Title	図形表現を用いた証明の正規化について
Sub Title	On normalization of heterogeneous proofs combining formulas and diagrams
Author	竹村, 亮(Takemura, Ryō)
Publisher	三田哲學會
Publication year	2021
Jtitle	哲學 (Philosophy). No.146 (2021. 3) ,p.169- 176
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	特集：岡田光弘教授 退職記念号 依頼論文· エッセイ
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000146-0169

図形表現を用いた証明の正規化について

竹　村　　亮*

論理学では，推論は前提と結論を表す文と文の間の関係として捉えられ，とくに証明は，あらかじめ定められた規則に従って関係付けられた文の連鎖として捉えられてきました．幾何学のような図形を対象とする数学においても，文以外の表現である図形は，証明を構成するための補助手段として，もしくはアイデアを説明するための道具としてのみ考えられ，形式的な証明の一部としては捉えられてきませんでした．

しかしながら，Barwise や Etchemendy らの先駆的な研究によって，近年では図形表現は文・論理式に対応するものとして，フォーマルな証明の構成要素として捉えられることが示されています．図形はシンタクティックな対象として厳密に定義され，それに対する集合論的意味論が定義されます．また，図形に対する操作をフォーマライズした図形推論システムも導入され，従来の述語論理の推論システムとの対応が示され，さらにそれらのシステムの健全性や完全性といった基本的な論理学的性質が証明されています．

このような図形推論システムはさらに，図形と文を組み合わせた推論をフォーマライズしたヘテロジニアス推論システムへと拡張されています．例えば，Barwise and Etchemendy (*Hyperproof: For Macintosh*, The Center for the Study of Language and Information Publications, 1995) は Hyperproof と呼ば

* 日本大学

れるシステムを導入し，そこでは，種々の block（積み木）の位置や大きさ，形に関して一階述語論理の論理式と図形表現を組み合わせた推論が表現できます．（D. Barker-Plummer, J. Barwise, and J. Etchemendy, *Logical Reasoning With Diagrams & Sentences: Using Hyperproof*, CSLI Publications, 2017 にさらに詳しい解説があります.）

抽象的な文・記号表現と比べて，より具体的な図形的表現が持つ有効性はおもに，その認知的な特性にあります．したがって図形推論の分析にはとくに，論理学的分析と共に，図形的対象の持つ認知的な性質の分析が不可欠となります．このような観点から，図形についての認知科学的分析手法を Barwise の枠組みに応用する試みが，下嶋 (*Semantic Properties of Diagrams and Their Cognitive Potentials*, CSLI Publications, Stanford, CA, 2015) ら認知科学者により行われています．このように 1990 年代になって，推論に用いられる図形の特徴が，論理学，哲学，数学，情報科学，認知科学等のさまざまな観点から研究されるようになってきました．筆者も岡田研究室にて，これまでにとくにオイラー図を用いた推論について例えば以下のような研究を行ってきました.

- オイラー図・ヴェン図推論システムの開発と論理学的分析

  A Diagrammatic Inference System with Euler Circles, K. Mineshima, M. Okada, R. Takemura, *Journal of Logic, Language and Information*, Springer, 21, 3, 365–391, 2012.

  A Generalized Syllogistic Inference System based on Inclusion and Exclusion Relations, K. Mineshima, M. Okada, R. Takemura, *Studia Logica*, Springer, 100(4), 753–785, 2012.

  Counter-Example Construction with Euler Diagrams, Ryo Takemura, *Studia Logica*, Springer, Vol.103, Issue 4, 669–696, 2015.

  Euler diagrams as an introduction to set-theoretical models, Ryo Takemura, *Proceedings of the Fourth International Conference on Tools for Teaching Logic*, 223–231, 2015.

- オイラー図システムの証明論的分析

  Proof theory for reasoning with Euler diagrams: a Logic Translation and Normalization, Ryo Takemura, *Studia Logica*, Springer, Volume 101, Issue 1, 157–191, 2013.

  Two Types of Diagrammatic Inference Systems: Natural Deduction Style and Resolution Style, K. Mineshima, M. Okada, R. Takemura, *Proceedings of 6th International Conference, Diagrams 2010*, Lecture Notes In Artificial Intelligence, Springer, 99–114, 2010.

- オイラー図・ヴェン図の認知科学的分析および検証実験

  Towards explaining the cognitive efficacy of Euler diagrams in syllogistic reasoning: a relational perspective, K. Mineshima, Y. Sato, R. Takemura, M. Okada, *Journal of Visual Languages and Computing*, Elsevier, Volume 25, Issue 3, 156–169, 2014.

  The efficacy of Euler and Venn diagrams in deductive reasoning: empirical findings, Y. Sato, K. Mineshima, and R. Takemura, *Proceedings of 6th International Conference, Diagrams 2010*, Lecture Notes In Artificial Intelligence, Springer, 6–22, 2010.

