りに全數値が全項に均等に分配せられたとした場合、各項が持つであらう値と一致すべきものと考へるのが概念的に最もよく平均の本質を規定する所以であらう。十名の所得が合計百圓ならば一人當りの所得(A)はその十分の一即ち十圓たるべく、換言すれば十圓を十倍した積即ちAに項數を乘じた積は、百圓即ち系列の合計値たるべきである。即ち

$$A\times N=\Sigma(x)$$

$$\therefore\ A=\frac{1}{n}\Sigma(x)$$

このAは上記の數學的定義に從へば B_a 即ち算術的平均に外ならぬ。換言すればこの平均値は、各項の最も確からしい値、即ち確率値である。よつて全項を或る値にて代表せしめんとする場合、この確率値を以てせんとするのは充分根據あることである。この事は確率論上の期望金額(Expectation)なる概念が要するに算術平均値によつて示される事によつて一層明かであらう。期望金額とはa圓を受取る約束をなしたるとき、その事柄の起る確率がpなりとせば、兩者の相乘積即ちap圓のことである。例へば賽を振つて3の目が出れば9圓を受取る約束をしたとすれば、期望金額は

$$ap=9_{円}\times\frac{1}{6}=1_{円}50$$

である。この一圓五十錢は投賽に於ける凡べての場合(即ち六通り)を分母とする算術平均なることが判らう。

(註) 或る年齢の人口が其の全部死亡するまでに實際に生存した合計年數を、上記人口で割つた商を平均餘命といふ。即ち平均餘命は算術平均値である。この平均餘命は右年齢の人が生き永へるであらう確からしい年數を示す。

算術平均が廣く利用される第二の根據は、系列各項の分散即ち偏差を測定するにはこれを基準とするのが最も合理的だといふ事である。與へられた統計系列の各項を $x_1\ x_3 \cdots\cdots x_m$ とすれば、算術平均(M_a)と各項の偏差即ち

(x_1-m_a), $(x_2-m_a)x$, ……(x_n-m_a)の總和は零である（註）。

（註）　$(x_1-m_a)+(x_2-m_a)+\cdots\cdots(x_n-m_a)=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n-n\times m_a=\Sigma(x)-n\times m_a$

然るに　$m_a=\frac{\Sigma(x)}{n}$であるから

$$\Sigma(x)-n\times m_a=\Sigma(x)-n\times\frac{\Sigma(x)}{n}=0$$

比率を測定する場合には次の幾何平均に於て述べる通り單位即ち一（或ひは100％）を基準とすべく、これに反して絶對數を測定するには零を基準とすべきことは明かである。偏差は勿論絶對數であるから、これが測定には基準を零ならしめる値が理想的であつて、この値は右の理によつて算術平均である。言ふ迄もなくこれから系列の偏差の程度を算出するには、正負の符號を無視して單に偏差の絶對値のみを採るか、又は偏差を自乘することによつて正數に改める必要があるのであつて、前者は平均偏差であり、後者は標準偏差である。算術平均を基準とした場合の偏差の總和が零となると同樣、算術平均を基準とした偏差の自乘の總和は、他の如何なる値を基準とした場合よりも小である。

（註）　各項を$x_1 x_2$……x_n、任意の値をAとすれば偏差の自乘の總和（S）は

$$S=(x_1-A)^2+(x_2-A)^2+\cdots\cdots(x_n-A)^2=\Sigma(x-A)^2$$

このSの値を最小ならしめるAの値は、最小自乘法の原理によれば、右式の微係數を零と置いて得られる。即ち

$$\frac{dS}{dA}=-2\Sigma(x)+2nA=0$$

$$\therefore\quad nA=\Sigma(x)$$

$$\therefore\quad A=\frac{\Sigma(x)}{n}=\text{算術平均}$$

（註）　偏差を$d_1 d_2$……d_nとすれば

$$\text{平均偏差(ND)}=\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{n}=\frac{\Sigma(d)}{n}$$

$$\text{標準偏差}(\sigma)=\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{n}}$$

二、幾何平均

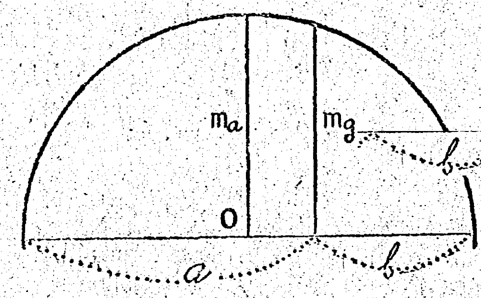
$x_2\ x_2$……x_nなる系列の幾何平均（M_g）は

$$M_g=\sqrt[n]{x_1\times x_2 x\cdots\cdots\times x_n}=\sqrt[n]{\pi x}$$

であり、これが更に度數分布$f_1\ f_2$……f_nの形態で與へられた場合には

$$M_g=\sqrt[n]{x_1 f_1\times x_2 f_2\times\cdots\cdots x_n f_n}=\sqrt[n]{\pi(xf)}\quad(\text{但し}n=f_1+f_2+\cdots+f_n)$$

