Title	ゲンツェンの1935年版無矛盾性証明と含意解釈
Sub Title	Gentzen's 1935 consistency proof and an interpretation of implications
Author	高橋, 優太(Takahashi, Yuta)
Publisher	三田哲學會
Publication year	2015
Jtitle	哲學 No.135 (2015. 3) ,p.45- 58
JaLC DOI	
Abstract	Gentzen, in his papers for consistency proofs of arithmetic, remarked that one of the aims of his 1935 consistency proof is to give an interpretation for the implications in arithmetic. However, Gentzen eventually replaced each implication A⊃B with the formula ¬(A&¬B) at the beginning of the proof: he treated the implications A⊃B as the formulas of the form ¬(A&¬B). In the present paper, first we note that the implications can be dealt with directly in Gentzen's 1935 consistency proof. Specifically, the reduction steps (Reduktionsschritt) for the implications are made explicit in terms of his method. Second, by using Gentzen's reduction steps extended in this way, we propose an interpretation of the implications, which is stipulated without replacing the implications with other formulas.
Notes	投稿論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000135-0045

ゲンツェンの1935年版無矛盾性証明と含意解釈

高　橋　優　太*

Gentzen's 1935 Consistency Proof and an Interpretation of Implications

Yuta Takahashi

Gentzen, in his papers for consistency proofs of arithmetic, remarked that one of the aims of his 1935 consistency proof is to give an interpretation for the implications in arithmetic. However, Gentzen eventually replaced each implication $A \supset B$ with the formula $\neg(A \& \neg B)$ at the beginning of the proof: he treated the implications $A \supset B$ as the formulas of the form $\neg(A \& \neg B)$. In the present paper, first we note that the implications can be dealt with directly in Gentzen's 1935 consistency proof. Specifically, the reduction steps (Reduktionsschritt) for the implications are made explicit in terms of his method. Second, by using Gentzen's reduction steps extended in this way, we propose an interpretation of the implications, which is stipulated without replacing the implications with other formulas.

* 慶應義塾大学文学部非常勤講師

はじめに

本稿の目的は次の二つである．まず，ゲンツェンの 1935 年版無矛盾性証明の中で明確に提示されなかった，含意論理式 $A \supset B$ を含む式（Sequenz, sequent）に対する還元ステップ（Reduktionsschritt）を，ゲンツェン自身の手法を用いて明示する．次に，この点で拡張されたゲンツェンの還元ステップを用いて，今度は本稿の立場から，自然数論の含意論理式に対する一つの解釈を提案する．以下ではこれらの目的の背景から述べよう．

数理論理学の分野「証明論（proof theory）」の創始者の一人であるゲンツェンは，生涯の中で，自然数論に対して三つの無矛盾性証明を与えた．第一版の証明を含む論文は 1935 年に提出されたが，ベルナイスによって批判され，ゲンツェンはその証明を改訂した．その結果，ゲンツェンの生前には第一版の証明が出版されることはなく，1974 年にその主要部分のみが出版された（[Gentzen 1974]）*[1]．第二版の証明は，第一版の改訂の結果生まれた証明であり，1936 年に出版された（[Gentzen 1936]）．そして，その二年後の 1938 年に，最後の第三版の証明が出版された（[Gentzen 1938b]）．「ゲンツェンによる自然数論の無矛盾性証明」と言えば通常この三番目の証明のことを言い，最も参照され，そして知られているのはこの証明である．以下では，第一版の証明のことを特に「35 年証明」と呼ぶことにする．

第三版の証明を与える［Gentzen 1938b］とは異なり，35 年証明を与える［Gentzen 1974］および第二版の証明を与える［Gentzen 1936］は，無矛盾性証明の目的・意義についての論述を多く含む．そのため，論理哲学の観点から見ると，むしろこれら二つの証明・論文こそ現在検討を要するように思われる*[2]．そうした論述の中でも本稿が着目したいのは，「自然数論に属する含意論理式に解釈を与えることが無矛盾性証明の主要な目的の一つである」というものである*[3]．ゲンツェンの無矛盾性証明に，「自

然数論の基礎づけ」というヒルベルト由来の目的の他に，自然数論における含意概念を説明・分析するという目的があったことは興味深い．これが，本稿が上の論述に着目する理由である．以下，本稿は特に35年証明の方を取り扱うことにする．

