Title	微視的法則と巨視的現象における時間的な非対称性と不可逆性について
Sub Title	On time asymmetry and non-invertibility in microscopic laws and macroscopic phenomena
Author	高村, 友也(Takamura, Tomoya)
Publisher	三田哲學會
Publication year	2010
Jtitle	哲學 No.124 (2010. 3) ,p.27- 51
JaLC DOI	
Abstract	This is a review of the problem of thermodynamical arrow of time, and includes often-discussed arguments and some comparatively recent papers whose claims are not mainstream. The mathematical instrument that describes the framework of the time's arrow problem is confirmed and the logical relation is formalized, where we distinguish time asymmetry and time noninvertibility. We review and critically investigate some papers that possibly can be conceptual foundations of the mathematical and logical relations. Especially, we focus on the following novel approaches: time symmetry of stochastic processes without considering constraint conditions and the law of entropy increase as explicans, i.e., what explains something.
Notes	投稿論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000124-0027

投稿論文

微視的法則と巨視的現象における時間的な非対称性と不可逆性について

高　村　友　也*

On Time Asymmetry and Non-invertibility in Microscopic Laws and Macroscopic Phenomena

Tomoya Takamura

This is a review of the problem of thermodynamical arrow of time, and includes often-discussed arguments and some comparatively recent papers whose claims are not mainstream. The mathematical instrument that describes the framework of the time's arrow problem is confirmed and the logical relation is formalized, where we distinguish time asymmetry and time non-invertibility. We review and critically investigate some papers that possibly can be conceptual foundations of the mathematical and logical relations. Especially, we focus on the following novel approaches: time symmetry of stochastic processes without considering constraint conditions and the law of entropy increase as explicans, i.e., what explains something.

1.　Introduction

日常的に頻繁に経験される時間非対称な現象（例えば，紅茶に入れるミルクの拡散）がある一方で，極めてよく確証された時間対称的な基礎力学

* 慶應義塾大学大学院文学研究科博士課程（哲学），日本学術振興会特別研究員

が存在する．個々の粒子が時間対称的な基礎力学に則って運動するとしたら，その総体であるとされる日常世界の非対称性はどこからやってくるのだろうか．これは，熱力学的な時間の矢の問題と呼ばれる．本稿は，この時間の矢の問題に関する一つのレビューである．まず，熱力学的非対称性を統計力学的に扱う際に共通した数学形式，いわゆる時間斉次的 Markov 連鎖において，いかにしてエントロピー増大則が導出されるかを確認する（第 2 節）．さらに，時間の矢の問題の起源を探るために，そもそも時間斉次的 Markov 連鎖とは何であったか，その一般形式を確かめ（第 3 節），その数学的形式の論理的な枠組みを定式化する（第 4 節）．その上で，その論理関係に対してどうアプローチするかという観点から，いくつかの研究を紹介する．時間の矢の問題が哲学的に扱われる際の一つの典型的な議論（第 5 節）を紹介した後，フォーク非対称性に関する議論（第 7 節）や，本稿では特に，若干主流から逸れるアプローチをいくつか検討したい（第 6, 8 節）.

2.　エントロピー増大則

統計的な手法を用いて熱力学の第二法則，いわゆるエントロピー増大則を導くに際して，その概念的な根拠付けは様々に提案されてきた．一方で，それらの概念的考察が辿り着く数学的装置はほとんど一致している．Uffink[16) の言葉を借りれば，「この種の非平衡統計力学に適用される数学的形式の驚くべき一致 (p. 1039)」が存在する．時間斉次的 Markov 連鎖（time-homogeneous Markov chains，以後 HMC と略記する）である．時間斉次性は，あるいは時間並進不変性と言い換えてもよい．本節では，HMC とエントロピー増大則との関係を整理する．まず，二つの確率分布どうしの類似の度合いの尺度となる相対エントロピーを定義する．続いて，定常分布に対する HMC の相対エントロピー増大則を示す．最後にその HMC の絶対エントロピー増大則を導く.