である。これが實際の計算が對數によつて行はるべきことは勿論である。系列が單にa及びbの二數から成るときは算術平均は$(a+b)/2$であり、幾何平均は$\sqrt{ab}$であるから、比例算に於ける等差中項と等比中項に一致する。幾何圖表に於ては次の如く示される。即ち$a=b$の場合を除けば、幾何平均値は必ず算術平均値よりも小である。これは項數が三つ又はそれ以上となつても亦同樣である。



幾何平均の斯かる等比中項的性質は自らその用途を物語るものである。即ちこの平均は與へられた系列の各項が比率を以て示されてゐる場合にのみ用ひられ、然らざる場合には全く意味をなさないのである（註）。絶對數より成る系列の代表値又は中央値として算術平均の本質が規定されることは右に述べたが、絶對數を比率に改めれば算術平均の代りに幾何平均が登場する。毎年の人口増加の割合（對前年比率）がW_1 W_2 …… W_nで示されゝば n年後の人口（A）は

$$W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n = A$$

となるから、左邊の各項を代表するW_jを求めれば$W_j^n = A$となり、これより

$$W_j = \sqrt[n]{A}$$

を得る。この代表値は算術平均に於ける

$$x_1 + x_2 \cdots + x_n = A$$

$$n \times x_j = A$$

$$\therefore \quad x_j = \frac{A}{n}$$

と同じ性質のものである。また系列各項の偏差は一般に絶對數として示されるから、これが測定には幾何平均値は全く利用し得ないものであるが、併しその特殊の場合の存することは、並數の擴張として△（デルタ）を論ずるに當つて言及するであらう。

系列を構成する項の或るものがもし零又は負の値を持つときは、相乘積は零又は負となるから、幾何平均を求めることは不可能となる。併し幾何平均を適用すべき統計的幾何系列（即ち比率より成る統計系例）に於てはこの種の場合は決して起らぬものである。比率はa/bなる形をとるが、統計的比率に於てはaもbも觀察値、例へば昨年度の人口と本年度の人口、又は甲商品價格と乙商品價格であるから、a/bの値は$a > b$なるときは一以上、$a = b$なるときは一、$a < b$なるときは一以下の正の數字となり、零又は負とはならぬ。

算術平均に比して幾何平均の利用されることの不當に尠いことは、多數統計學者の非難するところである。Pohleはこれを數理統計學の罪に歸してゐる。即ち彼に從へば、數理統計學は均分算（Ausgleichsrechnung）と公算（Wahrscheinlichkeitsrechnung）の二方向に發展したものであるが、この二つに於ては比率の意義は殆ど閑却されてゐるのである。併し經濟統計の領域に於ては比率は絶對數と全く對等の地位を占むるもので、從つて算術平均と同じ程度に幾何平均の利用さるべき理由があると言はねばならぬ。

（註）K. Pohle-Zur Logik der st. Mittelwerte (Allg. St. Archiv. 22. Bd. Heft I. S. 104

（三） 並數

集團的事象について或る漠然とした一義的斷定を下す場合には、殆ど常に、該集團を構成する各單位のうち最も

多く見受けられる大さ又は性質に判斷の基準を置いて居るものである。一外人が「日本人は親切だ」と斷定した場合、これは決して總ての日本人が親切だと言ふ意味ではなく、彼の限られた觀察の範圍内に於ては、斯かる事例が極めて多いといふ意味である。この種の斷定は單に質の問題に限られるのではなく、量のそれについても亦成り立つ。例へば日本人は身長が低いとかその高さは五尺三寸位ひだといふが如き之である。前者は數量を單に漠然と言ひ表はしたもの、後者はこれに或る概數的數値を與へたものである。

さて私は統計的平均値とは集團に關する數字的概念だと言つた。然らば上記の最後に述べた數字的表現は當然統計的平均値の範疇に包含せらるべきものなることが判らう。これ即ち並數であつて、凡ゆる平均値のうち最も普遍的且つ素朴的な形態を有し、日常生活に於て不斷に無意識裡に構成される概念である。換言すればこの平均値は他の凡ゆる平均値に先立つて構成されるもので、ロムが「Saus doute, la statistique exige, pour le mode comme pour la moyenne, des calcul souvent complexes; mais il n'est pas négligeable de constater que les masses se catégorisent avat tout dons notre pensée sous la forme vague de modes: c'est ensuite seulement que nous les épurons pour les élever jusqu'à de véritable moyenne」と言つてゐるのは略々尤もである(註)。

