Title	竹内の整礎性証明再訪
Sub Title	Takeuti's well-ordering proofs revisited Takeuti's well-foundedness arguments revisited
Author	秋吉, 亮太(Akiyoshi, Ryōta) Arana, Andrew
Publisher	三田哲學會
Publication year	2021
Jtitle	哲學 (Philosophy). No.146 (2021. 3) ,p.83- 110
JaLC DOI	
Abstract	Gaisi Takeuti extended Gentzen's work to higher-order case in 1950's–1960's and proved the consistency of impredicative subsystems of analysis. He has been chiefly known as a successor of Hilbert's school, but we pointed out in the previous paper that Takeuti's aimed to investigate the relationships between "minds" by carrying out his proof-theoretic project rather than proving the "reliability" of such impredicative subsystems of analysis. Moreover, as briefly explained there, his philosophical ideas can be traced back to Nishida's philosophy in Kyoto's school. For the proving the consistency of such systems, it is crucial to prove the well-foundedness of ordinals called "ordinal diagrams" developed for it. Takeuti presented such arguments several times in order to show that they are admitted in his stand point. As a starting point of investigating his finitist stand point, we formulate the system of ordinal notations up to ε0 and reconstruct the well-foundedness arguments of them.
Notes	特集 : 岡田光弘教授 退職記念号 原著研究論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000146-0083

竹内の整礎性証明再訪

秋吉亮太*，アンドリュー・アラナ**,***

Takeuti's Well-ordering Proofs Revisited

Ryota Akiyoshi and Andrew Arana

Gaisi Takeuti extended Gentzen's work to higher-order case in 1950's–1960's and proved the consistency of impredicative subsystems of analysis. He has been chiefly known as a successor of Hilbert's school, but we pointed out in the previous paper that Takeuti's aimed to investigate the relationships between "minds" by carrying out his proof-theoretic project rather than proving the "reliability" of such impredicative subsystems of analysis. Moreover, as briefly explained there, his philosophical ideas can be traced back to Nishida's philosophy in Kyoto's school.

For the proving the consistency of such systems, it is crucial to prove the well-foundedness of ordinals called "ordinal diagrams" developed for it. Takeuti presented such arguments several times in order to show that they are admitted in his stand point. As a starting point of investigating his finitist stand point, we formulate the system of ordinal notations up to ε_0 and reconstruct the well-foundedness arguments of them.

* 早稲田大学高等研究所・招聘研究員
** Université de Lorraine, département de philosophie, Professeur
*** 筆頭著者は KAKENHI 19K00022 と拠点形成事業（A. 先端拠点形成型）の支援を受けている．マーク・ファン・アッテン，出口康夫，チュアンジー・キューの有益なコメントに深く感謝する．また，構成的数学や証明論の研究をしているミュンヘン大学数学科の研究者たちからの重要なフィードバックは，この論文を仕上げる上で非常に参考になった．本論文の元になった草稿の大部分は，2018 年 9 月と 2019 年 2 月にミュンヘン大学を訪問した際に書かれた．彼らのホスピタリティに感謝する．

1. 序

ヒルベルトのプログラムは，数学を形式化した後にその無矛盾性を有限の立場で証明することによって基礎付けることを目的としていた．よく知られているように，ゲーデルの不完全性定理は，算術の無矛盾性を証明するためにはヒルベルトの立場を拡張しなければならないことを示した．ヒルベルトの学生であったゲンツェンは，1932 年には算術の無矛盾性証明に着手して，1936 年に ペアノ算術 (*PA*) の無矛盾性証明を，ε_0 までの超限帰納法をヒルベルトの立場に付け加えることによって与えた．さらに，ε_0 が *PA* の無矛盾性を証明するための最小の順序数であることを，ε_0 より真に小さい任意の順序数に対する超限帰納法が *PA* で導出可能であることを示すことで証明した [6]．しかしながら，*PA* の無矛盾性問題がゲンツェンによって解決されたといえるには，少なくとも二つの哲学的な問題が残っている．(1) ω^ω を超える順序数に対する超限帰納法はヒルベルトの有限の立場には収まらないため，そのステータスをどのように位置づけるのか．(2) この原理がゲンツェンの立場に収まるものだとしても，著作において明確に提示されているわけではない．ではそれはいかなるものであるのか（ないしはありうるのか）．

ゲンツェンの仕事を高階の場合に拡張して，1950–1960 年代に目覚しい成果を上げたのが竹内外史であった．まず，高階の式計算体系 *GLC* (“Generalized Logic Calculus”) を定式化して，この体系にゲンツェンのカット消去定理が成立することを予想した（竹内予想，[12]）．また，解析学の無矛盾性がこの予想から従うことも示した．1950 年代になってからは竹内予想の部分解を矢継ぎ早に出版しており, 特に 1958 年には（*GLC* の二階部分に相当する）G^1LC の非可述な部分体系で，現在の用語では $(\Pi^1_1\text{-}CA)_0$ に対応する体系の無矛盾性証明を与えた [14]．この画期的な結果のために，ε_0 よりも遥かに大きな順序数の体系 (ordinal diagrams) が，カット消去プロセスを抽象する事で定式化された [13] . 1960 年にはこの順序数の体系

はさらに拡張されて [15]，現代の用語でいえば $(\Pi^1_1\text{-}CA)_0$ よりも強い体系である $\Pi^1_1\text{-}CA+BI$ の 無矛盾性証明に用いられた [16].

無矛盾性証明においてキーとなるのは，適切に定義されたカット消去ステップが停止することの証明である．というのも，当該の体系の無矛盾性は，カット消去ステップが停止することで得られる標準形の証明図を調べることによって示されるからである．カット消去ステップが停止することを示すには，まずある証明図を他の証明図へと変形する際に適切な順序数を割り当てて，それらが減少していくことを示さなければならない．そして，もしその順序数の体系が整礎であれば，つまり無限減少列が存在しないのであれば，そのカット消去ステップは停止する．このように，順序数の体系の整礎性証明は，無矛盾性証明において非常に重要な役割を担っているといえる．

竹内は ordinal diagrams の整礎性証明を何度も与えている．最初の証明はこれが導入された論文 [13] で提出されており，この証明は集合論的な原理を用いていた．これは哲学的な観点からは不満足であったと思われる．竹内は何度も整礎性証明を与えており，たとえば ε_0 のケースについては代表的な著作 *Proof Theory* で詳細に扱っている [17, 18]．よって，ε_0 のケースが，彼の哲学的立場を説明するためには簡明な出発点であったことはほぼ明らかであろう．竹内がこのケースをずっと大きな順序数である ordinal diagrams へと拡張することを意図していたことがテキストから読み取れるが，非常にコンパクトに書かれているため，議論を追うことは ε_0 の場合でさえも容易ではない．この議論に焦点を当てる研究はほぼ存在せず，唯一の例外である [3] では $<\omega^2$ までの非常に弱い断片のみが扱われている．以上のような背景の元で，本稿では竹内の整礎性証明全体を再構成することを目的とする．