確率過程 $\{X_t\}$ を，遷移確率行列 $\hat{P}=\{p_{ij}\}$，$i, j \in S$，および初期分布 $\boldsymbol{\mu}_0=\{\mu_0(i)\}$，$i \in S$ によって特徴づけられる HMC とする．ただし，S は離散的な状態空間，t は時間パラメータで，本稿では離散時間 $t \in \mathbb{Z}$ を考える．さらに，$\{X_t\}$ のエルゴード性を仮定する．したがって，$\{X_t\}$ には定常分布 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi(i)>0\}$，$i \in S$ が一意的に存在する．ただし，分布の非負性は，状態空間が有限の場合には無条件に，状態空間が無限の場合には $p_{ij}>0$ を仮定することで満たされる．証明は初等的な確率過程のテキスト（たとえば参考文献 5 など）を参照のこと．

定義．確率分布 $\boldsymbol{\mu}=\{\mu(i)\}$，$\boldsymbol{\nu}=\{\nu(i)\}$，$i \in S$ に関して，

$$H(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})=-\sum_{i \in S} \mu(i) \ln \frac{\mu(i)}{\nu(i)} \tag{1}$$

を $\boldsymbol{\nu}$ に対する $\boldsymbol{\mu}$ の相対エントロピーという．ただし，$\nu(i)>0$ とする．

相対エントロピーは情報理論において Kullback-Leibler 情報量[7]と呼ばれるものであり，分布の類似性に関する一つの尺度となっている．実際，$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\nu}$ のとき $H(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ は最大値 0 をとる．定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ に対する分布の時系列 $\boldsymbol{\mu}_t$ の相対エントロピーの $\{H(\boldsymbol{\mu}_t, \boldsymbol{\pi})\}$ に対して，以下が成り立つ．

定理．

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad H(\boldsymbol{\mu}_t, \boldsymbol{\pi}) \leq H(\boldsymbol{\mu}_{t+1}, \boldsymbol{\pi}) \tag{2}$$

証明は，一般には確率空間上で行うべきものだが，根元集合と状態集合が一対一に対応していると考え，ここでは状態空間 S に関して行う．また，連続時間や連続状態のケースを含め，詳しくは Mackey and Lasota[8] などを参照のこと．

Proof. $\{S_1, S_2, \ldots\}$ を S の分割とする．一般に，S 上の二つの確率分布 $\boldsymbol{\mu}=\{\mu(i)>0\}$，$\boldsymbol{\nu}=\{\nu(i)>0\}$，$i \in S$，および任意の k に対して，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in S_k}\mu(i)\ln\frac{\mu(i)}{\nu(i)}-\left\{\sum_{i\in S_k}\mu(i)\right\}\ln\frac{\{\sum_{i\in S_k}\mu(i)\}}{\{\sum_{i\in S_k}\nu(i)\}}\\
&=\sum_{i\in S_k}\left[-\ln\frac{\nu(i)\{\sum_{i\in S_k}\mu(i)\}}{\mu(i)\{\sum_{i\in S_k}\nu(i)\}}\right]\\
&\geq\sum_{i\in S_k}\left[1-\frac{\nu(i)\{\sum_{i\in S_k}\mu(i)\}}{\mu(i)\{\sum_{i\in S_k}\nu(i)\}}\right]\\
&=\sum_{i\in S_k}\mu(i)-\sum_{i\in S_k}\mu(i)\\
&=0
\end{aligned}\tag{3}$$

が成り立つ．ただし，$-\ln x\leq 1-x$ を用いた．k に関する和をとって，

$$\sum_{i\in S}\mu(i)\ln\frac{\mu(i)}{\nu(i)}\geq\sum_k\left\{\sum_{i\in S_k}\mu(i)\right\}\ln\frac{\{\sum_{i\in S_k}\mu(i)\}}{\{\sum_{i\in S_k}\nu(i)\}}\tag{4}$$

これを用いて，

$$\begin{aligned}
H(\boldsymbol{\mu}_t,\boldsymbol{\pi})&=-\sum_{i\in S}\mu_t(i)\ln\frac{\mu_t(i)}{\pi(i)}\\
&=-\sum_{j\in S}\sum_{i\in S}\mu_t(i)p_{ij}\ln\frac{\mu_t(i)p_{ij}}{\pi(i)p_{ij}}\\
&\leq-\sum_{j\in S}\left\{\sum_{i\in S}\mu_t(i)p_{ij}\right\}\ln\frac{\{\sum_{i\in S}\mu_t(i)p_{ij}\}}{\{\sum_{i\in S}\pi(i)p_{ij}\}}\\
&=H(\boldsymbol{\mu}_{t+1},\boldsymbol{\pi})
\end{aligned}\tag{5}$$