(註) J. Lhomme-ibid. p. 258

言ふ迄もなく統計的平均値は或る確定した數値たるを要するから、上例の身長に於けるが如く、「略々五尺三寸位」といふやうな表現は統計的平均値たるを得ない。故に上記の並數の概念が統計的平均値たるが爲には、觀察された範圍内に於て如何なる値が最も多く存在するかを測定し、この測定値を以て並數となさねばならぬ。即ち並數は起源は全く常識的な概念であるが、統計學的には屢々複雜な計算を必要とするのである。いま一統計系列を構成する各項の値が個々に與へられて居り、且つ或る同一の値を示す項が最も多く存在するならば、吾人は直ちに斯かる項の値を以て並數とする事が出來る。然るにもし同一の値を示す項が皆無なるか又は同數なるとき(例へば身長五尺三寸なるもの二十人、三尺二寸八分なるものも亦二十人)の如き場合には並數は全くないか又は二つ又はそれ以上存在することになり、決定は不可能になつて了ふ。斯かる場合には與へられた系列を若干の級より成る度數分布表に變形して見る外はない。何寸何分として示されてゐる身長を、假りに一寸を一階級とする度數分布に改めれば、例へば五尺二寸階級は五十人、五尺三寸階級は四十五人といふが如き結果となり、從つて前者が無數なることが判るのである。然るにこの「階級」の大さを以て並數となすことは、平均値は五尺一寸乃至二寸だといふことで、統計的平均値は一定の確定的値を持たねばならぬといふ要求に合致しない。斯かる表現は、上述の「五尺三寸位」といふのと同樣極めて漠然とした斷定であつて、該集團の身長の一義的表現とは認められないであらう。

統計系列の大部分が常に度數分布の形態で與へられてゐる以上、並數を以て平均値となす爲には如上の困難は常に合理的に排除されねばならぬ。惟ふに並數とは一系列の最頻値(Häufigster Wert)であるから、度數曲線の頂點に對應する横座標の値に外ならぬ。即ちいま度數曲線が

$$y = f(x)$$

として示されゝば、この函數yの値を極大ならしめるxの値であつて、これは右函數の微係數を零と置くことによつて求められる。即ち

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=0$$

である。求めるものは極大値であるから、二次微係數は言ふ迄もなく負數でなければならぬ。

數學的には斯く容易に並數を決定しうるが、かゝる操作が常に是認されるかどうかは疑問である。蓋しこの方法を適用するには豫め度數分布表も度數曲線に改めねばならぬから、所謂數學線の當嵌めを必要とする。この場合、資料及び方法の如何によつて、求められた曲線は現實即ち與へられた統計系列と屢々著しく異つたものとなる。極端な場合を考へればかゝる曲線の頂點は、並數を含む階級以外の階級に與へられることもあり得やう。斯くては數學的嚴格さが却つて現實を歪曲することゝなる。故に實際の問題としては、寧ろ一般に利用される簡單な補間法即ち並數を含む階級の上下の二階級の度數に比例して並數階級の中點の左又は右に並數を決定する方法が是認されるのである。

（註）　並數の含まれる階級の下限をα、その上位の階級の度數をf_a、その下位の階級の度數をf_b、階級の大さをCとすれば

$$M_0=\alpha+\frac{f_a}{f_a+f_b}C$$

並數が統計的平均値として極めて具體的な性質を有し乍ら、而も餘り利用されない重大な理由は、それが他の諸項乃至諸階級を殆ど又は全く考慮に入れないといふことである。他の項又は階級の値が增加しても、それが並數の値に達せぬ限りは、並數は依然不變である。これは平均値としての並數の價値を著しく減殺するものと言はねばならぬ。蓋し一系列を構成する諸項の値が變化すれば、該系列の性質が變つたことになり、從つて平均値にも何等かの變化が起らねばならぬからである。並數と中位數の兩者即ち排列の形態から成り立つ平均値はこの意味に於て缺くるところがある。既に Pohle の指摘する通り、統計的研究の目的は單に系列の典型値を求むるよりは、寧ろ系列に觀取される偏差の性質を明かならしめるに在る。各項の値は何故一致しないか、その由て來る理由を明かにすることは、恐らく一ケの代表的數値即ち平均値を決定するよりも遙かに複雜にして且つ重要な意義を持つであらう。統計的平均値は與へられた統計系列の一義的概念たるべしといふ意味は、實は右の二ケの要求を含むものと解釋されねばならぬ。蓋し偏差の本質は平均値を基準とせずしては明かならしめられないからである。この點については最後に再び言及するであらう。

