慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

| | |
|---|---|
| Title | 乗法的論理結合子の一般化と証明網について |
| Sub Title | On a generalization of multiplicative connectives and proof-nets |
| Author | 西牟田, 祐樹(Nishimuta, Yuki) |
| Publisher | 三田哲學會 |
| Publication year | 2018 |
| Jtitle | 哲學 (Philosophy). No.141 (2018. 3) ,p.29- 51 |
| JaLC DOI | |
| Abstract | This paper offers a survey of the theory of multiplicative generalized connectives, which was introduced by Danos and Regnier in 1989. Girard introduced a proof-net in (Girard, 1987). We think that one of the most important theorems in proof-net theory is the sequentialization theorem in (Girard, 1987). We think that an important open problem in generalized connective theory is an extension of the sequentialization theorem by the generalized connectives. We give a brief overview of this problem in this paper. |
| Notes | 投稿論文 |
| Genre | Journal Article |
| URL | https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000141-0029 |

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

# 乗法的論理結合子の一般化と証明網について*

西 牟 田　　祐 樹**

## On a Generalization of Multiplicative Connectives and Proof-nets

***Yuki Nishimuta***

This paper offers a survey of the theory of multiplicative generalized connectives, which was introduced by Danos and Regnier in 1989. Girard introduced a proof-net in (Girard, 1987). We think that one of the most important theorems in proof-net theory is the sequentialization theorem in (Girard, 1987). We think that an important open problem in generalized connective theory is an extension of the sequentialization theorem by the generalized connectives. We give a brief overview of this problem in this paper.

## 1.　序論

線形論理は 1987 年に J.-Y. Girard によって導入された論理である（Girard, 1987）．Girard は自身のサーベイ論文の冒頭で次のように語っている．

線形論理は代替としての論理ではない．そうではなく線形論理は通常の論理の拡張と見なされるべきだ．なぜなら古典論理や直観

* 本研究は慶應義塾大学博士課程学生支援プログラムの助成を受けたものである．
** 慶應義塾大学文学研究科哲学専攻博士課程

> 主義論理の論理結合子を変更する望みはないのだから．線形論理は新たな論理結合子を導入するのだ（Girard, 1995, p. 1，引用者訳）．

ここで述べられている「新たな論理結合子」には**乗法的論理結合子**（Girard, 1987）と呼ばれる二つの論理結合子が含まれている．本稿では Danos と Regnier が 1989 年に導入した**一般化乗法的論理結合子**（Danos and Regnier, 1989）を用いて「線形論理は新たな論理結合子を導入する」ということの意味を乗法的論理結合子に関して（Girard, 1995）よりもより一般的な観点から明らかにする．具体的には，乗法的線形論理と呼ばれる線形論理の部分体系上では 2 項の乗法的論理結合子の組み合わせでは定義することが出来ない無限個の論理結合子が構成出来るということを示す．そして一般化乗法的論理結合子の概念を用いて（Girard, 1995）では明確に述べられなかった，なぜ古典論理や直観主義論理の論理結合子を変更する望みはないのかということを明らかにする．一般化乗法的論理結合子[1)] は（Danos and Regnier, 1989）で導入されてから近年に至るまでほとんど研究がなされてこなかった[2)]．そこで，我々は一般化乗法的論理結合子について出来る限り形式的でない解説を行い，その後に先行研究では述べられていない幾つかの一般化結合子の性質を明らかにする．

線形論理が論理結合子の概念に与えた影響は新たな論理結合子の導入だけではない．ジラールが（Garard, 1987）で導入した**証明網（proof-net）**の概念は推論規則に依らない論理結合子の定義という新しい論理結合子の見方を与えた．証明網というグラフが与えられた時，そのグラフから（帰納的な）証明図を構成することは**シーケント化**と呼ばれる（Girard, 1987）．ある論理体系でシーケント化が成立する（証明網から証明図を構成することが可能である）ことによって証明網上の論理結合子の概念と伝統的な証明図上の論理結合子の概念が関連していることが保証される．それ故にシーケント化の成立は極めて重要である．線形論理の様々な部分体系で

シーケント化が成立するかという問題は乗法的線形論理や他の線形論理の部分体系に対しては解決されていた（Girard, 1987; Girard, 1996）．しかし，乗法的線形論理に一般化乗法的論理結合子を加えた体系でシーケント化定理が成立するかという問題は未解決問題である．本稿では最後にこの未解決問題について概観する．

本稿の構成は以下の通りである．第 2 章はまず構造規則に注目して伝統的な論理の盲点であった乗法的論理結合子についての解説を行う．第 3 章では乗法的論理結合子を一般化し，線形論理の部分体系には従来の論理体系では見過ごされていた無限個の新たな論理結合子が存在することについて述べる．そして，（Girard, 1995）では明確に述べられなかった，なぜ古典論理や直観主義論理の論理結合子を変更する望みはないのかということを（Danos and Regnier, 1989）の**分割**という概念を用いて明確にする．第 4 章では証明網の理論の解説を行い，一般化乗法的論理結合子のシーケント化の問題について述べる．

## 2.　構造規則と乗法的論理結合子

伝統的な論理である古典論理と直観主義論理には構造規則が含まれていた（cf.  図 1）．実は構造規則は論理結合子の概念に影響を与えているのである．古典論理を使ってこのことを説明することにする．本稿ではシーケント計算に関する基本的な知識を仮定する（cf.（Takeuchi, 1987; Okada 1998））．

$$\frac{\vdash \ \Gamma}{\vdash \ \Gamma, A} \quad \text{（弱化規則）} \quad \frac{\vdash \ \Gamma, A, A}{\vdash \ \Gamma, A} \quad \text{（縮約規則）}$$

図 1　古典論理の構造規則

まず初めに図 2 の二つの論理結合子 & と ⊗（“&” は “with” と呼び，“⊗”

は “tensor”と呼ぶ）を考えてみよう．この二つの論理結合子 & と $\otimes$ が何を意味するのかはとりあえずは無視しよう．& 規則に注目して分かることは $\Gamma$ の記号が前提では二回現れているが結論では一つに減っていることである．そして前提の二つのシーケントに同じ $\Gamma$ が含まれていることである．今度は $\otimes$ 規則に注目してみよう．気付くことは今度は前提に $\Gamma$ が二回現れているのではなく異なる記号 $\Gamma$ と $\Delta$ が現れている．そして結論に一つずつある $\Gamma$ と $\Delta$ は前提にもそれぞれ一つずつ現れている．これらの特徴は構造規則と密接に関わっている．