  Is g an entity? A Japanese twin study using syllogisms and intelligence tests, C. Shikishima, K. Hiraishi, S. Yamagata, Y. Sugimoto, R. Takemura, K. Ozaki, M. Okada, T. Toda, and J. Ando, *Intelligence*, Elsevier, Volume 37, Issue 3, 256–267, 2009.

筆者はとくに，ヘテロジニアス推論の分析を通して，これまでの論理学証明論を拡張することを目的として研究を行ってきました．図形を用いた推論は一般に，与えられた前提に含まれる情報を統合した図形の構成

と，そこからの結論の読み取り，というステップで行われます．これは例えば，幾何学におけるピタゴラスの定理の証明や，カテゴリー理論における可換図の利用，オイラー図を用いた三段論法推論等，数学におけるさまざまな推論・証明に当てはまります．これらの図形の構成と読み取りの操作をフォーマライズした推論規則を導入することで，従来の述語論理の自然演繹をヘテロジニアス推論システムへと拡張することができます．もう少し詳しく説明すると，ヘテロジニアスシステムにおける図形とそれに対する推論規則は以下のように定義されます．（Proof theory for heterogeneous logic combining formulas and diagrams —Proof normalization—, Ryo Takemura, *Archive for Mathematical Logic*, to appear. 参照.）

- 何がフォーマルな図形かは，オイラー図システムや，グラフシステム等，個々の具体的なシステムによって異なります．抽象的には，これらは論理式に対応するものとして導入され，ここでは，図形を $\mathcal{D},\mathcal{E}$ 等で表すことにします．図形に対しては，$+$ 演算が定義されているものとします．すなわち，$\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ が図形で φ が論理式のとき，$\mathcal{D}+\mathcal{E}$ および $\mathcal{D}+\varphi$ も図形であると定めます．ここで，$\mathcal{D}+\mathcal{E}$ は図形 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ を統合した図形，$\mathcal{D}+\varphi$ は，図形 $\mathcal{D}$ に論理式 φ の情報を加えてできる図形を表します．

  具体的なシステムによっては，おもにそのシステムの表現力に応じて，$+$ 演算はすべての図形に対して定義されるとは限りません．つまり，$\mathcal{D}+\mathcal{E}$ が図形にならない（例えば $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ が矛盾していて統合できない等）という場合も起こりえます．ここでは，$+$ 演算はすべての図形に対して定義されるとし，$\mathcal{D}+\mathcal{E}$ が本来図形でない場合には，$*$ という記号で表すことにします．

- 推論規則は以下のように定義されます．

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \mathcal{D} & \alpha\end{matrix}}{\mathcal{D}+\alpha}\ (+) \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \mathcal{D}\end{matrix}}{\alpha}\ (-)$$

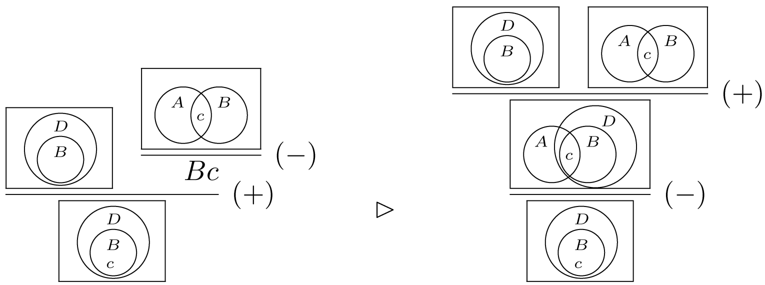
ここで，α は図形もしくは論理式です．α が図形 $\mathcal{E}$ のとき，$+$ 規則は図形 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ を統合して図形 $\mathcal{D}+\mathcal{E}$ を構成できることを表し，$-$ 規則は図形 $\mathcal{D}$ から適当な図形的対象を除去して部分図形 $\mathcal{E}$ が得られることを表します．（もちろん厳密には $\mathcal{E}$ は $\mathcal{D}$ の部分図形でなければなりません．）また，α が論理式 φ のときには，$+$ 規則は図形 $\mathcal{D}$ に φ の情報を加えて図形 $\mathcal{D}+\varphi$ を構成できることを表し，$-$ 規則は図形 $\mathcal{D}$ から φ という情報を読み取れることを表します．（厳密には φ という情報が $\mathcal{D}$ に含まれていなければなりません．）

図形は一般に，そこに含まれる情報の集合として見なすことができ，したがって論理式の集合（連言）に翻訳することができます．また，そのように論理式の集合として見た場合の図形は，演繹に関して閉じているものとします．すなわち，φ という情報が図形 $\mathcal{D}$ から読み取れ，φ が ψ を含意するときには，ψ という情報も $\mathcal{D}$ から直接読み取れるものとします．（これが図形表現のもつもっとも特徴的な性質のひとつで，通常のオイラー図やヴェン図等はこの性質をもっています．）このような観点からは，$+$ 規則は連言 $\wedge$ 導入規則の一般化であり，$-$ 規則は $\wedge$ 除去規則の一般化とみなすことができます．