□

さて，熱力学第二法則においていわゆるエントロピーと呼ばれているものは，次の絶対エントロピーに相当する．

定義．確率分布 $\boldsymbol{\mu}$, $i\in S$ に関して，

$$H(\boldsymbol{\mu})=-\sum_{i\in S}\mu(i)\ln\mu(i)\tag{6}$$

を $\boldsymbol{\mu}$ の絶対エントロピーと呼ぶ．

定常分布の一様性 $\boldsymbol{\pi}=1/m$（m は正の実数）を仮定すると，上の定理よ

り，

$$-\sum_{i\in S}\mu_t(i)\ln\mu_t(i)=H(\boldsymbol{\mu}_t,\pi)+\ln m\leq H(\boldsymbol{\mu}_{t+1},\boldsymbol{\pi})+\ln m$$
$$=-\sum_{i\in S}\mu_{t+1}(i)\ln\mu_{t+1}(i) \tag{7}$$

これは絶対エントロピー $H(\boldsymbol{\mu}_t)$ の増大則を意味する．これがいわゆる熱力学第二法則に相当する．

3.　時間斉次的 Markov 連鎖とは

それでは，そもそも HMC とは何だろうか．本節では，「遷移確率行列 $\hat{P}$，初期条件 $\boldsymbol{\mu}_0$ の HMC $\{X_t\}$」をもう少し掘り下げてみたい．一般に（時間的に斉次とは限らない）確率過程とは，確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上で定義された確率変数列 $\{X_t\colon\Omega\to S\}$ である．ただし，Ω は根元集合，$\mathscr{F}$ は Ω 上の σ-集合族，$P\colon\mathscr{F}\to[0,1]$ は $\mathscr{F}$ 上の確率測度であり，また，離散時間，離散状態を考えている．特に，条件付き確率分布が以下の Markov 性を満たす確率過程を，Markov 連鎖という．

定義．任意の状態 $i_a,\ldots,i_b,i_c,\ldots,i_d$ と任意の時刻 $t_a<\cdots<t_b<t_c<\cdots<t_d$ に対して

$$P_{t_d,\ldots,t_c|t_b,\ldots,t_a}(i_d,\ldots,i_c|i_b,\ldots,i_a)=P_{t_d,\ldots,t_c|t_b}(i_d,\ldots,i_c|i_b) \tag{8}$$

を満たすことを，*Markov* 性という．ただし，たとえば右辺は，時刻 t_b において状態 i_b であったという条件付きで，時刻 $t_d,\ldots,t_c$ において状態 $i_d,\ldots,i_c$ である確率を表す．

確率過程が Markov 的であるとき，上の定義は時刻の順序を反転 $(t_a>\cdots>t_b>t_c\cdots>t_d)$ させても同様に成り立つことが容易に証明できる．つまり，ある確率過程は，前向きかつ後ろ向きに Markov 的であるか，それとも前向きにも後ろ向きにも Markov 的でないか，のいずれかである．したがって，その確率過程が Markov 的であるということ自体には時間の向きは無い．ところが，斉次性 (homogeneity) については一

般にこのような時間反転に対する不変性が成り立たない．

定義．任意の状態 i, j と任意の時刻 $s<t$ に対して

$$P_{t|s}(j|i)=P_{t-s}(j|i) \tag{9}$$

が成り立つ時，その *Markov* 連鎖は前向きに斉次的であるという．

特に，単位時間における条件付き確率 $P_1(j|i)=p_{ij}$ を前向き遷移確率と呼び，これを行列によって整理したものが前向き遷移確率行列 $\hat{P}$ である．同様に，

定義．任意の状態 i, j と任意の時刻 $s<t$ に対して

$$P_{s|t}(j|i)=P_{s-t}(j|i) \tag{10}$$

が成り立つ時，その *Markov* 連鎖は後ろ向きに斉次的であるという．

特に，単位時間における条件付き確率 $P_{-1}(j|i)=q_{ij}$ を後ろ向き遷移確率と呼び，これを行列によって整理したものを新たに後ろ向き遷移確率行列と呼び $\hat{Q}$ と書く．したがって，$\hat{P}$ と $\hat{Q}$ に対応して，HMC には前向き HMC と後ろ向き HMC との二種類があることになる．両者が必ずしも同値で無いことは，以下の関係式によってわかる．

$$P_{t|s}(j|i)=\frac{P_{t,s}(j,\, i)}{P_t(i)}=\frac{P_t(j)}{P_s(i)}P_{s|t}(i|j) \tag{11}$$