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\,(\otimes) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \invamp B}\,(\invamp)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\,(\&) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\,(\oplus) \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\,(\oplus)$$

図 2　乗法的論理結合子と加法的論理結合子

二つのシーケント $\vdash \Gamma, A$ と $\vdash \Gamma, B$ が与えられたとしよう．これらのシーケントに $\otimes$ 規則を適用すると $\vdash \Gamma, \Gamma, A \otimes B$ を得る．ここで縮約規則を適用すると $\vdash \Gamma, A \otimes B$ を得る．この結論は & の結論と同じ形である．今度は二つのシーケント $\vdash \Gamma, A$ と $\vdash \Delta, B$ が与えられたとしよう．ここで弱化規則を適用すると $\vdash \Gamma, \Delta, A$ と $\vdash \Gamma, \Delta, B$ を作ることが出来る．これに & 規則を適用すると $\vdash \Gamma, \Delta, A \,\&\, B$ を得る．この結論は $\otimes$ の結論と同じ形である．つまり構造規則があると一方の論理結合子を用いて他方の論理結合子を模倣することが可能になってしまう．こうして構造規則の下で二つの論理結合子 & と $\otimes$ は潰れて一つの論理結合子となってしまう．& と $\otimes$ は古典論理では一つの連言 $\wedge$ である．同様の考察により，二つの論理結合子 $\oplus$ と $\invamp$（“$\oplus$ は “plus” と呼び，“$\invamp$” は “par” と呼ぶ）も構造規則があると一つに潰れてしまう．$\oplus$ と $\invamp$ は古典論理では一つの選言 $\vee$ である．

ここで二つの構造規則を取り去ってみるとどうなるだろうか．今度は一方の論理結合子から他方の論理結合子を模倣することが出来なくなる，つまり二つの論理結合子は別々の論理結合子となる．$\otimes$ と $\parr$ を同じグループに入れ，乗法的論理結合子と呼ぶことにしよう．残りの & と $\oplus$ を別のグループに入れ，加法的論理結合子と呼ぶことにしよう．$\otimes$ と $\parr$ を同じグループに入れるのはこれらの論理結合子が次の二つの特徴を持つからである．まず一つ目は結論に現れる原子論理式は全て前提にも現れるという特徴である．$\oplus$ 規則は $A$ と $B$ のどちらかが捨てられるので一つ目の特徴を満たさない．もう一つは乗法的論理結合子の導入はコンテキストの影響を受けないという特徴である．& 規則はコンテクスト $\Gamma$ が同一でなければならないので二つ目の特徴を満たさない．

構造規則が制限された体系では二種類の連言（選言）が存在することは線形論理より以前に部分構造論理の研究によって知られていた（cf.（Došen, 1993））．線形論理の革新的な点は様相演算子を用いて構造規則を制御された仕方で再導入した点である．この様相演算子を用いることによって，線形論理は伝統的な論理を精密化させたものと見なすことが出来る．本稿ではこの点については扱わない．より詳しい解説については（Okada, 1998; Okada, 2008）を参照されたい．

これからは乗法的線形論理 MLL という乗法的論理結合子 $\otimes, \parr$ の他には公理とカット規則しか持たない非常に簡潔な線形論理の部分体系を用いて考察を進める（cf. 図 3）．

本論では証明網の説明のためにシーケントの右側のみを用いる．古典論理ではド・モルガン双対性が成り立つのでシーケントの右側だけで証明を考えることが出来る．片側だけのシーケント計算では否定は論理結合子では無く，公理規則で否定が原子論理式にのみ導入され，より複雑な論理式に対してはド・モルガン則を用いて等号によって定義される（cf.（Girard, 1995, p. 10））．シーケント $\vdash \Gamma$ において $\Gamma$ は多重集合（multiset）を表す．

$$\frac{}{\vdash P, \sim P}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, \sim A}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(\mathrm{Cut})$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\,(\otimes) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\,(\parr)$$

（ここで $P$ は原子論理式を表す.）

図 3　乗法的線形論理 MLL の推論規則

上で述べた乗法的論理結合子の 2 つの特徴を満たす論理結合子は $\otimes$ と $\parr$ だけだろうか．実はそうではない．2 つの特徴を満たすように導入規則を一般化することが出来る（cf.  図 4）．この一般形を用いて次章では一般化乗法的論理結合子という新たな論理結合子を構成することにする．そして，次章で構造規則がない状況で論理結合子の前提について分割という概念をより詳細に分析することにする．

$$\frac{\vdash \Gamma_1, A_{11}, \ldots, A_{1i_1} \quad \cdots \quad \vdash \Gamma_m, A_{m1}, \ldots, A_{mi_m}}{\vdash \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m, \mathscr{C}(A_1, \ldots, A_n)}$$

（ここで $ii_j \in \{1, \ldots, n\}$ とする.）

図 4　乗法的論理結合子の導入規則の一般形

## 3.　一般化乗法的論理結合子

### 3.1　導入規則の前提の形

本章では Danos and Regnier（1989）の一般化乗法的論理結合子に対する解説を行い，2 項の乗法的論理結合子 $\otimes$ と $\parr$ の組み合わせによっては構成することが出来ない論理結合子が無限個存在することを示す（系 1）．そして（Girard, 1995）では明確に述べられなかったなぜ古典論理や直観主義論理の論理結合子を変更する望みはないのかということついて（Danos and