論文の構成は以下の通りである．まず，次の節で竹内の著作 [24, 22, 18] に登場する ε_0 までの順序数に関する議論を簡単にまとめた後で，順序数

記法の体系を定義する（3 節）．本稿ではシュッテやブフホルツのアプローチを応用する [2, 9]．ここでは竹内の著作 [24, 22, 18] に関する歴史的なリマークもいくつか与える．第 4 節では竹内の整礎性証明を二つ再構成する．一つ目は到達可能性の概念を用いた簡明なものであり（4.1 節），二つ目はエリミネーターの概念を用いた証明である（4.2 節）．最後に 5 節では今後の課題を述べる．

2.　竹内の整礎性証明の歴史的な背景

この節では ε_0 までの順序数の整礎性証明の歴史的な背景を述べる．有限の立場においては順序数は集合論的に定義されてはならず，その「記法」(notation) やこうした対象に関する有限的な操作のみが認められる．以下でも述べるように竹内は順序数記法の有限的な体系を詳しく展開しているわけではないので，第 3 節でこれを正確に定式化する．

竹内の有限主義に関する説明は，キャリアの最初期である 40 年代から晩年まで概ね首尾一貫していたといえる．最初期の論文である「数学の基礎について」[23] においては，数学基礎論の当時の状況に関する彼の理解がまとめられている．そこでは，ラッセルのパラドクスやブラリ = フォルティのパラドックスが数学的な対象（たとえばある条件を満足するモノ全体やある集合上に定義された関数全体）を自由に扱うことの結果として登場してきたと述べられている．そして，いかなるときにこれらの対象について自由に考えていいのだろうか，と問う．竹内の答えはシンプルに，もし目の前にある有限的な対象に関してのみ議論するのであれば問題ないだろう，というものである．ただし，有限的な対象のみしか認めないのであれば証明論を展開することはほぼ不可能である．したがって，無限に多くの対象を有限的に扱う必要がでてくるわけである．

では有限的な手法とはどのようなものか．竹内によると帰納的な手法こそが「最も純粋な」ものであり，帰納的に定義された対象に関する帰納的

な操作が許される．ここで興味深いのは，竹内はヒルベルトとは違って，有限の立場が最も安全であることをそれほど強調していない点である．以前の論文でスケッチしたように，竹内にとっては数学基礎論のゴールはすべての数学を唯一の「最も安全な」立場へと還元することではなくて，彼の言葉遣いでいうところの様々な「mind」の間の関係を探求することであった [1].「mind」というタームは 1970 年代になってゲーデルの影響によって登場したものであるが，この点を除けば，こうした立場の表明は 1950 年代やさらに後の著作にも見出せるものである [24, 22, 17, 18].

竹内の有限の立場のアウトラインを素描してみよう．ここでは，著作 *Proof Theory* [18] における説明を取り上げる．竹内によると，

> There is no doubt that Hilbert's "finitist standpoint" which considers only a finite number of symbols concretely given and arguments concretely given about finite sequences of these symbols (called expressions) is an ideal standpoint in proving consistency. ([18, p. 86–87])

したがって，この立場においては表現の集合 $\mathscr{D}$ が，最初から認められている記号 $a_0,\ldots,a_n$ とこれらに関する具体的な (concrete) 操作 $f_1,\ldots,f_j$ から生成される．

(0) The alphabet consists of $\{a_0,\ldots,a_n\}$,

(1) $a_0,\ldots,a_n$ are in $\mathscr{D}$,

(2) If $x_1,\ldots,x_m$ are in $\mathscr{D}$, then $f_i(x_1,\ldots,x_{k_i})$ is in $\mathscr{D}$ ($i = 1,\ldots,j$).

(3) $\mathscr{D}$ consists of only these objects (expressions) obtained by (1) and (2). ([18, p. 87])

竹内はこれを $\mathscr{D}$ の「帰納的な (recursive) 定義」と呼ぶ．ここで「具体的」(concrete) とはどのようなことを意味しているのか，疑問に思う人がいるかもしれない．テキストから読み取れるのは，$\mathscr{D}$ 上で定義された計算可能

な関数や操作といったものは問題なく認めることができて，順序数記法の体系は確かにこのような形で展開できるということである[1]．本稿の目的は ε_0 までの順序数記法の整礎性を再構成することであるから，この問題についてはひとまず脇においておく．

表現の集合 $\mathscr{D}$ が定義されれば，この集合上で定義される帰納法が自然に認められる．

(1) Prove that $A(a_1), \ldots, A(a_n)$ hold.

(2) Assuming $A(x_1), \ldots, A(x_k)$ hold for a property A and $x_1, \ldots, x_k$ in $\mathscr{D}$, show that

$$A(f_1(x_1, \ldots, x_{k_1})), \ldots, A(f_j(x_1, \ldots, x_{k_j}))$$

hold.

(3) Then, we can conclude that $A(x)$ holds for all x in $\mathscr{D}$. ([18, p. 87])

竹内はこの原理が認められることを次のようにして説明する．まず，(1) と (2) を仮定して $\mathscr{D}$ の要素 x を考えると，x は帰納的に定義されていることからその構成プロセスが存在するはずである．したがって，この構成プロセスに沿って (1) と (2) を次々と適用することで性質 $A(x)$ が示される．竹内はこのことを次のように述べる．

> According to this viewpoint, we can regard “induction” simply as a general statement of a concrete method of proof applicable for any given expression x, and not as an axiom that is accepted a priori. [18, p. 87]

上で述べたような手法によって順序数記法の体系を展開することができれば，問題なく有限的であると認められることになる．他方で，順序数記法の体系の正確な定式化については，示唆されているものの詳しく展開されているわけではない．たとえば次のパッセージを見ればこのことがわか

るだろう．

> We can now define the relations $=$ and $<$ on ordinals so that they match the notions of equality and the natural ordering of ordinals which we know from set theory, and develop the theory of ordinals for these relations within the purely finitist standpoint. We can actually inductively define $=, <, +$ and $\times$ simultaneously so that they satisfy the following [18, p. 90].