「含意論理式に解釈を与えることが35年証明の目的の一つである」というゲンツェンの論述を理解するためには，次のことに注意する必要がある．ゲンツェンは，その証明に入る前に，含意論理式 $A \supset B$ を論理式 $\neg(A \& \neg B)$ に翻訳して，式の中から含意論理式を除いてしまう*[4]．彼によれば，そのようにした理由は，直接扱う論理結合子を全称量化子 $\forall$・連言結合子 $\wedge$・否定 $\neg$ の三つに限ることで35年証明を単純にするためであった．まとめると，35年証明の中で含意論理式 $A \supset B$ は，$\neg(A \& \neg B)$ という形の論理式として扱われた．そのため，含意論理式 $A \supset B$ の解釈は，前者を後者へ翻訳することを通して定められた．つまり，その解釈は，$\neg(A \& \neg B)$ という形の論理式へ先に与えられた解釈と同一視された．

以上を背景とし，本稿はまず，35年証明の中で含意論理式を直接扱うことができると注意したい．そのために本稿は，35年証明の中で明確に提示されなかった，含意論理式を含む式に対する還元ステップを，ゲンツェン自身の手法を用いて明示する．これが本稿の目的の一つ目である．次に，このようにして拡張されたゲンツェンの還元ステップを用いれば，含意論理式の解釈を，他の論理式への翻訳なしに定められることを示したい．そのために，拡張された還元ステップに基づいて定義される「還元手続きの付与可能性（Die Angebbarkeit einer Reduziervorschrift）」を用いて，今度は本稿の立場から，自然数論の含意論理式に対する一つの解釈を提案する．これが本稿の目的の二つ目である．ただし，ゲンツェン自身もこの解釈を意図していたかどうかについては，本稿は論じることができないことを断っておきたい．

本稿の構成は以下である．1節では，含意論理式を含む式に対する還元ステップを，ゲンツェンの手法を用いて定義する．そして，この定義をもとに，再度ゲンツェンに倣って，還元手続きの付与可能性の定義を与える．2節では，還元手続きの付与可能性の概念を用いて，今度は本稿の立場から，自然数論の含意論理式に対する一つの解釈を提案する．最後に3節で，結論を提示し，そして今後の課題について簡潔に述べる．

1　含意論理式に対する還元ステップ

まず，本稿で用いられる自然数論の形式体系を簡潔に説明しよう．この体系は，35年証明の中でゲンツェンが用いた，式計算スタイルの自然演繹体系（[Gentzen 1936, pp. 512-515]）から，$\vee$および$\exists$の導入・除去規則，「反駁」規則（Schlußsregel der “Widerlegung”），二重否定除去規則を除くことで得られる．したがって，残る推論規則は，$\wedge$・$\forall$・$\supset$の導入・除去規則と数学的帰納法の規則である．体系の言語も，以上の変更に合わせて制限されるとする．論理式Aの否定$\neg A$は，ゲンツェンの習慣に倣って$A \supset 1=2$と定義する*[5]．「極小項（Minimalterm）」・「極小論理式（Minimalformel）」（[Gentzen 1936, p. 504]），および，「正しい（richtig）極小論理式」・「偽な（falsch）極小論理式」（[Gentzen 1974, p. 101]）という用語もゲンツェンと同じ意味で用いる．ただし，本稿は，ゲンツェンが用いなかった以下の表記も用いる．論理式Aの中の，変項xの自由な現れすべてに数項nを代入して得られる論理式を$A[x:=n]$と表す．また，論理式Aの中の極小項tの現われをすべて数項nで置き換えて得られる論理式を$A[t:=n]$と表す．論理式の有限列Γについても，同様の表記$\Gamma[x:=n]$および$\Gamma[t:=n]$を用いる．

次に，「式に対する還元ステップ」を定義する．各定義の冒頭にある番号は，その定義が現れる［Gentzen 1974］の節番号である．ただし，含意結合子に関する還元ステップはゲンツェンの定義には含まれないので，そ

のステップ名を書いている．また，ゲンツェンの体系においてギリシャ大文字は論理式の有限列を表すこと（空列であってもよい），ゲンツェン自身は「▷」という表現を用いていないことに注意されたい．