Regnier, 1989）の分割という概念を用いて明確にする．

論理結合子の導入規則の前提が持つ形に注目しよう．乗法的論理結合子の導入に注目するために推論規則のコンテクスト Γ，Δ は省略することにする．また，原子論理式がより複雑な論理式の中でどのように結合されているかということのみに関心があるので原子論理式 $A_1,\ldots,A_n$ $(1 \leq n)$ の代わりに対応する自然数 $1,\ldots,n$ を使うことがある．図 3 の乗法的論理結合子に再度注目しよう．$\otimes$ 規則は導入規則を下から上に見るとシーケントが $A$ を含むものと $B$ を含むものの二つに分岐する．$\invamp$ 規則は下から上に見ると分岐は起こらず $A$ と $B$ は同じシーケントに含まれ続ける．任意の論理式 $X$ が与えられた時，このボトムアップな論理式の分解をこれ以上分解することが出来なくなるまで続ける．すると原子論理式のみが現れている（複数の）シーケントが得られることになる．原子論理式 $A_1$ と $A_2$ が異なるシーケントに含まれているとしよう，これをあたかも論理式 $A_1$ と $A_2$ が別々の部屋 (–) に入ったように考え (1)(2) と書くことにする．部屋 (–) のことを**クラス**と呼ぶことにする．$A_1$ と $A_2$ が同じシーケントに含まれる場合は同じクラスに入り (1,2) となる．$\otimes$ と $\invamp$ の導入規則の主論理式 $A,B$ を原子論理式あるいはメタ変数のように考えると，$\otimes$ と $\invamp$ の導入規則に対しそれぞれクラスの集合 $\{(1)(2)\}$ と $\{(1,2)\}$ が対応する．

このようにして個々のクラスの集合はちょうど自然数の分割と 1 対 1 に対応する．このようなクラスの集合 $p$ のことを分割（partition) と呼ぶ．ある論理結合子の組み合わせと分割は 1 対 1 に対応するとは限らない点に注意して欲しい．シーケント $\vdash (A_1 \otimes A_2) \invamp A_3$ は $\vdash A_1 \otimes A_2, A_3$ からテンソルを分解する際にコンテクストとなる $A_3$ をどちらのシーケントに割り振るかについて $p_1$ と $p_2$ の 2 通りの可能性がある $p_1 = \{(1,3)(2)\}$，$p_2 = \{(1)(2,3)\}$．よって，論理結合子に対しては分割を要素とする集合である**分割集合** $P$ が対応することになる．この $\otimes$ と $\invamp$ の特定の組み合わせ $(A_1 \otimes A_2) \invamp A_3$ を一つの論理結合子 $\mathscr{C}(A_1, A_2, A_3) = (A_1 \otimes A_2) \invamp A_3$ として見て

みよう．この論理結合子は分割 $p_i \in P\ (i=1,\ldots,m)$（この例では $m=2$）に対応するシーケントを導入規則の前提としてそれぞれ一つずつ持ち，$m$ 個の導入規則を持つ論理結合子である．以上の考察により導入規則の前提が持つ形である分割集合 $P$ を定めることによって，2 項結合子の組み合わせによって得られる論理結合子 $\mathscr{C}$ が定義できることが分かった．さらにこの考えを一般化させると，2 項結合子の組み合わせから得られる分割集合のみを考えずとも，自由に分割集合を考えてその分割集合に対応する論理結合子 $\mathscr{C}$ を構成することが可能になる．

### 3.2　論理結合子の双対性のグラフ論的理解

これまでの説明で結合子 $\mathscr{C}$ の推論規則を分割集合によって定義したが，まだ論理結合子の間で成り立つカット除去について述べられていなかった．シーケントの両側を用いるシーケント計算と片側のみを用いるシーケント計算を比較しよう．2 項結合子 $\otimes$ の導入規則を右規則と考えると $\otimes$ の左規則に相当するものは $\otimes$ の双対となる論理結合子 $\invamp$ の右規則である．つまり，片側のみを用いるシーケント計算では論理結合子は互いに双対（例えば $\otimes$ と $\invamp$）となる対に対してカット規則が定義されることになる．

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\otimes B \vdash \Delta} \quad \frac{\vdash \sim\Gamma, \Delta, \sim A, \sim B}{\vdash \sim\Gamma, \Delta, \sim A \invamp \sim B}$$

よって論理結合子 $\mathscr{C}$ に対し，その双対となる論理結合子 $\mathscr{C}^*$ の定義が必要であることが分かる．しかし論理結合子 $\mathscr{C}$ に対する双対とはなんだろうか．$\sim(\mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)) = \mathscr{C}^*(\sim A_1,\ldots,\sim A_n)$ と定義しただけでは十分でない．なぜなら，どのような論理結合子の組 $(\mathscr{C},\mathscr{C}^*)$ に対してもそのように定めることは可能であるからだ．2 項結合子の組み合わせによって得られた論理結合子 $\mathscr{C}$ に対しては，2 項結合子のド・モルガン双対性を用いてこの問題は解決出来る．しかし論理結合子 $\mathscr{C}$ を 2 項結合子の組み合わせよ

りもより一般化させたいならば，このような方法は明らかに取ることが出来ない．

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma_1, A \qquad \vdash \Gamma_2, B}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B}(\otimes) \qquad \dfrac{\vdash \Gamma, {\sim}A, {\sim}B}{\vdash \Delta, {\sim}A \parr {\sim}B}(\parr)}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta}\text{Cut} \rightsquigarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma_1, A \qquad \vdash \Delta, {\sim}A, {\sim}B}{\vdash \Gamma_1, \Delta, {\sim}B}\text{Cut} \qquad \vdash \Gamma_2, B}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta}\text{Cut}$$

下の図で $A$ と ${\sim}A$ の代わりに先に $B$ と ${\sim}B$ をカットしても良い．

図 5　$\otimes$ と $\parr$ のカット除去

我々はこの点でカットはド・モルガン双対な二つの論理式（論理結合子）の間で行われるという考えを捨てなければならない．むしろ二つの論理結合子 $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}^*$ の間でカットが定義されているとは，$\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}^*$ の間のカット除去（のメインステップ）が成り立つことであると考える必要がある．この発想のもとで Danos と Regnier は**結合グラフ（meeting graph）**という概念を導入した（Danos and Regnier, 1989, p. 190）．