（四）　中位數

一系列を構成する各項を大さの順序に排列したとき、その中央に當る項の値を中位數といふ。並數ほどの通俗性は持たぬとしても、而も斯かる値を以て全體の平均値と見做す考へ方は恐らく何人も多かれ少かれ具へてゐるであらう。算術平均値は偏差を二等分するといふ意味に於て中央値であるが、中位數は全項を二等分するといふ意味に於て中央値たるものであるが、中央の概念は偏差――これは計算を必要とする――についてよりも項――これは豫

め既に與へられてゐる——についてより容易に構成されるものであるから、從つて中位數は算術平均よりも通俗的な中央値だと言へる。そして中央値を以て該系列を一義的に規定する概念と見做しうることは言ふ迄もないから、中位數は當然平均値たりうるものである。

各項 $x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n$ の値が個々に與へられてゐるときは、これを大さの順序に排列することによつて直ちに中位數を決定することが出來る。即ち項の數を n とすれば $(n+1)/2$ 番目の項の値が中位數である。もし項の數が偶數なるときは一般に中央二項の算術平均を以て中位數とする。然るに系列が度數分布の形態で與へられてゐるときは、理論的にはこの度數曲線 $y=f(x)$ の含む面積を二等分する x の値とせねばならぬ。即ち

$$\int_{x_1}^{M_e} f(x)dx = \int_{M_e}^{x_n} f(x)dx$$

であつて、この構成は並數の決定に於ける場合と同樣である。即ち一般には度數の均等分布を假定して、單純な補間法を用ひて決定する（註）。

（註）　中央項を含む階級の下限をL、この階級に含まれる度數をf、この階級の何番目が中央項に當るかをi、階級の大さをCで示せば

$$M_e = L + \frac{i}{f}C$$

統計的平均値としての中位數の地位は並數のそれと極めて類似する。即ちそれは集團の概念規定として極めて自然的ではあるが、偏差の大さと無關係に構成される點に於て科學的正確さを缺くのである。中位數は自己を中心として系列をより大なる項とより小なる項に二分するから、偏差の件數を問題とする限りは最も是認せらるべき平均値であるが、多くの場合、偏差の單なる件數は殆ど問題の對象とはならない。偏差に於て考慮さるべきは殆ど常にその大さなのである。これと無關係に構成さるゝ並數又は中位數は、嚴格な意味に於ては、對象たる統計集團を規定する概念とは言へないであらう。

（五）　並數と中位數の擴張

統計的平均値の任務が、與へられた統計系列の一義的規定にあるとすれば、從來の並數及び中位數は屢々この要請に合致しない。度數分布の形態で與へられた統計系列について算術平均を求めるには必ず加重平均の形式を採らねばならぬ。即ち階級を $x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n$、これら各階級に含まれる度數を $f_1\ f_2 \cdots\cdots f_n$ とすれば

$$M_a = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + \cdots\cdots + x_nx_nf}{f_1 + f_2 + \cdots\cdots f_n} = \frac{\Sigma(xf)}{\Sigma(f)}$$

であつて、單なる $\Sigma(x)/n$ は無意味であるが、普通の並數や中位數は屢々この種の不合理を犯してゐるのである。いま x を賃銀階級、f を人員とすれば、並數とは最大の f の持つ x の値であり、中位數とは f の中央に位する人の持つ x の値である。併し算術平均に於ける加重の概念を持ち來り、f の外に更に階級 x を考慮に入れゝば、別種の並數及び中位數の概念が成立する。即ち並數に於ては f の最大値の代りに xf の最大値を、中位數に於ては $\Sigma(f)$ の中

央値の代りにΣ(xf)の中央値をとることが出來るわけであつて、提問の如何によつては斯かる意味の並數又は中位數によらねば適當な平均値と認むるを得ないのである。「幾許の賃銀を受取る職工が最も多いか」といふ提問に對しては並數を適用すべきであるが、「如何なる階級が最も多くの賃銀額を取得するか」といふ提問に對しては賃銀階級とその階級に含まれる職工數との相乘積（即ちxf）の最大なるものをとらねばならぬ。然らば並數がf(x)の極大値として定義されると同樣、この別種の並數はxf(x)の極大値として定義されやう。これを最重値(Schwerster Wert)と名づける。

同樣にして全職工(Σ(f))を二等分する賃銀(x)を示すところの中位數の代りに、取得賃銀總額(Σ(xf))を二等分する賃銀を示すところの別種の中位數が必要な場合がある。これは

$$\int_{x_1}^{M_d} xf(x)dx = \int_{M_d}^{x_n} xf(x)dx$$

として定義さるべく、これを分離値（Scheidewert 又は médiale）といふ。上例を以てすれば、それ以下の賃銀取得者の賃銀總額とそれ以上の賃銀取得者の賃銀總額との相等しいやうな賃銀を意味する。