通常の述語論理の自然演繹に基づく証明は一般に，極大論理式と呼ばれる余分な論理式とそれに関わる余分な推論ステップを含んでいます．そのような余分な極大論理式と余分なステップは，証明における「回り道」と呼ばれ，それを取り除いて回り道を含まない正規形の証明に書き換えることができます．そのような書き換え規則を簡約規則と呼びます．通常

の自然演繹における簡約規則は，双対な推論規則のペアに対して定義されます．われわれのヘテロジニアスシステムにおける双対ペアは，+ と – です．図形を論理式に翻訳して，通常の自然演繹の簡約規則を適用することも可能ですが，その結果として得られる「正規形」証明は，図形推論の特徴を反映しているとは言えないものとなってしまいます．（Proof theory for reasoning with Euler diagrams: a Logic Translation and Normalization, Ryo Takemura, *Studia Logica*, Springer, Volume 101, Issue 1, 157–191, 2013. を参照.）ここでは，そのような方法をとらずに，図形推論の特徴を考えたときに，何が簡約規則となりうるかを考えたいと思います．

そこで，何が図形証明における「回り道」かを考えてみると，（前提等に）与えられている図形や論理式を直接統合することで得られる結論を，あえてそこに含まれる情報を一度引き出してから統合して結論を読み取るような部分と考えられます．例えば，以下の例では，*Bc* と –・+ 規則のペアが回り道だと考えられます．なぜなら，*Bc* という情報はすでに – 規則を適用する前の図形に含まれており，あえて *Bc* を導出せずとも，同じ結論を直接 2 つの前提となる図形を統合することで得られるからです．



これを一般化すると以下のような簡約規則が得られます.

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\; u\\ \mathcal{E}\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\; t\\ \dfrac{\mathcal{D}}{\varphi}\,(-)\\ \vdots\; s\\ \psi\end{array}}{\mathcal{E}+\psi}\,(+) \quad\rhd\quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\; u\\ \mathcal{E}\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\; t\\ \mathcal{D}\end{array}}{\mathcal{E}+\mathcal{D}}\,(+)}{\mathcal{E}+\psi}\,(-)
$$

$$
+(u,s[x^{\varphi}:=-(t)]) \;\rhd\; -(+(u,t))
$$

すなわち，ψ が φ のみに依存するとき（つまり $\varphi\vdash\psi$ が成り立つとき），φ,ψ およびその導出過程に現れる図形・論理式はすべて余分な図形・論理式となります．なぜなら，われわれの図形は演繹に関して閉じており，φ や ψ を導出しなくても，$\mathcal{E}+\psi$ を直接 $\mathcal{E}$ と $\mathcal{D}$ を統合することで得ることができるからです.

ここで，単純な「証明の長さ」という観点からは，とくに先の例では簡約前の「回り道」を含む証明と簡約後の「回り道」を含まない証明では同一の長さとなっており，必ずしも証明の長さが短くなるわけではありません．しかしながら，このことは通常の自然演繹にも当てはまることであり，簡約後の正規形証明の概念は通常の自然演繹に対しても，概念的な「回り道」の無さによって特徴づけられるのであり，それは必ずしも単純な証明の短さを意味するものではありません．「回り道」を含まない正規形の証明が元の非正規形の証明よりも長くなることは一般には起こりえることです.

上の規則はまだ曖昧さを含み，またさらに一般化する必要がありますが，一般化するとかなり複雑になるので，ここではこれ以上は説明しません．そのような一般化した簡約規則に基づいて，ヘテロジニアスシステムの正規化定理も，従来の述語論理の正規化定理と同じように証明できます.

述語論理の自然演繹は，各論理結合子に対する導入規則と除去規則のペ

アから成ります．われわれのヘテロジニアスシステムも，図形の導入規則 $+$ と除去規則 $-$ から成り，$+$ は $\wedge$ 導入規則の一般化，$-$ は $\wedge$ 除去規則の一般化と見なすことができます．この観点から簡約規則について考えてみると，述語論理における簡約規則は，導入・除去規則のペアに対して定義されるのに対して，ヘテロジニアスシステムにおける簡約規則は，除去・導入規則のペアに対して定義されることになります．

述語論理の正規形証明は，証明の上から，除去規則の適用の連続と，それに続く導入規則の適用の連続から成り，したがって，与えられた前提の分解とそれらに基づく結論の構成から成ることが示されます．それに対して，図形的証明は，導入規則の適用の連続と，それに続く除去規則の適用の連続から成り，したがって，与えられた前提に含まれる情報を統合して極大図形を構成し，そこから結論を読み取るという形をしていることが示されます．また，正規化定理の帰結として，述語論理では部分論理式性が得られるのに対して，ヘテロジニアスシステムでは証明図中に極大図形が現れるという極大図形性が得られます．

以上のように，文・記号を用いた推論（通常の論理式に対する自然演繹証明）と，図形表現を用いた推論（図形に対する自然演繹証明）の間には，種々の双対性が成り立ちます．この双対性の意味するところに関してはさらに考察が必要です．