この節を終えるまえに日本語による著作『数学基礎論』[24] に言及しておく．この著作は初版が 1956 年に出版されており，ε_0 までの順序数記法の体系がある程度詳しく展開されている．そして，この箇所は増補改訂版である『証明論入門』 [22]（1988 年）まで保存されていることから，順序数記法の体系に関する考えが首尾一貫していたといえる．しかしながら，幾つかの点が十分に展開されておらず記号に関する混乱も見られる．たとえば等号記号 $a = b$ が次の二つを（区別することなしに）意味しているようにみえる．(1) a と b が記号として同一であること，(ii) a と b が指す対象が同一であること．この点を補うためにも，ε_0 までの順序数記法の体系を次の節で定式化する．

3.　ε_0 までの順序数記法の体系

この節では ε_0 までの順序数記法の体系を定義する．ここでのアプローチはシュッテとブフホルツによるものである [9, 2][2]．このアプローチを採用する理由は，（以下でも述べるように）竹内のものと比較的近い体系であり，さらに順序数記法同士の順序関係や等号関係がコンパクトで正確に定義されるため，整礎性証明を再構成するベースとして適しているからである．

なお，以下では竹内の定義やアイディアとの相似性や差異についても簡単に説明する．

定義 1. 順序数記法の集合 $\mathscr{O}$ を次のように定義する．以下では $\alpha : \mathscr{O}$ は「α は順序数記法のあつまり $\mathscr{O}$ に属する」ことを意味する．

1. $0 : \mathscr{O}$,
2. $\alpha_0 : \mathscr{O} \Rightarrow \omega^{\alpha_0} : \mathscr{O}$．これは「単項」(singular) と呼ばれる．
3. もし $\alpha_0 : \mathscr{O}, \dots, \alpha_n : \mathscr{O}$ が単項であるならば，$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) : \mathscr{O}$．また，$(\alpha) := \alpha$ とおく．

例 1. $\omega^0, \omega^{\omega^0}, (\omega^0, \omega^{\omega^0})$ は単項であるが，0 や (0,0) はそうではない，また，((0,0),0) は $\mathscr{O}$ に属さない．

注意． 操作 (α_0, α_1) は直観的には $\alpha + \alpha_2$ を意味している（ここで + は加法の操作）．また，竹内は 0 ではない形のすべての項が $\alpha_0+, \dots, +\alpha_n$（ただし，各々の α_i $(0 \leq i \leq n)$ は単項）の形で書けることを補題として述べている（『証明論入門』[22, p. 17]）．この補題は上の定義に組み込まれている．

注意． *Proof Theory* との関係性についても述べておこう．上の定義は同書の [18, p. 90] とほぼ同じである．

O1 0 is an ordinal.

O2 Let μ and $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ be ordinals. Then $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$ and ω^μ are ordinals.

O3 Only those objects obtained by $O1$ and $O2$ are ordinals.

次に順序数記法同士の順序関係を定義する（定義 2）．この順序関係を用いることで，カントール標準形になっているような順序数記法のあつまりを定義することができる（定義 3）．以下の定義で = は統語論的な同一性を意味することにする．すなわち，$\alpha = \beta$ はこれらが記号として同一であることを意味する．

定義 2. 関係 $\alpha < \beta$ を帰納的に定義する.

1. $\alpha \neq 0 \Rightarrow 0 < \alpha$.
2. $\alpha_0 < \beta_0 \Rightarrow \omega^{\alpha_0} < \omega^{\beta_0}$.
3. $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ かつ $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$;
   (a) $n < m$ かつ $\alpha_i = \beta_i$ for $i \leq n \Rightarrow \alpha < \beta$,
   (b) $\alpha_k < \beta_k$ が成り立ち，かつすべての $i < k$ について $\alpha_i = \beta_i$ を満たすような $k \leq \min\{n, m\}$ が存在する
   $\Rightarrow \alpha < \beta$.

例 2. $0 < \omega^0$ が 1 から帰結する．よって，2 から $\omega^0 < \omega^{\omega^0}$. 3(a) は α が β の真な始切片であることを意味している．たとえば，$\omega^0 < (\omega^0, \omega^{\omega^0})$. 3(b) は $\alpha_k < \beta_k$ となる最小の k が見つかれば $\alpha < \beta$ となることを意味する．たとえば，$(\omega^0, \omega^0, \omega^0) < (\omega^0, \omega^0, \omega^{\omega^0})$.

注意． この順序関係の定義は竹内が『証明論入門』[22] で与えている定義と非常に近い．*Proof Theory* では詳細な定義は与えられておらず，本稿では $+, \times$ を別立てに定義するために同書のアプローチとは違っているが，（後述するように）そこで主張されている性質はすべて成り立つ．このように順序数記法の体系を厳密に展開するには様々な配慮が必要であり，最近の研究については次を参照されたい [5].

$<$ が線形順序であることが証明できる（証明は省略する）.

補題 1. $<$ is a linear order on $\mathcal{O}$.

注意． ここで竹内のテキストとの対応を述べておこう.『証明論入門』[22, p. 17] では，順序関係や等号 $<, =$ が線形順序であることが主張されている．そして，次のような性質を満たすことも述べられている.

1. $\alpha = \alpha$,
2. $\alpha = \beta \to \beta = \alpha$,
3. $\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \to \alpha = \gamma$,
4. $\alpha = \beta \wedge \gamma = \delta \wedge \alpha < \gamma \to \beta < \delta$,
5. $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \to \alpha < \gamma$,
6. $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha$,
7. $\neg(\alpha < \beta \wedge \alpha = \beta)$,
8. $\neg(\alpha < \beta \wedge \beta < \alpha)$.

テキストを忠実に読む限り，これらの性質を $<, =$ を定義するのと同時に示そうとしているように思える．しかしながら，こうした議論が実際にどのようなものであるのか，また，それが本当に必要であるかは著者には定かではない．

本稿のアプローチでこれらの性質が満たされることを確認しておこう．1 から 4 が成り立つことは $=$ を統語論的な同一性として考えれば明らかである．5 と 6 が成り立つことは補題 1 からわかる．最後の二つについては $\neg(\alpha < \alpha)$ から従う（この事実は α に関する帰納法で示すことができる）．

順序数記法の体系を展開するにあたってはカントール標準形の概念が重要であるが，$\mathcal{O}$ の部分集合でカントール標準形になっているものを集めた $\mathcal{O}_0$ が定義できる．

以下では $\alpha \leq \beta$ は $\alpha < \beta$ ないしは $\alpha = \beta$ を意味しており，$\alpha \geq \beta$ は $\beta \leq \alpha$ を意味していることとする．