結合グラフとはある論理結合子 $\mathscr{C}$ の分割集合 $P_{\mathscr{C}}$ が与えられた時に，その $P_{\mathscr{C}}$ に対してカット除去が成り立つような分割集合，つまり，$\mathscr{C}$ の双対 $\mathscr{C}^*$ の分割集合を見出すためのものである．グラフには上部と下部の頂点があり，上部と下部の頂点は辺で結ばれる．上部同士または下部同士は辺で結ばれることはない．結合グラフ $G$ の作り方は以下の通りである（cf. 図 6）．まず分割 $p_i \in P_{\mathscr{C}}$ $(i = 1, \ldots, m)$ を取ってくる．分割に含まれるそれぞれのクラスに対してグラフの上部の頂点を 1 対 1 に対応させる．頂点にはクラスの中の数字がラベルとして貼られる．そしてグラフの下部の頂点を次のように決定する．グラフの上部の頂点と下部の頂点で同じ数字のラベルの間にちょうど 1 本辺を引いてグラフが**連結で非輪状**

**(connected and acyclic)** となるような頂点だけを下部の頂点とする．分割集合 $p_i$ $(i=1,\dots,m)$ に対してそれぞれ下部の頂点からなる分割集合 $Q_i$ が定まる．求める $\mathscr{C}^*(A_1,\dots,A_n)$ の分割集合は共通部分 $P_{\mathscr{C}^*}=\bigcap_i Q_i$ で与えられる．このように分割集合 $P$ から結合グラフを作ることによって得られる分割集合 $Q$ を $P$ の**直交集合**といい，$P^\perp$ と書く．一般化乗法的論理結合子は空ではない分割集合の組 $(P_{\mathscr{C}},P_{\mathscr{C}^*})$ で一方が他方の直交集合となっているようなものである．つまり $(P_{\mathscr{C}})^\perp=P_{\mathscr{C}^*}$ かつ $(P_{\mathscr{C}^*})^\perp=P_{\mathscr{C}}$ が成り立つような組 $(P_{\mathscr{C}},P_{\mathscr{C}^*})$ のことを一般化乗法的論理結合子と呼ぶ.

このように一般化結合子を定義するとカット除去が成り立つ．例えば図 5 では $A$ と $\sim A$, $B$ と $\sim B$ の間にカットが行われ，それぞれ打ち消され合うが，これらのカットには図 6 の頂点を同一視し，辺を縮約するという操作が対応する（Danos and Regnier, 1989, pp. 190–191）．カット除去のメインステップが成り立たない時，二つの可能性がある．一つは結合グラフが輪状であることでカット後にシーケント $\vdash A,\sim A$ のように論理式が消えずに残る場合である．もう一つは結合グラフが非連結になる場合であり，空のシーケント $\vdash$ 　が二つ導出され証明とはならない場合である．このように結合グラフの連結で非輪状という条件は前提の論理式で双対なものである $A_i$ と $\sim A_i$ が複数のカットによって全て打ち消し合い空のシーケントになるための条件をグラフ論的に記述しているものなのである[3)].

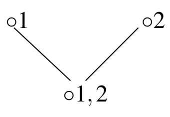


図 6　$\otimes$ と $\wp$ の結合グラフ

### 3.3　分解不可能な乗法的論理結合子

これまでに述べられたことにより，乗法的論理結合子は一般化乗法的論理結合子の特殊な場合であることが明らかになった．しかし，全ての一般化結合子が 2 項の乗法的論理結合子の組み合わせで得られるならば分割集合や結合グラフは不必要であるだろう．（Danos and Regnier, 1989）は 2 項の乗法的論理結合子の組合せでは定義することが出来ない一般化論理結合子が存在することを明らかにした（cf. 図 7）．2 項の乗法的論理結合子の組合せでは定義することが出来ない一般化論理結合子を**分解不可能（non-decomposable）**な一般化論理結合子という．図 7 の分解不可能な乗法的結合子を観察してみよう．$\mathscr{C}$ では二つの分割で $B$ と $C$ の位置が異なる，一方 $\mathscr{C}^*$ では一方の分割では $A$ と $D$ が同じシーケントに含まれているにも関わらず，もう一方の分割では $A$ と $D$ は異なるシーケントに分離されている．分解不可能な乗法的結合子はとても対称的な形をしている論理結合子なのである．

分解不可能な論理結合子が実は無限個存在することを示そう．

$$\frac{\vdash \Gamma_1, A, B \qquad \vdash \Gamma_2, C, D}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \mathscr{C}(A,B,C,D)} \quad \frac{\vdash \Gamma_1, A, C \qquad \vdash \Gamma_2, B, D}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \mathscr{C}(A,B,C,D)}$$

$$\frac{\vdash \Delta_1, A, D \qquad \vdash \Delta_2, B \qquad \vdash \Delta_3, C}{\vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \mathscr{C}^*(A,B,C,D)}$$

$$\frac{\vdash \Delta_1, B, C \qquad \vdash \Delta_2, A \qquad \vdash \Delta_3, D}{\vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \mathscr{C}^*(A,B,C,D)}$$

図 7　分解不可能な乗法的論理結合子

**定義 1.**　一般化乗法的論理結合子 $\mathscr{C}$ はその分割集合 $P_{\mathscr{C}}$ がある MLL の論理式 $X$ の分割集合と一致する時に分解可能であるという．一般化乗法的論理結合子 $\mathscr{C}$ は分解可能ではない時，分解不可能であるという．

**定理 1.** $A_1,\ldots,A_n,B$ を MLL（または MLL に任意の一般化論理結合子を加えた体系）の任意の論理式とし，$\mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)$ を MLL で分解不可能な任意の一般化乗法的論理結合子とする．この時，$\mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)\otimes B$ (resp. $\mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)\parr B$) の分割集合 $P_1$ (resp. $P_2$) と同じ分割集合を持つ一般化乗法的論理結合子 $\mathscr{D}_1(A_1,\ldots,A_{n+1})$ (resp. $\mathscr{D}_2(A_1,\ldots,A_{n+1})$) は MLL で分解不可能な一般化乗法的論理結合子である．