並數及び中位數を擴充した最重値及び分離値の二ケの平均値は、最初 Fechner が系列の主要値(Hauptwerte)として取上げたものであるが、統計學の領域では殆ど注意されるところがなかつた。統計的平均値に關する Zizek の大著のうちにも單にその名稱が記されてゐるに過ぎない（註一）。然るに一九三〇年 March はその「統計的方法の原理」に於て分離値の重要性を指摘し、これに **médiale** なる名稱を與へたのである（註二）。更にその翌年 **Flaskämper** は「統計的平均値の論理」に於て最重値及び分離値の兩者に關し一般の注意を喚起するところがあつた（註三）。また我國では水谷一雄教授が昨年度の統計學會に於て「中位數とその擴張」なる題下に分離値の本質及び計算に關し極めて詳細な報告を試みられた（註四）。この種の新らしい平均値が統計的方法に於て適當に利用されんことは極めて望ましいのである。

（註一）　F. Zizek-Die statischen Mittelwerte, 1903. S. III.

（註二）　L. March-Les principes de la méthode statistique, 1930. pp. 267-269.

（註三）　F. Flaskämper-ibid. SS. 352-357.

（註四）　水谷一雄、中位數とその擴張（日本統計學會年報、第八年度號）

（六）　△に就いて

系列の各項の値に於ける相互の差（偏差）は、統計的研究に於ける極めて重要な問題である。Pohle 曰く「統計的研究の目的は結局、一切の値の代表と認められて典型値を求むるに在るといふよりは、寧ろ斯く求められた典型値と實際觀察値との偏差を因果的又は合理的に研究するに在る。即ち研究目的はつまり偏差である。斯くて新たな研究毎に變化するこの偏差を、その論理的意義に從つて解明することは極めて緊要である」と（註一）。素より偏差は平均値を基準として始めて科學的に測定しうるのであるから（註二）、偏差の意義を强調することは決して平均値の意義を減殺するものではない。併し同種にして而も相互に異る多數單位から成る統計集團を研究對象と置くとき、こ

れら相異性を相殺することによつて得る平均値は著しい程度に抽象的なるを免れない。現實を解明する手段としての統計的方法は常に現實の多樣性を考察せねばならぬ。この多樣性又は相異性は偏差の概念を以て律せられるものであるから、統計的平均値の考察は同時に偏差の考察を伴はねばならぬ。

（註一） K. Pohlen-ibid. S. 104

（註二） 平均値と無關係に構成される分布測定法とは所謂レンジの如きものである。レンジとは系列中の最大値と最小値との開きを指す。

一般に偏差は上述の如く算術平均を基準として測定される。いま各項の値から算術平均を差引けば、偏差のみから成る系列が得られる。この系列について標準偏差又は平均偏差が算出されるのであるが、更にその系列について並數を求めることも出來る。これは系列中、如何なる偏差が最も多いかを示すもので、その値は原系列について求めた並數から算術平均値を差引いたものである。この考へ方を比率より成る系列に適用すれば別種の並數が得られるのであつて、これを Flaskämper は△と名づけてゐる。即ち各項の値と幾何平均との比率を求めれば、偏差率から成る系列が得られ、これについて求めた並數が△であつて、幾何系列に於ける偏差を取扱ふに當つて考慮せらるべき特別の平均値である。尤も適當な變化を加へれば、偏差の中位數についても類似の概念が成立する筈であるが、未だ何人もこれには觸れてゐないやうである。

（註） P. Flaskämper-ibid. S. 402

（七） 平均値の意義の擴張

一般に平均値を以て一ケの變數から成る一系列についてこれを一義的に規定する數値なりとすれば、殆ど一切の統計的誘導値は何れも統計的平均値の性質を具有すると言つてよい。蓋しかゝる誘導値は何れも與へられた統計系列を何等かの觀點から數字的に規定するものだからである。然らば二ケの異る變數から成る二つの系列間の關係も亦平均の概念を以て律しうる事は當然である。かゝる意味に於ける平均値は二つの方向に展開しうるのであつて、一は回歸線又は傾向線の如き、所謂平均値の軌跡としてゞあり、他の一つは面積の重心としてゞある。以下簡單にその意義を一考しやう。

（A） 重心としての平均値

二つの變數によつて決定される面積の重心は、この二つの變數の均衡點であり、從つて一種の平均値と認められやう。人口の年齢別構成は一般に人口ピラミットによつて示されるが、かゝるピラミットはy軸に年齢を、x軸に各年齢階級の人口數（又は比率）をとる。更にx軸は左右に二分されて左は男子人口、右は女子人口を示すのが原則である。幼少年階級の大なる人口に於てはピラミットの重心は比較的に下部にあり、壯老年階級の大なる人口に於ては反對に上部にあるべく、更に女子人口の大なる場合には重心は右方に、反對に男子人口の大なる場合には左方に傾く。故に各國の人口につき、又は同一國の異る時期の人口につき、ピラミットの重心を相互に比較することは人口構成の相違を見る上に大なる效果があるであらう。F. Savorgnan の提唱するその算出法は一考に値すると思