定義 3. $\mathcal{O}$ の部分集合である $\mathcal{O}_0$ を次のように定義する．

1. $0 : \mathcal{O}_0$,
2. $\alpha_0 : \mathcal{O}_0 \Rightarrow \omega^{\alpha_0} : \mathcal{O}_0$,
3. $\alpha_0 : \mathcal{O}_0, \ldots, \alpha_n : \mathcal{O}_0$ が単項で $\alpha_0 \geq, \ldots, \geq \alpha_n$

$\Rightarrow (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) : \mathcal{O}_0.$

今や定義 2 の意図は明らかであろう．カントール標準形になっているような順序数記法のあつまりを定義するために順序関係 $\geq$ が必要だったのである．これからは順序数記法ということで $\mathcal{O}_0$ のみを考えることにする．

$\mathcal{O}_0$ 上の操作 $+, \times$ を定義する．ここでの定義はシュッテの [9] に従っているが，実は竹内のもの [22] と同じである．

定義 4.　$\mathcal{O}_0$ 上の操作 $+, \times$ を以下のように定義する．

1. $\alpha + 0 := 0 + \alpha := 0.$
2. $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ かつ $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$;
   (a) $\alpha_0 < \beta_0; \alpha + \beta := \beta,$
   (b) k は $\beta_0 \leq \alpha_k \leq n$ となるような最大のインデックス；
   $\alpha + \beta := (\alpha_0, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \ldots, \beta_m).$
3. $\alpha \times 0 := 0,$
4. $\alpha \times (n+1) := \alpha \times n + \alpha.$

証明は略すが次の自然な性質が $+$ について成立する．

補題 2.　$+$ について次の性質が成り立つ．

1. $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma,$
2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$

4.　竹内の整礎性証明

この節では竹内の整礎性証明を二つ再構成するが，その前に歴史的な背景について簡単にまとめておく．

1956 年に出版された『数学基礎論』[24] では，ε_0 までの順序数記法の

体系が定式化されて，ゲンツェンのアイディア [6] に従う形で ε_0 までの超限帰納法が示されている．前に指摘したようにここでの定式化には不正確な部分もあるが，他方で，1988 年に増補改訂版として出版された『証明論入門』[22] まで保存されている部分でもあり，竹内がその重要性を長年に渡って認めていたことがわかる．なお，ε_0 までの超限帰納法の証明は，「単調に減少する（ε_0 までの）順序数の下降列は存在しない」という定理を含意するとも述べている [22, pp.24–25] [3].

1975 年に初版が出版された *Proof Theory* [17] では，単調に減少する（ε_0 までの）順序数の下降列は存在しないことを「エリミネーター」という概念を導入して証明する議論が提示されている．この議論が 1987 年の第二版 [18] まで保存されていることから竹内にとって重要であったことがわかるが，他方で，ここには議論の余地があるいくつかの点が含まれている．

第一に，「単調に減少する（ε_0 までの）順序数の下降列は存在しない」という言明の正確な定式化が与えられてはいない．順序数の列とは順序数「記法」の列のことなので，（各々の順序数記法を自然数とみなしてしまえば）自然数から自然数への関数だと考えるのが自然であろう．また，自然数から自然数への関数全体を考えることは非加算無限個の対象を想定することになり，竹内の有限主義的な立場が一種の構成主義的な立場であることと齟齬をきたす可能性がある．

第二に，竹内の証明は非常にコンパクトに書かれていて見通しづらく，さらにどの部分がヒルベルトの立場を超えているのかがわかりづらい．

以上のような背景を踏まえて本稿ではエリミネーターを用いた議論を再構成するが，その前に *Proof Theory* [17] で提示されている到達可能性を使った簡明な証明を整理しておく．

4.1. 到達可能性を用いた証明

竹内は *Proof Theory* で ε_0 が「到達可能」であることを示す議論を展開している．ゲンツェンに従って，μ が「到達可能」であることを次のように

定義する

> it has been demonstrated that every strictly decreasing sequence starting with μ is finite. More precisely, we consider the notion of accessibility only when we have actually seen, or demonstrated constructively, that a given ordinal is accessible. [18, p.98]

以下で我々はこの議論をスケッチしよう．

ここで重要なのは，順序数をカントール標準形で表現できるという定理である．つまり，すべての 0 ではない順序数 α は

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot v_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot v_2 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot v_k$$

という形で一意に書くことができる（ただし，$v_1, \ldots, v_k \in \omega$ かつ $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$）この定理の証明で重要なのは次の命題である ([20, Theorem 8.27]).

命題 1.　任意の順序数 $\alpha, \beta \neq 0$ について，次を満たす γ と δ が一意に存在する：$\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ かつ $\delta < \beta$.

ε_0 以下の順序数（記法の）体系は初等算術で展開することができて，さらに弱い算術 $I\Delta_0$ で十分であることが知られている [10].

次の補題は竹内の到達可能性の証明を再構成するのに有用である．

補題 3.　$\mu \leq \xi < \nu$ となる順序数 μ, ξ, ν が与えられた時，$\nu_0 < \nu$ かつ $\xi = \mu + \nu_0$ となる ν_0 が存在する．

この補題の証明は有限の立場で実行可能であり，これはカントール標準形の定理と順序数記法の体系が初等的に展開できることに基づく．

竹内はいくつかの補題を準備することで，ε_0 までの到達可能性の証明を与えている．

補題 4.　μ と ν が到達可能ならば，$\mu + \nu$ も到達可能である．

証明. $\mu_0 < \mu + \nu$ となる μ_0 を固定する．もし $\mu_0 \leq \mu$ であれば，μ が到達可能であるから補題は示されたことになる．よって $\mu < \mu_0$ と仮定する．すると，$\mu < \mu_0 < \mu + \nu$ なので補題 3 を適用して，$\mu_0 = \mu + \nu_0$ となる $\nu_0 < \mu + \nu$ が存在することになる．従って $\mu_0 = \mu + \nu_0 < \mu + \nu$ となり，$\nu_0 < \nu$ を得る．ν が到達可能であることから ν_0 も到達可能である．以後はこのプロセスを $\mu + \nu$ より小さい減少列に対して適用することを考える．次のステップを μ_1 だとしてみよう．上と同様の論法で $\mu_1 = \mu + \nu_1$ かつ $\nu_1 < \nu_0$ となる ν_1 が存在する．さらにふたたび $\mu_2 < \mu_1$ となる μ_2 を考えることで，$\mu_2 = \mu + \nu_2$ かつ $\nu_2 < \nu_1$ となる ν_2 が存在する．ここで ν_0 が到達可能であったので，この ν_i を見つけるプロセスは有限で止まる．よって，$\mu_m < \mu$ となる μ_m が見つかる．ここで μ は到達可能であったので，μ_m より小さい減少列は有限である．したがって，$\mu + \nu$ から始まる真に減少する列は有限で止まる．□