**証明.** $\mathscr{D}_1(A_1,\ldots,A_{n+1})$ が MLL で分解可能だと仮定して矛盾を示す．$\mathscr{D}_1(A_1,\ldots,A_{n+1})$ は $\mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)\otimes B$ と同じ分割集合を持つ（以後 $\mathscr{D}_1(A_1,\ldots,A_{n+1}) = \mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)\otimes B$ と略記する）のでシーケントを下から分解するとシーケント $\vdash A_{n+1}$ とそれ以外のシーケントの集合 $S$ に分解される．すると $S$ を分解して得られる分割集合 $Q$ は分解可能である．$Q$ は $\mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)$ の分割集合と一致するが，$\mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)$ の分割集合は仮定より分解不可能であり矛盾する．よって $\mathscr{D}_1(A_1,\ldots,A_{n+1})$ は MLL で分解不可能である．$\mathscr{D}_2(A_1,\ldots,A_{n+1}) = \mathscr{C}(A_1,\ldots,A_n)\parr B$ が分解不可能であることは $\mathscr{D}_2$ は $\mathscr{C}^*(A_1,\ldots,A_n)\otimes B$ の双対であることと，分解不可能な論理結合子の双対もまた分解不可能であるという事実から従う． □

**系 1.** 分解不可能な一般化乗法的論理結合子 $\mathscr{C}$ は無限個存在する．

通常は乗法的線形論理 MLL には二つの拡張の仕方がある．加法的論理結合子 $\&,\oplus$ を加え，乗法加法的線形論理 MALL へと拡張する仕方と，様相演算子 $!,?$ を加えて乗法指数的線形論理 MELL へと拡張する仕方である．系 1 は第 三の道を示しており，MLL に分解不可能な一般化結合子を加えて乗法的な構造をより豊かにするという拡張の仕方を示している．さらに，この分解不可能性を破壊しないように上手く従来の論理結合子を加えていくことにより分解不可能な論理結合子を含むような乗法的線形論理よりも強力な論理体系を得ることも可能である．

分割の概念を用いてなぜ古典論理や直観主義論理では論理結合子を変更する望みがないのかということについてアイデアを説明しよう．ただし，乗法的線形論理以外の体系に対する分解可能性についての定義はここでは述べないことにする．まず古典論理について考えよう．任意の論理結合子 $\mathscr{C}$ の分割集合 $P_{\mathscr{C}} = \{p_1, \ldots, p_n\}$（$n$ は自然数）を考えよう．任意のシーケント $\vdash A_1, \ldots, A_m$ に対して構造規則と選言を使うことで論理式を一つだけ含むシーケント $\vdash A_1 \vee \cdots \vee A_m$ を得ることが出来る．さらに分割は一般に複数のシーケントを持つので，複数のシーケント $\vdash A_{11} \vee \cdots \vee A_{1m_1} \cdots \vdash A_{k1} \vee \cdots \vee A_{km_k}$ をそれぞれ構造規則と連言で一つにまとめる $\vdash (A_{11} \vee \cdots \vee A_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (A_{k1} \vee \cdots \vee A_{km_k})$．この構成により $p_i (i = 1, \ldots, m)$ に対してそれぞれ一つずつ論理式 $X_i (i = 1, \ldots, m)$ を構成することが出来る．そして選言 $\vee$ を用いることで $X_i$ から $X_1 \vee \cdots \vee X_m$ を導出することが出来る．よって，任意の論理結合子 $\mathscr{C}$ は 2 項の論理結合子を組み合わせて得られる論理式 $X_1 \vee \cdots \vee X_m$ に分解可能である．このように構造規則，特に弱化規則があると，論理結合子が導入規則をいくつ持ったとしても，選言を用いてそれらを繋ぎ合わせて 2 項結合子の組み合わせである一つの論理式を得ることが出来る．そして，一般化結合子は古典論理で分解可能となってしまう．つまり全ての論理結合子は既存の 2 項結合子の組み合わせで表現出来てしまうのである．直観主義でも分割の概念などを適当に変更することにより，構造規則を用いて全ての一般化結合子は分解可能であることを示すことが出来る[4)]．

### 3.4　小さな項数の一般化論理結合子

一般化乗法的論理結合子の研究はまだ十分には進められておらず，項数が比較的小さな場合の状況さえ明らかにされていなかった．そこで本節では項数が小さな場合についての論理結合子の分解可能性についての簡単な結果を列挙する．

分割と分割集合についての記法を導入する．クラス $x_k = (p_{k1}, \ldots, p_{ki_k})$ $(k = 1, \ldots, m)$ の元の個数を $\#x_k$ と書く．分割 $p = \{(p_{11}, \ldots . p_{1i_1}), \ldots, (p_{m1}, \ldots, p_{mi_m})\}$ に対しクラスの元の個数のなす多重集合 $(\#x_1, \ldots, \#x_m)$ を対応させる（記法は $\{-\}$ ではなく $(-)$ を用いることにする），分割 $p$ に対応する多重集合が $(\#x_1, \ldots, \#x_m)$ であることを $p : (\#x_1, \ldots, \#x_m)$ と書き，分割 $p$ の型は $(\#x_1, \ldots, \#x_m)$ であるということにする．また，論理結合子 $\mathscr{C}$ の項数を $\mathscr{C}$ のサイズと呼ぶ.

サイズ 1 の乗法的論理結合子は乗法的定数 $1, \bot$ を MLL に加えると 2 項の乗法的結合子を用いて分解可能であり次のものに限る $\mathscr{C}(A) = A \otimes 1$, $\mathscr{C}^*(A) = A \invamp \bot$．サイズ 3 の一般化乗法的論理結合子は全て分解可能であり次の二種類のみに限る $\mathscr{C}(A, B, C) = (A \otimes B) \invamp C, \mathscr{C}^*(A, B, C) = (A \invamp B) \otimes C$.

**定義 2.** 分割集合が $P_{\mathscr{C}} = \{p_1 : (2, 2), p_2 : (2, 2)\}$ (resp. $P_{\mathscr{C}^*} = \{p_1 : (2, 1, 1), p_2 : (2, 1, 1)\}$) であるような一般化論理結合子 $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}^*$) を Danos-Regnier 型の一般化乗法的論理結合子と呼ぶ.

**補題 1.** 任意の 2 つの分割集合 $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ と 2 つの分割 $p, q \in P_{\mathscr{C}}$ に対し，もし $p, q$ に含まれるクラスの数 $\#p, \#q$ が異なるならば，$\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}'$ の間のカット除去のメインステップは成り立たない.