定義 1.1 （式に対する還元ステップ）．

任意の式 $\Gamma \rightarrow A$ を考え，その形に関する場合分けによって，$\Gamma \rightarrow A$ に対する還元ステップ

$$\Gamma \rightarrow A \quad \triangleright \quad \Gamma^* \rightarrow A^*$$

を次のように定義する．

13.11.　$\Gamma \rightarrow A$ に少なくとも一つの自由変項 x が現れるとき：勝手に選んだ数項 n について，

$$\Gamma \rightarrow A \quad \triangleright \quad \Gamma[x{:=}n] \rightarrow A[x{:=}n].$$

13.12.　$\Gamma \rightarrow A$ に自由変項は現れないが極小項 t が少なくとも一つ現れるとき：t の値となる数項 k について，

$$\Gamma \rightarrow A \quad \triangleright \quad \Gamma[t{:=}k] \rightarrow A[t{:=}k].$$

以下では，$\Gamma \rightarrow A$ には自由変項も極小項も現れない場合を考える．

13.21.　A が $\forall xB(x)$ という形のとき：勝手に選んだ数項 n について，

$$\Gamma \rightarrow \forall xB(x) \quad \triangleright \quad \Gamma \rightarrow B(n).$$

13.22.　A が $B\&C$ という形のとき：

$$\Gamma \rightarrow B\&C \quad \triangleright \quad \Gamma \rightarrow B$$

あるいは

$$\Gamma \rightarrow B\&C \quad \triangleright \quad \Gamma \rightarrow C$$

のいずれかを選ぶ．

$\supset$R.　A が $B \supset C$ という形のとき：

$$\Gamma \rightarrow B \supset C \quad \triangleright \quad \Gamma, B \rightarrow C.$$

以下では，$\Gamma \rightarrow A$ には自由変項も極小項も現れず，また，Γ には偽な極小論理式が現れない一方で A は偽な極小論理式である場合を考える．この

場合は，以下の三つの還元ステップの中で適用可能なものを勝手な順番で適用してよいとする．

13.51.　$\Gamma = \Gamma^*, \forall x B(x), \Gamma^{**}$であるとき：ある数項 k をとって，

$\Gamma^*, \forall x B(x), \Gamma^{**} \rightarrow A \quad \triangleright \quad B(k), \Delta \rightarrow A,$

ただし Δ は，Γ，あるいは，Γ^*とΓ^{**}をつなげた有限列のいずれかと等しい．

13.52.　$\Gamma = \Gamma^*, B \wedge C, \Gamma^{**}$であるとき：

$\Gamma^*, B \wedge C, \Gamma^{**} \rightarrow A \quad \triangleright \quad D, \Delta \rightarrow A,$

ただし，D は B あるいは C のいずれかである．また，Δ は，Γ, あるいは，Γ^*とΓ^{**}をつなげた有限列のいずれかと等しい．

$\supset$ L.　$\Gamma = \Gamma^*, B \supset C, \Gamma^{**}$であるとき：

$\Gamma^*, B \supset C, \Gamma^{**} \rightarrow A \quad \triangleright \quad \Delta \rightarrow B$

あるいは

$\Gamma^*, B \supset C, \Gamma^{**} \rightarrow A \quad \triangleright \quad C, \Delta \rightarrow A$

のどちらかを選ぶ．ただし，Δ は，Γ, あるいは，Γ^*とΓ^{**}をつなげた有限列のいずれかと等しい．

式$\Gamma \rightarrow A$ について，A は正しい極小論理式であるか，あるいは，Γの中に現れる少なくとも一つの論理式と A がともに偽な極小論理式であるかのいずれかであるとき，$\Gamma \rightarrow A$ は終形（Endform）であるという[*6]．以上の定義を踏まえ，「還元手続きの付与可能性」を次のように定義する．

定義 1.2 （還元手続きの付与可能性．Gentzen 1974, 13.6.）．

任意の式$\Gamma \rightarrow A$ について，

$\Gamma \rightarrow A$ に対して還元手続きが付与可能である：$\Leftrightarrow$

$\Gamma \rightarrow A$ に繰り返し還元ステップを適用する手続きで，次を満たすものが与えられている：（13.11.）・（13.21.）・（13.22.）・（$\supset$ L.）の適用においてどのような選択をしても，$\Gamma \rightarrow A$ を常に有限回の還元ステップで

終形の式に書き換える．

例 1.1.