はれる(註)。

（註） F. Savorgnan-Der Schwerpunkt der Alterpyramide (Archiv für mathematische Wirtschats-und Sozialforschung, Bd. v. Heft 1. 1933)

ピラミットを構成する各階級は矩形から成るから、その各矩形の重心は各對角線の交點である。ピラミットそのものゝ重心は次の如くして算出される。即ち一ピラミットを構成する矩形の數を f とすれば先づ $x(\Sigma fx)$ 及び $\Sigma(fy)$ を求める。力學の定理に從へば

$$\Sigma fx = FY \;;\; \Sigma fy = FY$$

である(F即ちピラミットの面積は Σf 即ち各矩形の面積の和に等しく、X及びYはその重心の坐標である)。上式からX及びYを求めれば

$$X = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$Y = \frac{\Sigma fy}{\Sigma f} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

いま年齢階級が各歳別として與へられたとすれば、各矩形の底邊はその年齢の生存者數即ち L_0, L_1, $L_2 \cdots\cdots L_m$ であり、また各矩形はy軸を基準として男mと女wとに分たれるから

$$f_0 = L_0 = m_0 + w_0$$

$$f_1 = L_1 = m_1 + w_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_w = L_w = m_w + w_w$$

と書き記すことが出來、從つてピラミットの全面積(總人口)は右の總和

$$\sum_0^w f = \sum_0^w L = \sum_0^w (m+w)$$

である。そして各矩形の重心のx坐標は

$$\frac{m+w}{2} = m + x \;;\; \frac{m+w}{2} = w - x$$

から

$$x = \frac{m-w}{2}$$

として求められる

故にピラミット全面積の重心のx坐標を求めるには(1)式から

$$\sum_0^w fx = (m_0 + w_0)\frac{m_0 - w_0}{2} + (m_1 + w_1)\frac{m_1 - w_0}{2} + \cdots\cdots = \frac{1}{2}\sum_0^w (m^2 - w^2)$$

$$\sum_0^w f=\sum_0^w L=\sum_0^w (m+w)$$

と計算されるから、これより

$$X=\frac{1}{2}\frac{\sum_0^w (m^2-w^2)}{\sum_0^w (m+w)}\cdots\cdots\cdots(3)$$

として求めればよく、その正負は

$$\sum_0^w m^2 \gtrless \sum_0^w w^2$$

によつて決定される。重心の x 坐標が決定さるゝば次には(2)式からその y 坐標が決定される。即ち y 歳の矩形の重心の y 坐標は $\frac{1}{2}$ であるから

$$\sum_0^w f\left(y+\frac{1}{2}\right)=\sum_0^w L\left(y+\frac{1}{2}\right)=\sum_0^w Ly+\frac{1}{2}\sum_0^w L$$

となり、これを $\sum_0^w L$ にて除せば次式を得るのである。

$$Y=\frac{1}{2}+\frac{\sum_0^w Ly}{\sum_0^w L}\cdots\cdots\cdots(4)$$

（B） 平均値の軌跡

連續的平均値の概念は二系列間の相關々係を示す回歸線又は時の經過に伴ふ一系列の變動を示す傾向線の如き形態と、移動平均の如き形態に於て成立する。後者即ち移動平均が平均値の連續たることは改めて指摘するまでもない。移動平均は一般に單純又は加重の算術平均によつて行はれるが、既に述べた通り、與へられた系列の各項が比率なる場合には幾何平均によるべきである。何故他の平均が用ひられないかは極めて簡單な問題である。即ち移動平均は常に三項とか五項とかの僅かな項數を順次繰下げて、その各々の平均を求めてゆくのであるから、かゝる僅かな項數に於ては並數は存在しないのが原則であり、たとへ存在しても、それは寧ろ偶然の結果と認めねばならぬから、合理的に並數を適用しうる餘地は全く無いのである。更に中位數に至つては全く無意味である。蓋し例へば三項の平均に於て中位數をとれば、中央項そのものであつて、從つて移動平均の結果は與へられた原系列から單に初項と末項が失はれた系列を得るに過ぎないからである。

次に移動平均に於ては屢々加重が行はれる。加重の標準は一般に二項定理を適用し、$(a+b)^n$ の展開に於ける各項の係數を以て「重み」とする。n は移動平均の項數と一致せしめればよく、例へば三項平均に於ては $(a+b)^3$ 五項平均に於ては $(a+b)^5$ とすべきである。これを展開すれば