補題 1 より一般化結合子の分割はクラスが同数の分割を考察すれば十分であることが分かる．乗法的定数を認めればサイズ 3 までの論理結合子は全て分解可能である．分解不可能な論理結合子はサイズ 4 で初めて現れる．しかも，次の定理はサイズ 4 の分解不可能な論理結合子は本質的には一種類しかないことを主張している.

**定理 2.** サイズ 4 の分解不可能な一般化乗法的論理結合子は Danos-Regnier 型のものに限る.

**証明.** 分割の型に対する場合分けによって証明する．$p:(1,1,1,1)$ と $p:(4)$ はそれぞれ $\otimes$ と $\parr$ のみによって構成された場合であるので分解可能である．よって $p:(2,2)$, $p:(2,1,1)$, $p:(3,1)$ の型について示せば十分．まず $p:(2,2)$ の型の分割についてのみ考える．一般に分割集合が 1 元の場合は分解可能である．3 元の場合 $P=\{p_1:(2,2),p_2:(2,2),p_3:(2,2)\}$ を考察する．ここで読みやすさのためクラスをシーケントの形で書くことにする．$p_1=\{(\vdash A,B)\ (\vdash C,D)\}$, $p_2=\{(\vdash A,C)\ (\vdash B,D)\}$, $p_3=\{(\vdash A,D)\ (\vdash B,C)\}$ と置く．どの変数 $A,\ldots,D$ の対についても（例えば $A$ と $D$）ある分割では対は異なるシーケントに分離され，ある分割では対は同じシーケントに含まれる．この時，結合グラフを作ると $P^{\perp}$ は空となり一般化結合子とはならない．Danos-Regnier 型 $P_1=\{p_1,p_2\}$, $P_2=\{p_1,p_3\}$, $P_3=\{p_2,p_3\}$ が分解不可能な結合子であることは計算によって確かめられる．$p:(2,1,1)$ についても同様．分割集合が型 $p:(2,2)$ と型 $q:(2,1,1)$ の両方を含む場合は $P^{\perp}$ は空となる．$P=\{p_1:(2,2),p_2:(3,1)\}$ の場合，$((A\parr B)\otimes C)\parr D$ と分解可能である．$P=\{p_1:(2,2),p_2:(3,1),p_3:(3,1)\}$ の場合，$((A\otimes B)\parr C)\parr D$ と分解可能．$P=\{p_1:(2,2),p_2:(3,1),p_3:(3,1),p_4:(3,1)\}$ の場合，$(A\parr B\parr C)\otimes D$ と分解可能．$p:(3,1)$ が 4 つある場合は再び双対の分割集合が空になる．補題 1 より他の場合はあり得ない．よって，サイズ 4 の分解不可能な一般化乗法的論理結合子は Danos-Regnier 型のものだけである．　□

サイズ 5 の分解不能な一般化乗法的論理結合子はサイズ 4 の分解不能な一般化結合子から $\otimes$ と $\parr$ によって得られるものに限る．分解不可能な論理結合子は全てサイズ 4 のものから得られるのではないかという考えは次の事実から否定される．

**事実 1.** サイズ 6 の次の導入規則を持つ一般化乗法的論理結合子は分解不能である．さらにサイズ 4 の分解不可能な論理結合子から $\otimes$ と $\parr$ によって構成することは出来ない．$P_{\mathscr{C}}=\{p_1,p_2,p_3\}$, $P_{\mathscr{C}^*}=\{q_1,q_2,q_3\}$

$$p_1 = \{(\vdash A,B,C) \quad (\vdash D,E,F)\},$$
$$p_2 = \{(\vdash A,B,D) \quad (\vdash C,E,F)\},$$
$$p_3 = \{(\vdash A,D,E) \quad (\vdash B,C,F)\},$$
$$q_1 = \{(\vdash A,F) \quad (\vdash B) \quad (\vdash C) \quad (\vdash D) \quad (\vdash E)\},$$
$$q_2 = \{(\vdash C,D) \quad (\vdash A) \quad (\vdash B) \quad (\vdash E) \quad (\vdash F)\},$$
$$q_3 = \{(\vdash B,E) \quad (\vdash A) \quad (\vdash F) \quad (\vdash C) \quad (\vdash D)\}.$$

## 4.　一般化論理結合子の証明網

本章では証明網と呼ばれるグラフを用いた証明の特徴づけの拡張について述べる．Girard が線形論理と共に導入した証明網は推論規則の適用が誤っているような証明でない構造について考察することを可能にし，帰納的な証明図の概念に依らない証明の大域的でグラフ論的な特徴づけを与えた．本稿では乗法的線形論理 MLL の証明網のみに限定し，このグラフ論的な証明の特徴づけについて解説し，一般化論理結合子のグラフ論的な特徴づけの問題について最後に述べる．証明網の理論の他の利点については補遺で述べることにする．

リンク（cf.  図 8）を張り合わせて作られる証明構造と呼ばれるグラフが定義される（cf.  図 9）．MLL のリンクは MLL の推論規則と 1 対 1 に対応している．証明構造は一般に対応する証明を持つとは限らない（図 9 の上の二つの証明構造は対応する証明を持たない）．**整合性条件（correctness criterion）**と呼ばれるある特定の条件を満たすような証明構造のクラスに対しては証明構造に解釈されるようなシーケント計算での証明が存在する（ただし一意には決まらない）．整合性条件を満たすグラフは証明網と呼ばれる（Girard, 1987）．証明構造が証明網となるための条件として同値である複数の条件が知られている（例えば（Girard, 1987; Danos and Regnier, 1989））．本稿では**スイッチング**という概念を用いた Danos-Regnier の整合