式$\rightarrow \forall x(\forall y(x+y=y)\supset 1=2)\supset 1=2$ に対しては還元手続きが付与可能であり，このことを示す還元ステップの適用手続きは以下になる．（この式は$\rightarrow \neg\forall x\neg\forall y\ (x+y=y)$ と言い換え可能である．）まず，

$\rightarrow \forall x(\forall y(x+y=y)\supset 1=2)\supset 1=2$

$\triangleright\quad \forall x(\forall y(x+y=y)\supset 1=2)\rightarrow 1=2$　（⊃ R.）

$\triangleright\quad \forall y(0+y=y)\supset 1=2\rightarrow 1=2$　　　（13.51.）

と還元ステップを適用する．次に，（⊃ L.）を適用し，この適用においてどの選択をした場合でも，有限回の還元ステップで終形の式にたどり着ければよい．次の式

$1=2\rightarrow 1=2$

を選択した場合は，すでに終形の式が得られている．もう一方の式

$\rightarrow \forall y(0+y=y)$

を選択した場合を考えよう．この場合はまず，勝手な数項 n を選んで（13.21.）を適用する：

$\rightarrow \forall y(0+y=y)\quad \triangleright\quad \rightarrow 0+n=n.$

あとは後者の式に（13.12.）を適用すれば，先の（13.21.）の適用においてどのような選択をしていても終形の式が得られる．

2　還元手続きの付与可能性と含意解釈

本稿の立場から含意解釈を提案する前に，含意解釈を与えることが無矛盾性証明の主要な課題であるとするゲンツェンの論述を見ておきたい．その論述は以下である．

　この命題［$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$］は以下を意味するのに他ならない：ひとたび命題$\mathfrak{A}$が証

> 明されるなら，そこから続いて命題$\mathfrak{B}$を証明することを許すような証明を，われわれは手にしている．[…]
>
> $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$のこの解釈について，私は，前提$\mathfrak{A}$から$\mathfrak{B}$への与えられている証明はすでに許容可能と認められた推論形式のみを含んでいると仮定した．しかし，そのような証明もまたさらに$\supset$に関する推論を含んでいることはありうるだろう，するとそのときわれわれの解釈は機能しなくなる．というのも，$\supset$に関する推論を，当の推論形式の許容可能性をすでに前提している$\supset$の解釈によって正当化する（begründen）ことは循環であるからである．そこで，その証明の中に現れている$\supset$に関する推論は前もって正当化されなければならない．しかし，このことは，とりわけ$\mathfrak{A}$自身が$\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$という形をしている場合，それ自身難点をもつ．その場合，$\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$に意味（Sinn）を与えうるような$\mathfrak{C}$から$\mathfrak{D}$への証明はまったく与えられない．
>
> この難点に対処するために，より複雑な解釈規則が提示されなければならない．ここに，IV節における以下の無矛盾性証明の主要な課題がある．
>
> （[Gentzen 1936, p. 530]．最後の文における強調のみ引用者による．）[*7]

この箇所で，ゲンツェンははじめに，自然数論の中の含意論理式$A \supset B$に対する次のような解釈を提示している．それは，$A \supset B$とは「前提Aから結論Bへの証明が与えられている」ということを意味する，というものである．続いて，ゲンツェンは，この含意解釈はある循環に直面すると主張する．そして，この循環に陥らない解釈を含意論理式に対して与えることが，自身の無矛盾性証明の主要な課題であると最終的に述べている．ここで循環が主張された含意解釈とは詳細にはどのような解釈であり，それを主張するゲンツェンの議論はどのようなものか，という問題は単純なものではなく，本稿は論じることができない．本稿が着目しているゲンツェンの論述は，以上で確認できたとしよう．

それでは，前節で定義した還元手続きの付与可能性の概念を用いて，本

稿の立場から，含意論理式に対する一つの解釈を提案したい．それは次のものである．

（IM）論理式 $A \supset B$ は正しい⇔式 $A \to B$ に対して還元手続きが付与可能である．

この解釈は次のようなアイデアによって与えられている．それは，含意論理式 $A \supset B$ を式 $A \to B$ として捉え，後者の正しさの基準によって前者の正しさの基準を定める，というものである．順を追って説明しよう．まず，含意論理式 $A \supset B$ を式 $A \to B$ として捉える[*8]．次に，このことに基づいて，含意論理式 $A \supset B$ が正しいのは式 $A \to B$ が正しいときと定める．最後に，還元手続きの付与可能性の概念を用いて，式の正しさの基準を次のように定める．