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^5=a^5+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^5$$

となるから、前者の係數は 1、3、1、後者のそれは 1、4、6、4、1、となる。即ち與へられた系列を $x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n$ とす

れば三項加重移動平均は

$$\frac{x_1+2\times x_2+x_3}{4},\ \frac{x_2+2\times x_3+x_4}{4},\ \cdots\cdots$$

たるべく、五項加重係平均は

$$\frac{x_1+4\times x_2+6\times x_3+4\times x_4+x_5}{16},\ \frac{x_2+4\times x_3+6\times x_4+4\times x_5+x_6}{16},\ \cdots\cdots$$

とするのである。何故かゝる方法を採るかといふに、如上の係數は事象出現の確率を示すところの確率曲線即ち正常曲線から是認しうるからである。五項平均に於て移動平均値は中央即ち第三項の正常値と認められるから、この場合この第三項の値が最も強く自己の正常値に影響を及ぼし、隣接する第二及び第四の二項は共に相等しく且つより弱い影響を與ふべく、最も遠い第一及び第五の二項は共に相等しく且つ最も弱い影響を與へるものと解釋するのは極めて自然な考へ方であらう。この際影響の强弱は如何やうにも解釋されるから、これを數字によつて「重さ」として示すことは容易でないが、而も大體に於て上記の確率曲線に從つて分布するといふ考へ方は恐らく最も合理的であらう。併し現實的にこれが如何なる程度まで是認されるかは、その一々の實例に於て嚴格に吟味されねばならぬ。他の統計的「重み」例へば物價指數に於ける商品別の「重み」に比して、この種の「重み」が特に抽象的なることは常に記憶せねばならぬところである。

次に回歸線又は傾向線は二つの變數間の一般的關係を規定するものであるから、當然平均の概念によつて律せらるべきものである。併しこの場合にはこの一般的關係は一ケの函數關係として示されるから、最早や平均値算出の方法は適用し得ない。それに代つて登場するものは最小自乘法である。その原理は、一平面上に與へられた數ケの點を縫つてこれら諸點に最も接近して引かれた直線とは、これら諸點からの鉛直距離の自乘の總和が最小なるが如き直線だといふことである。かゝる鉛直距離は何れも偏差と考へられるから、いまこれらを$d_1\ d_2 \cdots d_n$で示せば、求める條件は

$$S=d_1^2+d_2^2+\cdots\cdots+d_n^2$$

を最小ならしめることである。然るにこの式は算術平均に於ける偏差の性質と原理的には毫も異るものではない。即ち算術平均と各項との偏差の和は零であり、また偏差の自乘の和は、他の如何なる點からの偏差の自乘の和よりも小である（七八頁）。從つて平面上に與へられた數ケの點を縫ふ直線に於ても偏差の自乘が最小なるものは算術平均的直線なることは明かである。即ちかゝる原理に立脚する傾向線又は回歸線は當然統計的平均値を以て律せられねばならぬ。統計的方法に於て常に必要とされる曲線の當嵌め（Curve-fitting）が殆ど常にこの最小自乘法によつて行はれることからして、この方法の原理を明かにすることは極めて緊要であるが、本稿ではこれに立ち入ることは出來ない（註）。

（註）拙稿「統計的長期傾向値と理論的發展正常値」本誌第二十九卷第四號一三一—四頁參照。

四、統計的平均値の假構性

統計的平均値が統計集團の一義的概念であるといふことは、それが多かれ少かれ現實と遊離した抽象値或ひは假構値なることを意味する。唯一の例外は客觀的平均値のみである。與へられた一定の長さを繰返へし測定して得られる多數觀測値は、それが純粹な偶然誤差のみを伴ふが故に、その平均値は眞實の値であつて、從つて一般的抽象的な「概念」の範疇には入り來らざるものである。併し既に Forcher の指摘する通り「この種の平均値は不幸にして一般の統計に於ては考慮に入らない」のである（註）。Lhomme が概念値としての統計的平均値から特にこの客觀的平均値を除外したのはこの意味に於て正しい。そこに於て要請されるものは觀測技術と數學的論理の嚴正さのみであつて、對象の內容的論理は最初から問題の埒外に追ひ出されてゐると言はねばならぬ。

（註）H. Forcher-Die Statistische Methode, 1918. S. 297.