同様にして，もし μ が到達可能であれば，$\mu \cdot \omega$ や ω_k が（任意の k について）到達可能であることが示せる．この補題 4 を拡張するために n-到達可能性という概念が帰納的に定義される．まず，μ が到達可能であれば 1-到達可能でもある．次に，任意の n-到達可能な ν について $\nu \cdot \omega^{\mu}$ が n-到達可能ならば，μ は $(n+1)$-到達可能であると定義される．そして，この準備の元で次の補題を証明している．

補題 5. もし μ が n-到達可能で $\nu < \mu$ であるならば，ν は n-到達可能である．

補題 6. $\{\mu_m\}$ は μ をその極限としてもつ順序数の上昇列とする．もし各々の μ_m が n-到達可能であれば，μ も n-到達可能である．

これらの補題を用いることで $\omega^{\omega^{\mu}}, \omega^{\omega^{\mu}}$ といった順序数が n-到達可能であることが示される．

補題 7. もし ν が $(n+1)$-到達可能であるならば，$\nu \cdot \omega$ も $(n+1)$-到達可能である．

証明. これを証明するには，各々の n-到達可能な μ について $\mu \cdot \omega^{\nu \cdot \omega}$ が n-到達可能であることを示す必要がある．ω は極限順序数なので，前の補題から $\mu \cdot \omega^{\nu \cdot m}$ がすべての m について n-到達可能であることを示せば良い．しかしながらこれは，$\mu \cdot \omega^{\nu \cdot m} = \mu \cdot (\omega^{\nu})^m = \mu \cdot \omega^{\nu} \cdots \omega^{\nu}$ が成り立つことから従う．□

定理 1. ε_0 は到達可能である．

証明. まず，n についての数学的帰納法を用いて $\omega_0 = 1, \omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$ と定義する．次に，k についての数学的帰納法によって，ω_k が $n > k$ となる n について $(n-k)$-到達可能であることがわかる．これの特別な場合として，すべての k について ω_k が到達可能である．よって，ε_0 は到達可能である．□

4.2. エリミネーターを用いた証明

この節ではエリミネーターを用いた証明を再構成する．

定義 5. 順序数の列 $\alpha_0, \alpha_2, \ldots$ は $\mathscr{N}$ から $\mathscr{O}$ への計算可能な関数 f を意味する．

注意 . 上記の計算可能な関数への制限は，証明論の文脈ではこうした列のみが考慮されているため，本質的ではない．

さて，次に順序数の真に減少する列という概念を定義しよう．この定義はチュアンジー・キューによる[4],

定義 6. 順序数の減少列 f が真に減少するのは次が成り立つ時である．

$$\forall i (f(i) > f(i+1) \lor f(i) = f(i+1) = 0)$$

注意． この定義の意図を簡単に説明しよう．最初の選言肢は，基本的には，考慮されている列が厳密に減少していること，つまり，$f(0) > f(1), \ldots$ を意味している．しかし，$f(0) > f(1) >, \ldots, 0, 0, 0, \ldots$ のように，ある点で列が 0 に達し，それ以降の値が常に 0 である場合がある．これは 2 番目の選言肢によって捉えられる．重要なことは，整礎でその非存在を反証しようとしている順序数の無限減少列を考慮する必要がないということである．

定義 7. 順序数の真に減少する列 f が有限ステップで止まる（ないしは整礎である）のは，$f(n) = 0$ を満たすような自然数 n が存在するときである．

注意． 厳密に減少して 0 に等しくなる順序数列 f が有限ステップで終わる，すなわち，$f(n) = 0$ となるような n が存在するとしよう．このとき，定義 6 により，$f(n) = f(n+1) = f(n+2), \ldots$ となる．さらに，ここでは原始再帰的な順序数記法を考えているので，$f(n) = 0$ から $f(n) = f(n+1) = f(n+2), \ldots$ への含意は構成主義的な立場から問題なく許容される．

注意． ここでメタ理論について触れておく，竹内は，彼の有限の立場が形式的体系に本質的に基づいているとは考えていなかったが，そこで使われている概念を明確にするためには適切な形式言語を使用することが有益であろう．

前節で展開した ε_0 までの順序数記法の体系は，すべての順序数が自然数でコーディングされるため，逆数学での $I\Sigma_1$ のような弱い算術で形式化することが可能である．他方で，$\mathscr{N}$ から $\mathscr{O}$ への関数を表現する必要があるため，この節での定義や議論を定式化するには何らかの 2 階の理論が必要であるか，少なくともそれが適していると思われる．例えば，すべての有限型を持つ直観主義的な算術（HA^{ω} と呼ばれる）は証明論的な強さとして ε_0 を持つもので (cf. [21, 8])，この目的に適している．しかし，ε_0 まで

の順序数の整礎性証明全体をここで形式化することはできない.

定義 8. α が到達可能である（$WO(\alpha)$ と書く）のは，順序数のあらゆる真に減少する列 f について，$f(0) < \alpha$ ならば，それが有限ステップで止まる（ないしは整礎である）時である.

注意 . ここで，$\mathcal{N}$ から $\mathcal{O}$ への任意の計算可能な関数を参照しているため，$\mathcal{N}$ 上で定義された関数上の量化子が必要となる.

エリミネーターの概念を定義するためにいくつかの準備をしよう.

定義 9. $\beta = \alpha' + c$ が次を満たすとする：

- α' の中のすべての単項が $\geq \omega^{\alpha}$ かつ,
- c の中のすべての単項が $< \omega^{\alpha}$.

この α' のことをその α-主要パートという.

定義 10. 順序数の真に減少する列 $\beta_0 > \beta_1, \ldots$ が α-列であるのは，β_i の中のすべての単項が $\geq \omega^{\alpha}$ となる場合と定める.

注意 . 定義 9 と定義 10 は HA^{ω} の言語で形式化することができる．α-列の概念は算術的階層の Π^0_1-論理式で形式化可能である.

さて，キー概念であるエリミネーターを定義しよう．以下で説明するように，この概念を形式化するには量化子を用いることが不可欠である.

定義 11. (α, n)-エリミネーターを n に関する帰納法で定義する.