（SE）式 $\Gamma \to A$ は正しい⇔式 $\Gamma \to A$ に対して還元手続きが付与可能である．

以上が，（IM）を与えるアイデアである．式 $\Gamma \to A$ は「仮定 Γ のもとで A が成り立つ」という仮定的判断を表すため[*9]，（IM）においては，仮定的判断の正しさの基準でもって，含意の意味が説明されていると言える．

ここで，次のことに注意されたい．（IM）は，35年証明の中のゲンツェンのやり方とは異なり，含意論理式を他の論理式に翻訳することなしに与えられている．また，（IM）は，含意論理式を含む式に対する還元ステップの定義によって可能になる解釈である．（IM）によれば，含意論理式 $\forall x(\forall y(x+y=y) \supset 1=2) \supset 1=2$ は「式 $\forall x(\forall y(x+y=y) \supset 1=2) \to 1=2$ に対して還元手続きが付与可能である」ことを意味するが，もし含意論理式を含む式に対する還元ステップが定義されていなかったら，このような

解釈を可能にする還元手続きの付与可能性の概念は得られない.

本節を閉じる前に一点補足しておこう.(SE)によって式の正しさを定めるということは,還元手続きの付与可能性をインフォーマルな正しさの概念の代理として用いるということである.さらに言い換えれば,このことは,還元手続きの付与可能性の概念でもって,35年証明の中のテクニカルな意味での「式の正しさ」を表す,ということである*[10].(SE)自体は,ゲンツェン自身も述べていることであると思われる.

> 以下において説明される,式に対する「還元手続きの付与可能性」の概念は,内容的な正しさの概念(inhaltlicher Richtigkeitsbegriff)の形式的な代理としてわれわれの役に立つ.([Gentzen 1974, p. 100],[Gentzen 1936, p. 536].)

しかし,前述のように,(IM)もゲンツェンによって念頭に置かれていたかどうかについては本稿は論じることはできない.

3　結論および今後の課題

本稿の内容は次のようにまとめられる.まず1節において,35年証明の中で明確に提示されなかった,含意論理式を含む式に対する還元ステップを,ゲンツェン自身の手法を用いて明示した.さらに同節の中で,この点で拡張されたゲンツェンの還元ステップを用いて,還元手続きの付与可能性を定義した.次に,2節においては,この還元手続きの付与可能性の概念を用いて,今度は本稿の立場から,自然数論の含意論理式に対する一つの解釈を提案した.

今後の課題としては次がある.それは,本稿の含意解釈が,ゲンツェンにより主張された循環に陥らないことの検証である.このことによって,本稿の含意解釈の内実をより詳細に明らかにできるし,また,循環を主張するゲンツェンの議論についての理解をさらに深めることもできる.この

議論に関する先行研究としては，［Okada 1988］，［Okada 2008］および［Sieg 2012］が挙げられる．これらを手がかりに，本稿の含意解釈が，ゲンツェンの言う循環に陥らないことを示すことを今後の課題として，本稿を閉じたい．

註

*1 第一版の証明の英訳は，抄訳ではあるが，1969年出版のゲンツェンの英訳論文集（［Gentzen 1969］）にすでに収録されていた．第一版証明の取り下げの経緯について詳しくは，［Menzler-Trott 2007, pp. 57–62］を参照されたい．

*2 もちろん，35年証明および第二版証明は数学的な興味も引くものであり，すでに多くの先行研究がある．35年証明の数学的興味について論じたものとしては，［Bernays 1970］，［Kreisel 1971］，［Negri 1980］，［Coquand 1995］，［Pallares 2004］，［Tait 2005］，［von Plato 2009b］，［Akiyoshi 2010］，［Tait 2015］がある．第二版証明の数学的興味について論じたものとしては，［Yasugi 1980］，［Kogan-Bernstein 1983］，［SP 1995］，［Buchholz 2015］がある．