性条件（Danos and Regnier, 1989）を用いる．

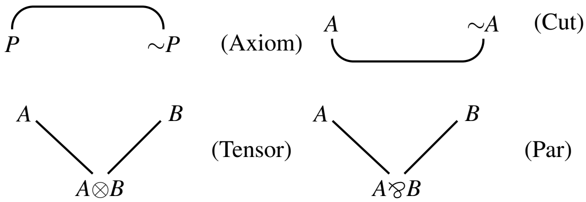


図 8　リンク

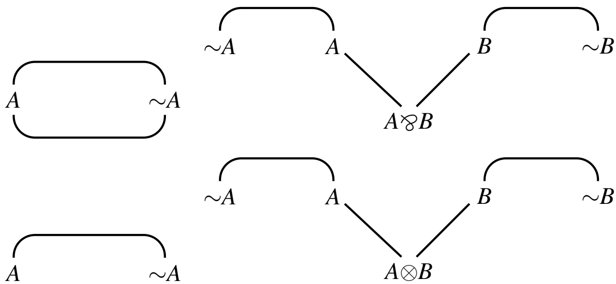


図 9　証明構造の例

証明構造 $\mathscr{S}$ のスイッチングとは $\mathscr{S}$ に含まれる各 $\parr$ リンクについて，$A$ と $B$ から $A \parr B$ に向かって伸びる 2 本の辺の内のどちらかを切断する関数のことである（cf. 図 10）．そしてどのような組み合わせで $\mathscr{S}$ の辺を切断しても，切断後のグラフが**連結で非輪状（connected and acyclic）**である時，証明構造は証明網であると呼ばれる．図 11 の証明構造は二つの $\parr$ リンクをどのような組み合わせで切断しても連結かつ非輪状なので証明網である．以上が証明網の理論の概略である．

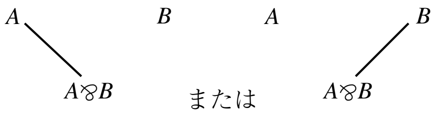


図 10　⅋-スイッチング

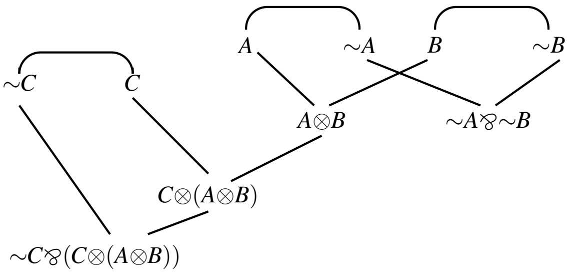


図 11　証明網の例

前章では乗法的線形論理では 2 項の論理結合子 ⊗ と ⅋ では構成できない論理結合子が存在することについて述べた．ここで自然な疑問が浮かぶ．一般化乗法的論理結合子を含む証明構造に対してシーケント化定理は成り立つのかという疑問である．スイッチングによる整合性条件と一般化結合子の両方を導入した Danos と Regnier は一般化乗法的論理結合子を含めるとシーケント化定理は成り立たなくなると考えた（Danos and Regnier, 1989, p. 197）．しかし，証明網という概念はスイッチングの概念に依存している点に注目しよう．Danos と Regnier は彼らのスイッチング（Danos and Regnier, 1989, p. 196）を用いるとシーケント化定理が成り立たないということを述べているが，異なるスイッチングの概念を用いるとシーケント化が成立するという可能性はまだ残されているのである．

分解不可能な一般化結合子によるシーケント化定理の拡張についての困難は以下の点にある．まず分解不可能な結合子には 2 項の場合の

スイッチングの情報は使えないという点である．例えば $\mathscr{C}(A,B,C,D) = (A⅋B)\otimes(C⅋D)$ ならば，通常の 2 項の論理結合子しか含まない証明構造でスイッチングを行い，そのスイッチングの結果を $\mathscr{C}(A,B,C,D)$ のスイッチングの結果と考えることが出来る（ただしこの方法は実は分解可能な場合でさえ一般にはうまく機能しない）．さらに分解不可能な結合子は複数の分割（導入規則）を持つという問題がある．例えば図 7 の論理結合子 $\mathscr{C}$ を持つ証明構造（cf. 図 12）について，もし $P_{\mathscr{C}} = \{p_1, p_2\}, p_1 = \{(1,2)(3,4)\}, p_2 = \{(1,3)(2,4)\}$ の $p_2$ を用いて異なるクラスに属する 1 と 2, 3 と 4 をそれぞれ結ぶと図 12 のグラフは輪状になってしまう．これらの問題が解決出来れば一般化乗法的論理結合子に対するシーケント化定理が成立するような証明網が得られるであろうと予想される．

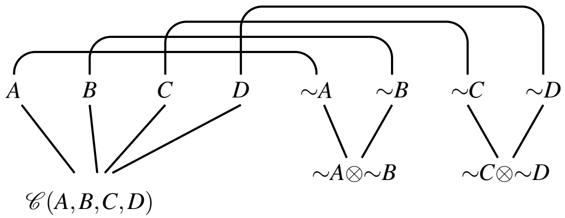


図 12　$\mathscr{C}$ リンクを含んだ証明構造

## 5.　まとめと展望

本稿では線形論理の部分体系 MLL で定義される 2 項の論理結合子の組み合わせでは定義することが出来ない論理結合子（分解不可能な論理結合子）について概観した．この論理結合子については解決されていない様々な問題がある．その中で重要なものは分解不可能な論理結合子のグラフ論的な特徴づけを与えるという問題（シーケント化定理の拡張問題）と線形論理の他の体系でも分解不可能な論理結合子は存在するかという問題であ

る．これらの問題の解決は分解不可能な論理結合子と MLL の 2 項結合子は統一的な枠組みで捉えられるのか，そして，分解不可能な論理結合子は MLL に特有のものであるのかという問いに対する回答を与えるという点で重要な問題である．これらの問題のより詳細な分析については別稿に期したい．

## 注

[1] 以降，一般化乗法的論理結合子を一般化論理結合子，または単に論理結合子とも呼ぶことにする．

[2] 一般化乗法的論理結合子の研究として（Girard, 2016; Maieli 2017）がある．（Girard, 2016）は超越論的構文論という新たな論理の枠組みで述語論理を扱う手段として一般化論理結合子を用いている．（Maieli, 2017）は二つの分割集合が互いの直交集合であるための条件を与えた．そのような分割集合の組は一般化乗法的論理結合子の定義を満たす．

[3] 結合グラフと同様のアイデアを用いた研究として（Ciabattoni, Galatos and Terui, 2008）が挙げられる．（Ciabattoni et al, 2008）は一般化された構造規則に対してカット除去が成り立つことを示すために推論規則から構成したグラフである従属性グラフ（dependency graph）の非輪状性を用いている．

[4] （Schroeder-Heister, 1987）は自然演繹を用いて論理結合子の一般化について考察している．自然演繹では任意の $n$ 項論理結合子は 2 項結合子の組み合わせによって得られた論理式と同値になるという（Schroeder-Heister, 1987, Theorem 5.3）の結果は我々の考察と一致する．この結果の証明にも複数の推論規則に対し一つの論理式を対応させるために本質的に選言が使われている（Schroeder-Heister, 1987, p. 1297）

## 参考文献

[1] G. Takeuchi, *Proof theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 81, North-Holland, Elsevier Science, second edition, 1987.