ただし，$P_{t,s}(j, i)$ は時刻 s と t における結合確率分布である．式 (11) はいわゆる Bayes の定理である．すなわち，前向き条件付き確率と後ろ向き条件付き確率とが確率分布に依存した関係となっている．したがって，たとえ $P_{t|s}(j|i)$ が時間幅 $t-s$ にしか依存しなかったとしても，後ろ向き遷移確率のほうは s と t の単一時刻の確率分布に依存してしまうので，一般に斉次的にならない．メタ数学的には，この事実は $\{\hat{P}^t\}$ の半群性によって表現されている．すなわち，$\{\hat{P}^t\}$ は，逆元 $\hat{P}^{-t}$ によって $\hat{P}^t P^{-t}=\hat{I}$（$\hat{I}$ は単位行列）とすることができず，$\hat{P}^t\hat{P}^s=\hat{P}^{s+t}, s, t\geq 0$（ただし，$\hat{P}^0$ は $\hat{I}$）を満たすのみである．$\{\hat{P}^t\}$ の半群性を，それによって構成される HMC の不可逆性 (non-invertibility) ともいう．ちなみに，$\hat{P}^t\hat{P}^s=\hat{P}^{s+t}$（Chapman-

Kolmogorov の方程式と呼ばれる）と斉次的 Markov 性との同値性も容易に証明可能であり，実際上の HMC の構成は $\hat{P}^t\hat{P}^s = \hat{P}^{s+t}$ を満たす遷移確率を見つけることによって為されることが多い.

4.　何を説明すべきか

第2節では，ある遷移確率行列 $\hat{P}$（および初期確率分布 $\boldsymbol{\mu}_0$）によって特徴づけられた HMC に対して，適当な条件下でエントロピー増大則が導かれることを見た．一方，第3節によれば，HMC は，前向き遷移確率行列 $\hat{P}$ によって特徴づけられている場合と，後ろ向き遷移確率行列 $\hat{Q}$ によって特徴づけられている場合とがあり，それぞれ前向き HMC と後ろ向き HMC とを構成する．したがって，第2節の議論によって前向きにエントロピーが増大することを示すためには，その HMC が $\hat{P}$ によって特徴づけられていることが決定的に重要である．実際，相対エントロピー増大則の証明を振り返ってみれば，式 (5) において $\mu_t(i)p_{ij} = \mu_{t+1}(j)$ としている点が前向き増大則の証明のために本質的であり，もし HMC が後ろ向き遷移確率行列によって特徴づけられていたとすれば，同様の証明を辿り，後ろ向き増大則，すなわちエントロピー減少が証明されていたことになる.

ここで，これまでに出てきた時間の向きに関する概念を整理する．まず，HMC は，それが前向きであろうと後ろ向きであろうと一般に不可逆 (non-invertible) であり，エントロピーの勾配を説明する．このように，どちらでもよいがどちらかの向きに非対称であることを，本稿では「不可逆」と呼ぶことにする．したがって，第2節が示していることは，

不可逆的（微視的）確率法則　⇒　不可逆的（巨視的）統計現象　(12)

とまとめられる．第3節はさらに，エントロピー増大則を導出するためには HMC であるだけでは不十分で，それが前向き HMC でなければならないことを示している．このように，どちらか一方の特定の向きに非対称

であることを，本稿ではそのまま「非対称」と呼ぶことにする．したがって，

非対称的（微視的）確率法則　⇒　非対称的（巨視的）統計現象　(13)

とまとめることができる．

以上が，熱力学的な時間の矢に関する数学的・論理的関係である．次節以降，(12) と (13) の説明図式を如何に料理するかという観点に従って，哲学的・物理的な様々な角度からの議論を検討してみたい．