*3 ［Gentzen 1936, p. 530］．この論述は，1935年当時の論文に含まれていたが，その論文の抄録となっている［Gentzen 1974］においてはこの論述はカットされている．一方で，［Gentzen 1936］はその1935年当時の論文の改訂版であり，1935年論文が含む，無矛盾性証明の意義・目的についての論述の大部分をそのまま含むため，［Gentzen 1936］にはこの論述が現れている．（1935年論文と［Gentzen 1936］の対応については，［Gentzen 1969, ch. 4, Appendix］を参照されたい．）このように，本稿が引用・参照する［Gentzen 1936］の箇所は，すべて1935年論文にも現れていた箇所である．そのため，本稿が［Gentzen 1936］の節およびページにのみ言及している場合でも，実際は1935年論文の対応箇所にも言及していることに注意されたい．

ゲンツェンが35年証明および第二版証明に「含意解釈の付与」という目的を帰属させた理由は，この目的を提示する論述に先立つ議論の中で述べられている．それは，含意推論が矛盾を導かないことを問題なく示すように見える含意論理式の解釈が，実は厄介な循環を含むとゲンツェンは考えたからであった（［Gentzen 1936, §11］）．35年証明および第二版証明が「含意解釈の付与」を目的とするに至ったこうした経緯は，近年，［Sieg 2012］によってより詳細に説明されている．ジークは，ゲンツェンの未公刊の遺稿に対する

精査を通して，この経緯に解明を与えた（[Sieg 2012, §§5.6–5.9]）．一方で，ゲンツェンにより循環が主張された含意解釈およびその循環を主張する彼の議論については，［Okada 1988, pp. 200–201］,［Okada 2008, pp. 3–4］において詳細な説明が与えられている．また，［Tait 2015］もまた，ゲンツェンの主張する循環についての見解を含んでいる．

*4 [Gentzen 1974, §12]．同様のことは第二版証明についてもあてはまる（[Gentzen 1936, §12]）．

*5 ［Gentzen 1936, p. 530］.

*6 ［Gentzen 1974, p. 101］.

*7 注*3で述べたように，この論述を取り上げたのは本稿が最初ではなく，［Okada 1988, pp. 200–201］,［Okada 2008, pp. 3–4］,［Sieg 2012, p. 120］,［Tait 2015］においてすでにこの論述が取り上げられている．

*8 当然ゲンツェンも，含意論理式と式の関係はこのような捉え方を可能にすると考えている（[Gentzen 1936, pp. 512–513]）．

*9 ［Gentzen 1936, pp. 512–513］.

*10 ［秋吉・高橋 2013］および［Takahashi］によれば，（SE）は式に対する解釈を与えている．つまり，（SE）によって式の正しさの基準が説明されることで，式に対する解釈が定められる．さらに，それらの論文によれば，35年証明の主要補題は，自然数論の形式体系がこの解釈に関して健全（sound）であることを述べるものである：

$\Gamma \to A$ を任意の式とする．このとき，

$\Gamma \to A$ は証明可能である $\Rightarrow$ $\Gamma \to A$ に対して還元手続きが付与可能である．

式 $\to 0=1$ に対しては還元手続きが付与できないことが示せるゆえに，自然数論の無矛盾性はここから帰結する．

参考文献

［Akiyoshi 2010］Akiyoshi, Ryota, “Gentzen's First Consistency Proof Revisited”, in *CARLS Series of Advanced Study of Logic and Sensibility Vol. 4*, Keio University (2010).

［秋吉・高橋 2013］秋吉亮太，高橋優太,「ゲンツェンを読む――三つの無矛盾性証明の統一的解釈――」,『科学基礎論研究』, **41**（2013）1–22.

［Bernays 1970］Bernays, Paul, “On the original Gentzen consistency proof for number theory”, in *Intuitionism and proof theory*, A. Kino, J. Myhill, and R. Vesley (eds.), North-Holland, Amsterdam (1970).

[Buchholz 2015] Buchholz, Wilfried, "On Gentzen's first consistency proof for arithmetic", to appear in R. Kahle and M. Rathjen, (eds.), *Gentzen's Centenary: The Quest for Consistency*.

[Coquand 1995] Coquand, Thierry, "A Semantics of Evidence for Classical Arithmetic", *The Journal of Symbolic Logic*, **60** (1995), 325–337.