1. $(\alpha, 1)$-エリミネーターは，その始めの項が $< \omega^{\alpha+1}$ となるような，あらゆる真に減少する順序数の列

$$\alpha_0 > \alpha_1 \ldots.$$

に対して，α_0 の α-主要パートから始まる真に減少する順序数の α 列を作り出すような具体的な方法である：

$$b_0 > b_1 > \ldots\ldots$$

さらに，後者の列の整礎性は前者の整礎性を含意するという性質が成り立つ．

2. $(\beta,(k+1)+1)$-エリミネーターは，あらゆる $(\alpha,k+1)$-エリミネーターに対して，$(\alpha\times\omega^{\beta},k+1)$-エリミネーターを作り出す操作である．

$$(\alpha,k+1)\text{-エリミネーター} \Rightarrow (\alpha\times\omega^{\beta},k+1)\text{-エリミネーター}.$$

注意． ここで定義 11 について簡単に説明する．この定義の最初の条項を適当な言語，例えば HA^{ω} の言語で形式化するには，$\forall f B(f)$ という形式の文が必要となる．これは，厳密下降列の概念が関数記号 f をパラメータとして用いる Π^0_1 の式で形式化可能だからである．また，α-主要パートの概念は Δ^0_1-式で形式化される．最後に，$WF(f)$ で表される順序数の減少列 f の整礎性は，Σ^0_1-論理式によって形式化される．

では，$(\alpha,1)$-エリミネーターを算術の言語で書いてみるとどうなるであろうか．まず，型は $(\mathcal{N}\to\mathcal{N})\to(\mathcal{N}\to\mathcal{N})$ であり，次のように書ける：

$$\begin{aligned}&\forall f\ \bigl(f \text{ は真に減少する順序数の列} \wedge f(0)<\omega^{\alpha+1}\\&\to g(f) \text{ は真に減少する順序数の列}\\&\wedge (g(f))(0) \text{ は } f(0) \text{ の}\alpha\text{-主要パート}\\&\wedge WF(g(f)) \to WF(f)\bigr).\end{aligned}$$

したがって，$(\alpha,1)$-エリミネーターという概念は Π^0_2-論理式で書ける．

注意． フェファーマンが指摘したように，定義 11 の定式化には量化子が本質的に用いられているが，どの形式言語を用いるのが適切かは述べられていない [4]．そこで HA^{ω} の言語を用いて書いてみることにしよう．

$(\beta,(k+1)+1)$-エリミネーターの型は $(\mathcal{N}\to\mathcal{N})^{(k+1)+1}$ であり，次のよ

うな構造をしている：

$$\forall g \forall \alpha(g \text{ は } (\alpha,(k+1))\text{-エリミネーター}$$
$$\to h(g) \text{ は } (\alpha \times \omega^{\beta},(k+1))\text{-エリミネーター}).$$

例えば，$k=0$ であれば前提である $(\alpha,(k+1))$-エリミネーターの複雑さは，標準的な算術階層ではすでに Π^0_2 である．したがって，$\forall g$ を $\forall \alpha$ と同様に扱うのであれば，$(\beta,2)$-エリミネーターの複雑さはすでに Π^0_3 となる．正確な複雑さを決定することは本稿の目的にとって不可欠なものではないが，$(\beta,(k+1)+1)$-エリミネーターという概念を表現するためには，算術の言語のすべてのリースが必要であることは確かである．

補題 8. $\{\mu_m\}$ を順序数の列で，$lim\{\mu_m\}=\mu$ かつ g_m が各々の $m<\omega$ について $(\mu_m,1)$-エリミネーターであるとする．このとき，$(\mu,1)$-エリミネーターが定義可能である．

証明. ステートメントの前提を仮定する．

順序数の列 $\omega^{\mu+1}>\alpha_0>\alpha_1>,\ldots$ を考える．$(\mu,1)$-エリミネーター g をを定義するために，次のような構成を考える．

α_0 を α'_0+c の形（ただし α'_0 は μ-主要パート）で書くことにすると，α_0 は μ-主要パートなので $c<\omega^{\mu}$ が帰結する．したがって，$c<\omega^{\mu_m}$ となるような m が見つかる（ここで μ が極限であることに注意)．

$(\mu_m,1)$-エリミネーターであるような g_m を $\alpha_0>\alpha_1>,\ldots$ に適用することで，順序数の列

$$b_{10}>b_{11}>b_{12},\ldots$$

を得ることができて，$b_{10}=\alpha'_0$ が成り立っている．

ここで $b_{11}\geq\omega^{\mu}$ であると仮定する（そうでなければ構成をストップする)．上と同様の手法を適用することで，

$$b_{21}>b_{22}>,\ldots$$

を得る．

以上のプロセスを繰り返すことで，次の列が得られる

$$b_{32} > b_{33} >, \ldots$$

これまでに得られた列の最初の項をピックアップすることで μ-列を得る：

$$b_{10} > b_{21} > b_{32}, \ldots$$

この構成全体を g と呼ぼう．以下では g が $(\mu, 1)$-エリミネーターであることを示そう．先に述べた μ-列が有限であるとすると，最後の項 $b_{l+1,l} > 0$ が見つかる．上の構成の中で $b_{l+1,l}$ から始まる減少列があるはずである：

$$b_{l+1,l} > b_{l+1,l+1}, \cdots$$

すると，この列の作り方から $b_{l+1,l+1} < \omega^{\mu}$ でなければならないので，$b_{l+1,l+1} < \omega^{\mu_{m'}}$ となる m' が見つかるはずである．前提によってその存在が保証されている $g_{m'}$ をこの列 $b_{l+1,l} > b_{l+1,l+1}, \ldots$ に適用することで，別の列 $b_{l+1,l} > 0, 0, \ldots$ を得て，これが整礎であることがわかる．この列が得られることは $g_{m'}$ が $(\mu_{m'}, 1)$-エリミネーターであることによる．

最後に，これまでに得られてきた列が g_k-エリミネーターによって作り出されたことに注意しつつこれまでの構成を逆に遡ることで，最初の列 $\alpha_0 > \alpha_1, \ldots$ が整礎であることが示された．□

注意． g の構成は以下のステップからなるため，HA^{ω} で形式化することができる．まず（与えられた列の）μ-主要パートである α_0 を調べて，$c < \omega^{\mu_m}$ となるような適当な μ_m を見つける．このプロセスは順序数 α_0 を調べてそのような順序数 c と ω^{μ_m} を見つけるだけなので，再帰的である．

次に，ステートメントの前提によって列 μ_m の存在は保証されている．ここで，与えられたエリミネーター g_m を $\alpha_0 > \alpha_1 >, \ldots$ に適用する．そして，このプロセスを繰り返していく．このプロセスのことを g と呼ぶ．

g の構成が完了すると仮定すると，ステートメントの前提によってその存在が保証されている $g_{m'}$ を適用することで，さらに $b_{l+1,l} > 0, 0, \ldots$ と

いう列が見つかる．これが有限ステップで停止することから，列 $b_{l+1,l} > b_{l+1,l+1},\ldots$ もまた有限ステップで停止すると推論できる．

ここで g の構成に即して「後ろ向きに」遡ることができるのだろうかと疑問に思うかもしれない，実は，後ろ向きの帰納法は標準的な数学的帰納法から次のように簡単に導き出せる．$Wf(f)$ を，f が整礎であることを述べる式 $\exists x(f(x)=0)$ とする．

いま，f_0 が列 $\alpha_0 > \alpha_1 >,\ldots$ を表していて，$f_{m'}$ が列 $b_{l+1,l} > 0,0,\ldots$ であるような列 $f_0, f_1, \ldots, f_{m'}$ を表しているとしよう．ここで次を仮定する．

1. $WF(f_{m'})$
2. $WF(f_n) \to WF(f_{n-1})$ for all $1 \leq n \leq m'$.