5.　非可逆的法則は非対称的現象を説明しない

標準的な（非平衡）統計力学のテキスト（たとえば参考文献 9, 11, 17）の多くは，関係 (12) のような説明方式をとっている．(12) において問題となるのは，如何にして HMC を概念的に導入するかである．この際，斉次的 Markov 性こそが熱力学第二法則のルーツであると主張されることがしばしばであるが，第 3 節で見たとおり，Markov 性自体に時間の向きは無い．この事実，すなわち (12) が不可逆性の説明であって非対称性の説明ではないことに対して，自覚的な場合や無自覚的な場合，あるいはそもそも (12) の説明を不十分であると考えない，つまり非対称性の説明 (13) の必要性が何らかの理由によって疑似問題であると考える場合などがあるだろう．いずれにしても，科学哲学において熱力学的な時間の矢の問題に対峙する際の一つの柱となっているのが，(12) と (13) の間隙を指摘し，それをどのような形で埋めうるのかを模索する方向である（たとえば参考文献 16, 13）．

HMC に対する概念的根拠は主に二種類ある．一つは，知識の不足あるいは計算の限界による系の粗視化 (coarse graining)．いま一つは，厳密な孤立系が得られないことによる外部からの絶え間ない擾乱 (noise) である．たとえば前者をスケッチすると以下のようになる．

位相空間 Γ 上の粒子集団を考え，その統計分布を $\boldsymbol{\mu}$ とする．各位相点

$\gamma \in \Gamma$ は通常の Hamilton 力学によって時間発展する．それに従って，統計分布の時間発展は $\boldsymbol{\mu}_t = \{\mu(\gamma_t)\}$ となる．次に位相空間 Γ の分割 $\Gamma = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ を考え，A_i 上の位相点の平均を $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle_i$ と書くことにする．このとき，その分割によって粗視化された統計分布 $\boldsymbol{\mu}^{cg}$ は

$$\mu^{cg}(\gamma) = \sum_i \langle \boldsymbol{\mu} \rangle_i \, \mathbf{1}_{A_i}(\gamma) \tag{14}$$

によって与えられる．ただし，$\mathbf{1}_{A_i}$ は A_i の定義関数である．$\hat{P}_t$ を $\boldsymbol{\mu}^{cg}$ の時間発展演算子とすると，$\boldsymbol{\mu}_t^{cg} = \hat{P}_t \boldsymbol{\mu}_0^{cg}$．また，$\hat{Q}_t$ を $\boldsymbol{\mu}$ の時間発展演算子とすると，$\hat{P}_t$ が斉次的 Markov 性を得るためには，粗視化を以下のように繰り返し行わねばならない．すなわち，（$\boldsymbol{\mu}_{t+s}^{cg} = (\hat{Q}_t \boldsymbol{\mu}_s)^{cg}$ ではなく，）$\boldsymbol{\mu}_{t+s}^{cg} = (\hat{Q}_t \boldsymbol{\mu}_s^{cg})^{cg}$．このようにすれば，$\hat{P}_{s+t} = \hat{P}_t \hat{P}_s$ が満たされ，$\hat{P}_t$, $t \geq 0$ は斉次 Markov 的となる．

このような HMC の概念的導出について疑問点は多い．たとえば，どの程度の位相分割（粗視化）を行うべきか，あるいはなぜ粗視化は繰り返されねばならないのか．これらの点を正当化するのは結局，実験との整合性ということになっているようである[17)]．時間の向きに関して問題となるのは，この議論が過去に向かってではなく未来に向かって為されている点である．位相点の時間発展 $\hat{Q}_t$ は時間対称的であるので，位相点自体は時間的に負の方向へ時間発展することができる．したがって，過去における状態の粗視化を繰り返すことで同じ議論によって後ろ向き遷移確率行列 $\hat{P}_t$, $t \leq 0$ が得られ，後ろ向き HMC となる．

では，未来に対してのみ粗視化を行う概念的理由はあるだろうか．たとえば Price[13)] は，この答えが否定的であることを力説している:「全く同じ議論が気体の過去の可能的な状態を考えた場合にも成り立つ．というのも，統計的議論は単に可能な組合せの数を数えているだけであり，時間の向きには無関係だからである．(p. 30)」この点は，より単純な設定，たとえば右に進む確率が 1/2，左に進む確率が 1/2 の一次元対称ランダム

ウォークを考えればさらに明確である．ある時刻 t に粒子が原点にいることを確認したとしよう．次の時刻 $t+1$ に粒子がそれぞれ 1/2 の確率で $+1$, -1 に進むと予測するのとまったく同様に，前の時刻 $t-1$ には粒子がそれぞれ 1/2 の確率で $+1$, -1 にいたと遡及予測される．ただし，これは粒子が無限個あると仮定した場合の理想的な議論である．上の位相空間の議論においては，粒子の数が多くなればなるほど，「単に可能な組合せの数を数える（そしてそれらに等確率を与える）だけ」という全く情報が無いような理想的な状態に近づく．