[2] A. Ciabattoni, N. Galatos and K. Terui, *From axioms to analytic rules in nonclassical logics*, Proceedings of LICS'08, 2008, pp. 229–240.

[3] V. Danos and L. Regnier, *The structure of multiplicatives*, Archives for Math-

ematical Logic, vol. 28, 1989, pp. 181–203.

[4] K. Došen, *A historical introduction to substructural logics*, in K. Došen and P. Schroeder-Heister (eds.), Substructural logics, Clarendon press, Oxford, 1993, pp. 1–30.

[5] J.-Y. Girard, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science, vol. 50, 1987, pp. 1–102.

[6] J.-Y. Girard, *Linear logic: its syntax and semantics*, in J.-Y. Girard, Y. Lafont and L. Regnier (eds.) Advances in Linear Logic, Cambridge University Press, 1995, pp. 1–42.

[7] J.-Y. Girard, *Proof-nets: the parallel syntax for proof-theory*, in Ursini and Agliano (eds.), Logic and Algebra, CRC press, 1996, pp. 97–124.

[8] J.-Y. Girard, *Transcendental syntax II: non deterministic case*, submitted, 2016, Available at: http://girard.perso.math.cnrs.fr/trsy2.pdf [Accessed 28 October 2017].

[9] R. Maieli, *Non decomposable connectives of linear logic*, submitted, 2017, Available at: http://logica/uniroma3.it/ maieli/non-decomp_MLL.pdf [Accessed 25 June 2017].

[10] M. Okada, *An introduction to linear logic: expressiveness and phase semantics*, MSJ Memoirs, Japan Mathematical Society, vol. 2, 1998, pp. 255–295.

[11] M. Okada, *Some remarks on linear logic*, in M. van Atten et al. (eds.), One hundred years of intuitionism (1907–2007): the cerisy conference, Basel, Birkhäuser, 2008, pp. 280–300.

[12] P. Schroeder-Heister, *A natural extension of natural deduction*, The journal of symbolic logic, vol. 49, No. 4, 1984, pp. 1284–1300.

## 補遺　証明網を用いた同値関係と証明網上のカット除去

証明網の理論には三つの利点がある．一つ目の利点は既に第 四 章で説明した証明のグラフ論的な特徴づけである．この補遺では残りの二つの利点について説明しよう．

二つ目の証明網の利点は証明網はシーケント計算の規則の適用順序の入れ替えに関する同値関係を与えてくれる点である．

例えばシーケント $\vdash (A\otimes B)\otimes C, \sim A⅋\sim B, \sim C$ の二つの証明図を考えてみよう．一つは初めに上から下に $\otimes$ を先に 2 回適用し，その後に ⅋ を適用する証明であり，もう一つは $\otimes$ の後に ⅋ を適用し，最後に $\otimes$ を適用して得られる証明図である．証明網はこのような推論規則の適用の順番の違いのみが異なるような証明に対する自然な同値関係 “$\sim$” を定める．その同値関係とは次のようなものである．$(\pi)^* = (\pi')^*$ ならば $\pi \sim \pi'$，ここで $\pi$ と $\pi'$ はシーケント計算での二つの証明とし，$(-)^*$ は証明から証明構造への解釈関数である．よって，証明網を複数の結論を持つ自然演繹として考えることが出来る（Girard, 1987, p. 3）．しかし，MLL の証明網は次の二つの点で自然演繹と決定的に違う．一つは自然演繹は推論を局所的に表すことが出来ない点である（例は $\to$ 導入規則）．もう一つは自然演繹では $\vee$ 消去規則や $\otimes$-消去規則のように主論理式と無関係な論理式が現れてしまうという点である．証明網にはこれらの問題は存在しないのである．

三つ目の利点は，カット除去の非本質的な部分を取り去ってくれる点である．カット除去手続きの本質的なステップは互いに双対な論理結合子が導入され，それらが部分論理式に置き換えられるステップであるが，シーケント計算上ではそれ以外の操作も必要となる．それはカットを上に持ち上げる手続き（commutation steps）である．例えば次の証明図を考えてみよう．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A,\sim A \qquad \vdash B,\sim B}{\vdash A,B,\sim A\otimes\sim B}\otimes}{\vdash A\parr B,\sim A\otimes\sim B}\parr \qquad \vdash C,\sim C}{\vdash (\sim A\otimes\sim B)\otimes\sim C, A\parr B, C}\otimes \qquad \dfrac{\vdash A,\sim A \qquad \vdash B,\sim B}{\vdash A,B,\sim A\otimes\sim B}\otimes}{\vdash (\sim A\otimes\sim B)\otimes\sim C, C, A, B}\mathrm{Cut}$$

この証明図でカット除去はまずカット規則の左上の $\sim C$ に適用された $\otimes$ 規則とカット規則の順番が入れ替えられ，その後に $\otimes$ と $\parr$ のカットがより小さなカットに置き換えられる．証明網（証明構造）上のカット除去はより簡潔である（cf.　図 13）．なぜなら MLL の証明網（証明構造）上でのカット除去には規則の順番を入れ換えるステップは存在しないからである．

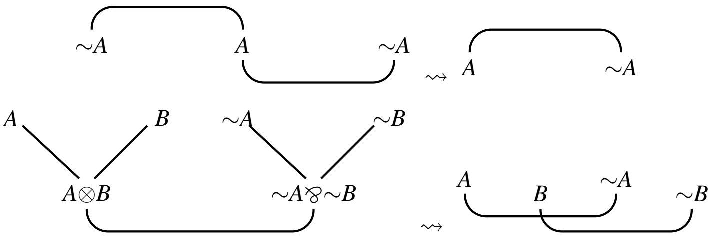


図 13　証明網上のカット除去