（二つ目の仮定は g_n-エリミネーターの定義によって保証されている）

示すべきなのは $WF(f_0)$ である．つまり，最初の列 $\alpha_0 > \alpha_1 >,\ldots$ が整礎であることを示したい．

ここで

$$B(x) :\equiv x \leq m' \to WF(f_{(m'-x)})$$

とおく．よって上の (1) から，

$$B(0).$$

さらに，(2) によって，

$$B(y) \to B(y+1)$$

が成り立つ．（ここで y はこれまでに使っていなかった新たな自由変数とする）

したがって，数学的帰納法を用いることで，

$$B(t)$$

が任意の t についていえる．t として m' を取れば，

$$WF(f_0)$$

を得る．$WF(f)$ は f をパラメーターとしてもつ Σ^0_1-論理式であるため，この論理式に関する数学的帰納法は HA^ω に含まれている．より正確には，この論理式の複雑さまで数学的帰納法を制限した部分体系 $HA^\omega \upharpoonright \Sigma^0_1$ で十分である．

補題 9. $\{\mu_m\}$ を順序数の列で，$lim\{\mu_m\} = \mu$ となっていてかつ，各々の $m < \omega$ について g_m が $(\mu_m, n+1)$-エリミネーターであるとする．このとき，$(\mu, n+1)$-エリミネーターが定義可能である．

証明. n に関する数学的帰納法による．

$n = 0$ の場合には補題 8 を用いれば主張が成り立つ．

そうでない場合を考えよう．この補題の主張が $n = k+1$ となる k について成立しているとする（帰納法の仮定，以下 IH）

$(\mu, n+1)$-エリミネーターを定義するために，(α, n)-エリミネーター ρ が与えられているとしよう．示したいのは $(\alpha \times \omega^\beta, n)$-エリミネーターの存在である．

いま，g_m が $(\mu_m, n+1)$-エリミネーターであるから，各々の m について，$g_m(\rho)$ は $(\alpha \times \omega^{\mu_m}, n)$-エリミネーターである．$\mu = lim\{\mu_m\}_{m<\omega}$ だったので，IH をこれに適用することで $(\alpha \times \omega^\mu, n)$-エリミネーターを得る．□

注意 . 上の補題の証明で $n > 0$ の場合には，IH として $g_m(\rho)$ が $(\alpha \times \omega^{\mu_m}, n)$-エリミネーターであることが各々の $m < \omega$ について成り立つならば，$(\alpha \times \omega^\mu, n)$-エリミネーターが定義可能であることを仮定していた．ここで，(γ, l)-エリミネーターの概念を $l > 0$ の場合に形式化するには，算術的な理論の言語全体が必要であった．したがって，上の補題全体を形式化するには HA^ω のような理論が必要である．

補題 10. g が $(\mu, n+1)$-エリミネーターであると仮定する．このとき，$(\mu \times \omega, n+1)$-エリミネーターが定義可能である．

証明．補題 9 があるので，$(\mu\times m, n+1)$-エリミネーターを各々の $m<\omega$ について構成すれば十分である（ここで $\mu\times\omega$ が $\{\mu\times m\}_{m<\omega}$ の極限であることに注意）．

f を (α, n)-エリミネーターとする．すると，g が $(\mu, n+1)$-エリミネーターであることから，$g(f)$ は $(\alpha\times\omega^{\mu}, n)$-エリミネーターである．これを m 回繰り返すことによって，$(\alpha\times\omega^{\mu},\ldots,\times\omega^{\mu}, n)$-エリミネーターを得る．

ここで $\alpha\times\omega^{\mu},\ldots,\times\omega^{\mu}$（$m$-回）$=\alpha\times\omega^{\mu\times m}$ であることに注意しよう．よって主張は示された．□

補題 11.　各々の $m\geq 0$ に対して，$(1, m+1)$-エリミネーターが定義可能である．

証明.

$m=0$ の場合．このとき，$(1,1)$-エリミネーターを構成したい．しかしながら，これは $WO(\omega^2)$ を示すことと同等なので容易である．尚，$WO(\omega^2)$ はヒルベルトの有限の立場に対応する理論（たとえば $HA^{\omega}\restriction\Sigma^0_1$）で示すことができる．

$m>0$ の場合．f が任意の (α, m)-エリミネーターであるとき，補題 10 によって $(\alpha\times\omega, m)$-エリミネーターが定義可能である．このことは，$(1, m+1)$-エリミネーターが定義可能であることを意味している．よって主張は示された．□

定理 2.　すべての $\alpha=\omega_m$ に対して，(α, n)-エリミネーターが定義可能である．

証明.　m に関する数学的帰納法を用いる．

$m=0$ の場合．求めるものは $(1, n)$-エリミネーターであるが，これは，補題 11 によって定義可能である．

$m>0$ の場合．求めるものは $(\omega^{\omega_{m-1}}, n)$-エリミネーターである．$f$ を

$(1,n)$-エリミネーターとする．IH によって，$(\omega_{m-1}, n+1)$-エリミネーターが定義可能である．これに f を適用することによって，$(1\times\omega^{\omega_{m-1}}, n)$-エリミネーターを得る．□

補題 12. $(\alpha,1)$-エリミネーターが任意の α に対して定義されているとする．このとき，真に減少する順序数のあらゆる列が有限ステップで止まる．

証明．$\alpha_0 > \alpha_1,,\ldots$ となる順序数の列を考えよう．まず，$\alpha_0 < \omega^{\alpha+1}$ となる十分に大きな α がみつかる．次に，$(\alpha,1)$-エリミネーターを適用することで，各々の i について $b_i \equiv \omega^{\alpha}\times k_i$ となる列 $b_0 > b_1,\ldots...$ を得る．