結局，粗視化は不可逆性を説明しても，非対称性を説明しない．同様な批判はしばしば，外部からの擾乱に関しても為されている．これらのような否定的な結論を認めるとしたら，実際に観察される非対称性を説明するために，他にどのような道があるだろうか．

Price[13) は，「要するに，問題なのは，宇宙がどのようにして高エントロピー状態に向かうかではなく，どのようにして低エントロピー状態から始まったのか，ということである．(p. 36)」として，現在における非対称性ではなく，過去における束縛条件を説明すべきであると強調している．しかしながら，Price 自身が指摘しているように，対称的な道具立てのみを用いて，未来の低エントロピー状態を説明せずに過去の低エントロピーだけを説明することは非常に困難である．さらに，宇宙論が提唱する宇宙初期の描像が，現在のエントロピー勾配（まさに今説明しようとしている当のもの）を遡って推測されていないという保証があるだろうか．あるいは，それ以外にどのような方法で，たった数百年間の観測に基づく法則から，150 億年前（これもあくまで宇宙論が主張する数字であるが）の状態を知ることができるのだろうか．このように，「過去における束縛条件の説明」を方針として掲げるのは簡単だが，明確で具体的な方向性があるわけではない．

続く 3 つの節では，別の選択肢を概観・検討する．

6. 確率過程における対称性・非対称性を考え直す

確率過程論では常に，背後に確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を想定している．HMC においては，この Ω 上の確率測度 P と，初期分布および遷移確率のペア $(\boldsymbol{\mu}_0, \hat{P})$ とは同値関係にある．つまり，ある束縛条件を固定した上でしか話をしない．すると第2節でみたように，前向きの斉次性を仮定しても，後ろ向き遷移確率は一般に非斉次的になり，逆も然りである．Sober[15] が3時刻2状態系で例示しているように，一般に，遷移確率が両向きに斉次的であることは，以下のようにその過程が平衡であることを意味してしまう．まず，前向き遷移確率の斉次性から，

$$\forall t_1, t_2, s \in \mathbb{Z}, \quad \forall i, j, k \in S, \quad \frac{P_{t_1+s|t_1}(j|i)}{P_{t_1+s|t_1}(k|i)} = \frac{P_{t_2+s|t_2}(j|i)}{P_{t_2+s|t_2}(k|i)} \tag{15}$$

したがって，

$$\frac{P_{t_1+s}(j)P_{t_1|t_1+s}(i|j)}{P_{t_1+s}(k)P_{t_1|t_1+s}(i|k)} = \frac{P_{t_2+s}(j)P_{t_2|t_2+s}(i|j)}{P_{t_2+s}(k)P_{t_2|t_2+s}(i|k)} \tag{16}$$

後ろ向き遷移確率の斉次性を用いて，

$$\frac{P_{t_1+s}(j)}{P_{t_1+s}(k)} = \frac{P_{t_2+s}(j)}{P_{t_2+s}(k)} \tag{17}$$

この等式は，正規性 $\sum_i P_t(i) = 1$ を考慮すれば，

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{Z}, \quad \forall i \in S, \quad P_{t_1}(i) = P_{t_2}(i) \tag{18}$$

すなわち平衡となる．したがって，両向きの遷移確率の斉次性を実現するためには，定常分布から始めなければならない．つまり，HMC においては，遷移確率が両向きに斉次的であることと，確率過程が非平衡になることとは，二者択一になっている．ところが，前者はこれまで見てきたように統計的議論において要求されて然るべきものであるし，基礎力学における時間対称性や，客観的法則として要求される時間並進不変性を顧みるに，なお一層のことである．一方，後者は現実に観察され続けているもの