然るに主觀的平均値即ち同程の異る多數個體より成る集團について成立する平均値は必ずしも無條件に該集團の眞實値たりうるものではない。白い紙の上に濃淡樣々の黑色で描かれた美しい墨繪も、もし吾人がこれを平均してしまへば、一樣の灰色で塗りつぶされた薄汚い紙片に一變しやう。洵に現實に於ては、人の眼に映ずるものは多種多樣の形象と色彩であり、眼に映ぜざるものは多種多樣の素質と性格である。換言すれば多樣性こそ萬物本然の姿であり、從つて事象の本質である。統計集團の包藏する多樣性は平均によつて相殺され僻消される。百人の身長の平均値は、それが算術ならば、これを百倍すれば右百人の身長合計に等しくなることを意味し、それが並數ならば、この平均値に等しい人が最も多いことを意味するが、併し何れの場合にも身長の多樣性即ち現實性は一切陰蔽されてしまふ。素より吾人は標準偏差の如き數値によつて系列の多樣性にも觸れんと努力はするが、而もこの標準偏差なるものは既に說明した通り、所謂平方平均なる一種の平均の値であつて、從つて平均一般について斷定しうる非現實性は、標準偏差なる平均値についても當然當嵌まるのである（註）。

（註）平均値の抽象性については P. Eppstein-Die Durchschnittsfiktion. Eine Untersuchung zur Methodologie der Statistik (Jahrb. f. Nationalökonomie u. Statistik, 76. Bd.) が極めて詳細である。

現實の多樣性をそのまゝに把捉することは、吾人の限られた能力を以てしては固より不可能である。こゝに於て「概念」なる抽象的理念の意義が生れて來るのである。斯かる理念なくしては吾人は事象の多樣性と複雜性に唯だ眩惑され、呆然佇立する外はあるまい。併し一度び構成された概念はその事象の本然の姿たる多樣性の理解に移行せねばならぬ。これを缺く概念は虛空に遊離した假構物に過ぎず、斯かる概念に終始することは即ち概念の遊戲に外ならぬ。統計集團の概念規定としての統計的平均値の意義も右と格別異るところはない。唯だ異るところは、一般の概念に比して數學的嚴正を伴ふことであるが、上に述べた通り與へられた一系列について數學的には何れも正しい多數の平均値が求められるところから、その何れが最も能く系列の內容から是認されるかを決定せねばならぬ。そして斯く決定された或る平均値は、それが單に一ケの抽象的概念なること銘記し、これを一ケの基準として事象の現實に示す多樣性の究明に向はねばならぬ。Bowley は「統計學とは正に平均の學なり」と定義したが（註）、これは第一には大部分の統計的誘導値は廣義の平均値の範疇に屬するといふこと、及び第二には平均値こそ統計集團の多

樣性を明かならしめる基準となるといふ二つの條件の下に於て始めて是認出來るのである。單に平均値を算出し、これを以て直ちに集團の本質を明かならしめ得たりと考へるが如きは到底許さるべくもない。

（註）Bowley-Elements of Statistics, p. 6

斯かる考察は當然、吾人の統計的研究は最後には現實の多樣性の由つて來る原因の研究に移らねばならぬことを意味する。一集團の統計的平均値は一ケの假構値たるに止まり、該集團の各構成部分及び單位は多かれ少かれこれと異つた値を示す以上、かゝる相違は如何なる理由に基くかを明かならしめることは科學的研究に課せられた最大の任務である。この點に關する Fuhle の次の一文は大いに玩味されて然るべきであらう。「單なる系列比較と平均値の對比は原因と結果を決定する最適の途ではない。この假構的構成を以て將來の發展を推定するが如きは殆ど不可能である。經驗の敎ふるところによれば、數學的に基礎づけられた景氣理論に對しては懷疑と中立的態度以外の何ものをも置き得ない。統計家は毫も數學の敵たるを要しない。數學は彼に役立ちうるものであり、また役立たねばならぬ。併し彼は數學に支配されてはならぬのである。數學に對する彼の關係よりもより密接でなければならぬのは、數學よりも高いところの論理學に對する關係である。……現實科學としての經濟學は、論理的に考察し眞實を眞實に把捉し眞實に記述し眞實に評價するところの統計學を必要とするのである」（註）。

（註）F. Fuhle-Statistik els Mittel zur Ursachenforschung wirtschaftlicher Erscheinungen. (Jahrb. f. Nationalökonomie u. Statistik, 141. Bd. S. 428)

カッセルの價格構成機構論

千種義人

目次

一、均衡問題の算術的取扱ひ

前號で、交換經濟に於ける價格の意義とその決定原理について述べた。これによつてカッセルの價格論の本質的問題は一應知ることが出來たのである。然しカッセルは價格構成問題を一層明瞭に、且充分に把握する爲に、更に數學的公式を用ひて價格構成機構を說明する。この說明部分は「カッセルの價格構成機構論」として、或は「カッセルの價格方程式」として廣く知られてゐる所である。

（A）稀少性原理に基く價格構成