いま，列 $k_0 > k_1 >,\ldots$ は有限ステップで止まるので，ここから $b_0 > b_1,\ldots...$ も有限ステップで止まることが帰結する．したがって，$(\alpha,1)$-エリミネーターの性質を用いることで，元々の列である $\alpha_0 > \alpha_1....$ も有限ステップで止まることがわかる．□

系 1. $WO(\varepsilon_0)$ が成り立つ，つまり真に減少する ε_0 以下の順序数からなるあらゆる列は有限ステップで停止する．

証明．定理 2 と補題 12 による．□

5. 結論

本稿の目的は竹内による ε_0 までの順序数記法の体系の整礎性証明を再構成して，そこで用いられている論法や概念をより明確にすることであった．とくに，この再構成によってエリミネーターを用いた証明が以前よりもクリアになったのではないだろうか．ここでこれまでの歩みを振り返ってみよう．

まず，到達可能性の概念を用いた証明を整理した．ある順序数が到達可能であるのは，その順序数から出発する真に減少するあらゆる列が有限で

あることと定義される．つまり，この概念を前提にすることで，竹内は簡明な整礎性証明を提示した．

次にエリミネーターを用いた議論を再構成した．ここでは順序数の真に減少する列の概念を HA^{ω} の言語で書くことを試みることで，エリミネーターの定義の論理的な複雑さの下界を明らかにした．また，補題 8 で用いられている後ろ向き帰納法 (backword induction) が通常の数学的帰納法によって置き換えられることを確認した．さらに，HA^{ω} の言語を用いた場合には，補題 9 は一階算術すべてのリソースを必要としていることを示した．

竹内によると，エリミネーターを用いた整礎性証明はゲンツェンの証明 [6] から読み取れるものである．『数学基礎論の世界』[25] で，竹内はゲンツェンの証明では有限の立場で実行できるということがはっきりとは示されていないと述べる．さらに，ゲンツェンのアイディアにしたがって展開した『数学基礎論』[24] における自身の証明についても同様のコメントを残している．

他方で，竹内は，順序数記法の体系の構造を丹念に調べることによって有限の立場で整礎性を示すことが可能であると述べている．本稿での試みによって，エリミネーターを用いた整礎性証明が以前よりも明確になっていれば幸いである．

次の自然なステップはこのアプローチを竹内自身によって導入された順序数記法の体系である “ordinal diagrams” に適用することである．たとえば，竹内と八杉は基本列 (fundamental sequence) の概念を導入することで，より構成的な整礎性証明を与えている [19]．エリミネーターのアイディアをこの証明に拡張することは今後の興味深い重要な課題であろう．

注

[1] 竹内は，有限の立場についての哲学的な説明を与える際にはヒルベルトとベルナイスの『数学の基礎』[7] に言及している．とくに「数学の基礎について」では第 1 巻の pp.20–30 を参照している [23, p.32].

[2] 正確に述べれば，シュッテとブフホルツによる Γ_0 までの順序数記法の体系を ε_0 までの体系として再定義した.

[3] ちなみに竹内は『数学基礎論の世界』でも同様のことを述べている [25, p.53].

[4] 2019 年 7 月のミュンヘンでの議論による.

文　　献

[1] Ryota Akiyoshi and Andrew Arana. Takeuti's proof theory in the context of the kyoto school. *Jahrbuch für Philosophie das Tetsugaku-Ronso*, Vol. 46, pp. 1–17, 2019.

[2] Wilfried Buchholz. Notation systems for infinitary derivations. *Archive for Mathematical Logic*, Vol. 30, pp. 277–296, 1991.

[3] Eamon Darnell and Aaron Thomas-Bolduc. Takeuti's well-ordering proof: Finitistically fine? In Maria Zack and Dirk Schlimm, editors, *Research in History and Philosophy of Mathematics The CSHPM 2017 Annual Meeting in Toronto*, pp. 167–180. Birkhäuser Basel, 2018.

[4] Solomon Feferman. Review: Gaisi Takeuti, proof theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 83, pp. 351–361, 1977.

[5] F. Nordvall Forsberg and Chuangjie Xu. Ordinal notations via simultaneous definitions, 2019. available at https://arxiv.org/abs/1904.10759.

[6] Gerhard Gentzen. Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfallen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, Vol. 119, pp. 140–161, 1943. English translation in [11].

[7] David Hilbert and Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik*. Springer,

Berlin, 1934–1939.

[8] Ulrich Kohlenbach. *Applied Proof Theory: Proof Interpretations and Their Use in Mathematics*. Springer, Berlin, 2008.

[9] Kurt Schütte. *Proof Theory*, Vol. 225 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, Berlin, 1977. Translated from the German by John N. Crossley.

[10] Richard Sommer. Transfinite induction within Peano arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 76, pp. 231–289, 1995.

[11] M. E. Szabo, editor. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Vol. 55 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1969.

[12] Gaisi Takeuti. On a generalized logic calculus. *Japanese Journal of Mathematics*, Vol. 23, pp. 39–96, 1953.

[13] Gaisi Takeuti. Ordinal diagrams. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Vol. 9, No. 4, pp. 386–394, 1957.

[14] Gaisi Takeuti. On the fundamental conjecture of GLC V. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Vol. 10, No. 2, pp. 121–134, 1958.

[15] Gaisi Takeuti. Ordinal diagrams II. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Vol. 12, No. 4, pp. 385–391, 1960.

[16] Gaisi Takeuti. Consistency proofs of subsystems of classical analysis. *The Annals of Mathematics*, Vol. 86, No. 2, pp. 299–348, 1967.

[17] Gaisi Takeuti. *Proof Theory*, Vol. 81 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1st edition, 1975.

[18] Gaisi Takeuti. *Proof Theory*, Vol. 81 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 2nd edition, 1987. Reissued by Dover Publications, 2013.

[19] Gaisi Takeuti and Mariko Yasugi. An accessibility proof of ordinal diagrams.

Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 33, pp. 1–21, 1981.

[20] Gaisi Takeuti and Wilson M. Zaring. *Introduction to Axiomatic Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1st edition, 1971.

[21] Anne S. Troelstra, editor. *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, Vol. 344 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1973.

[22] 竹内外史，八杉満利子．証明論入門〔数学基礎論 改題〕．共立出版，1988.

[23] 竹内外史．数学の基礎について．数学，Vol. 2, pp. 16–32, 1949–1950.

[24] 竹内外史．数学基礎論．共立出版，1956.

[25] 竹内外史．数学基礎論の世界．日本評論社，1972.