[Gentzen 1936] Gentzen, Gerhard, "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Annalen*, **112** (1936), 493–565.

[Gentzen 1938a] Gentzen, Gerhard, "Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforshung", *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, **4** (1938), 5–18.

[Gentzen 1938b] Gentzen, Gerhard, "Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie", *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, **4** (1938), 19–44.

[Gentzen 1943] Gentzen, Gerhard, "Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfallen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Annalen*, **119** (1943), 140–161.

[Gentzen 1969] Szabo, M.,(ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam (1969).

[Gentzen 1974] Gentzen, Gerhard, "Der erste Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Zahlentheorie", *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, **16** (1974), 97–118.

[Gödel 1995] Gödel, Kurt, *Collected Works. III: Unpublished essays and lectures*, S. Feferman, J. Dawson, S. Kleene, G. Moore, R. Solovay, and J. van Heijenoort (eds.), Oxford University Press, Oxford (1995).

[Heyting 1934] Heyting, Arend, "Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie", *Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgebiete*, **3** (1934).

[Kogan-Bernstein 1983] Kogan-Bernstein, L. M., "Simplification of Gentzen's reductions in classical arithmetic", *Journal of Soviet Mathematics*, **22** (3) (1983), 1305–1310.

[Kreisel 1971] Kreisel, Georg, "Review: The Collected Papers of Gerhard Gentzen. by M. E. Szabo", *The Journal of Philosophy*, **68** (1971), 238–265.

[Menzler-Trott 2007] Menzler-Trott, E., *Logic's lost genius: the life of Gerhard Gentzen*, translated by Craig Smoryński and Edward Griffor, American Mathematical Society (2007).

[Negri 1980] Maurizio Negri, "Constructive sequent reduction in Gentzen's first consistency proof for arithmetic", in Maria Luisa Dalla Chiara,(ed.), *Italian Studies in the Philosophy of Science*, pp. 153–168, Reidel, Dordrecht, (1980).

[Okada 1988] Okada, M., "On a Theory of Weak Implications", *The Journal of Symbolic Logic*, **53**(1988), 200–211.

[Okada 2008] Okada, M., "Some remarks on difference between Gentzen's finitist and Heyting's intuitionist approaches toward intuitionistic logic and arithmetic", *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, **16** (2008), 1–18.

[Pallares 2004] Pallares, M. F., "Extending the First Gentzen's Consistency Proof to the Intuitionistic Case", *Logic Journal of the IGPL*, **12**(6) (2004), 549–560.

[von Plato 2009a] von Plato, Jan, "Gentzen's logic", in D. Gabbay and J. Woods, (eds.), *Handbook of the History of Logic. Volume 5. Logic from Russell to Church*, pp. 667–721, Elsevier (2009).

[von Plato 2009b] von Plato, Jan, "Gentzen's original proof of the consistency of arithmetic revisited", in G. Primiero and S. Rahman (eds.), *Acts of Knowledge—History, Philosophy and Logic*, pp. 151–171, College Publications, London (2009).

[Sieg 2012] Sieg, W., "In the Shadow of Incompleteness: Hilbert and Gentzen", in Dybjer, P., Lindström, S., Palmgren, E., Sundholm, G. (eds.), *Epistemology versus Ontology: essays on the philosophy and foundations of mathematics in honour of Per Martin-Löf*, Dordrecht; London, Springer (2012), pp. 87–127.

[SP 1995] Sieg, Wilfried, and Parsons, Charles, "Introductory note to **1938a*", in [Gödel 1995, pp. 62–85].

[Tait 2005] Tait, William W., "Gödel's reformulation of Gentzen's first consistency proof for arithmetic: the no-counterexample interpretation", *The Bulletin of Symbolic Logic*, **11**(2005), 225–238.

[Tait 2015] Tait, William W., "Gentzen's original consistency proof and the Bar Theorem", to appear in R. Kahle and M. Rathjen, (eds.), *Gentzen's Centenary: The Quest for Consistency*.

[Takahashi] Takahashi, Y., "On the Intuitionistic Background of Gentzen's 1935/36 Consistency Proofs and Their Philosophical Aspects", submitted.

[Yasugi 1980] Yasugi, Mariko, "Gentzen reduction revisited", *Publications of RIMS*, **16**(1980), 1–33.