であるからやはり要求されて然るべきものである．

この二者択一の原因は元を辿れば，確率過程の非可逆性，つまり遷移確率の確率分布への依存（式 (11)），特に初期分布への依存にあった．この分布への依存性にもかかわらず，私たちは，前向きに確率過程を構成している状況において，前向き遷移確率 $\hat{P}$ と初期分布 $\boldsymbol{\mu}_0$ とを独立に考えているのが普通である．初期分布が $\boldsymbol{a}_0$ であれば $\hat{P}$ の遷移によって構成される確率測度は P_a，初期分布が $\boldsymbol{b}_0$ であれば $\hat{P}$ の遷移によって構成される確率測度は P_b，といった具合である．こうして作られた確率測度から，今度は逆に後ろ向き遷移確率を計算し，したがってそれは分布に依存する，ということになってしまう．このような歪な関係は，何か世界の客観的な事実を表しているのだろうか，それとも人間の視点の混入がそうさせているのだろうか．確率過程 $(\boldsymbol{\mu}_0, \hat{P})$ における人間の視点が束縛条件 $\boldsymbol{\mu}_0$ であるとしたら，束縛条件とは独立に，遷移確率に関してその確率過程の時間反転対称性・非対称性を考えられないだろうか．このような推論を辿り，幾人かの研究者は，確率過程の時間反転対称性を新たに定義しなおしている．通常，確率過程の対称性とは，確率の流れが無いことを意味する詳細釣り合い条件：

$$P_{t|s}(j|i)P_s(i)=P_{t|s}(i|j)P_s(j) \tag{19}$$

あるいはこれと同値である，結合確率分布の対称性：

$$P_{s,t}(i,j)=P_{s,t}(j,i) \tag{20}$$

等によって定義される．一方，Bacciagaluppi[3] や Uffink[16] が提唱するのは，遷移確率自体の対称性：

$$P_{t|s}(j|i)=P_{s|t}(j|i) \tag{21}$$

である．実際，定義 (21) は，Ehrenfest 連鎖のような特別なケースにおいて，非平衡状態，すなわちここではエントロピー増大則と，時間対称的な確率過程とを同時に（しかも同一の確率空間上で）扱うことができる (参考文献 16, p. 1062)．しかしながら，一般的なエントロピー増大則を

どのように扱うのかは明らかでない．また，Uffink はその動機を本稿で扱っているような熱力学的非対称性と決定論的対称的力学との非整合性においているのに対して，Bacciagaluppi は，そもそも基礎力学が対称的確率法則であっても熱力学的非対称性と矛盾するだろうかと問うている．もし前者であるならば，実際に存在している粒子集団の統計分布以外に反事実的な確率空間を考えることに何の意味があり，またなぜ考えねばならないのだろうか．また，後者であれば，量子力学でもなく，古典的な主観的確率でもない，客観的な基礎法則としての確率法則というものの身分も明らかでない．このように，「遷移確率自体の対称性」という方向性は，結局どのような着地点を目指しているのかが見えてこない．これに関しては，統計法則の存在論的身分，つまりそれが主観的なものなのか，客観的なものなのか，あるいは別の何かなのか，という問題とも深くかかわっており，問題が山積している．

「遷移確率自体の対称性」という方向性に関して，量子力学には注目に値する事実がある．量子力学において一般に，時刻 0 に初期状態 $|\phi\rangle$ にあった系が，時刻 $t>0$ に状態 $|\phi\rangle$ で発見される（正確には，その状態に対応する固有値が測定されたのちに，固有状態に収縮する）確率は

$$|\langle\phi|\hat{U}(t)|\phi\rangle|^2 \tag{22}$$

で与えられる．ただし，$\hat{U}(t-s)e^{-i\hat{H}(t-s)/\hbar}$ は時間発展演算子である．一方，時刻 t から s への遡及予測のための演算子は $\hat{U}^{\dagger}(t-s)=e^{i\hat{H}(t-s)/\hbar}$ であり，それは $\hat{U}|\phi_0\rangle=|\phi_t\rangle \Rightarrow |\phi_0\rangle=\hat{U}^{\dagger}|\phi_t\rangle$ を満たす．時刻 t に状態 $|\phi\rangle$ にある系が，時刻 0 に状態 $|\phi\rangle$ にあった確率は，

$$|\langle\phi|\hat{U}^{\dagger}(t)|\phi\rangle|^2, \tag{23}$$

となる．$\langle\phi|\hat{U}|\phi\rangle^{*}=\langle\phi|\hat{U}^{\dagger}|\phi\rangle$ を考慮すれば，これは (22) の値に等しい．つまり，ある種の遷移確率の対称性が成り立っている．ただし，(21) ではなく $P_{t|s}(j|i)=P_{s|t}(j|i)$ であり，また量子的状態と古典的状態という決定的な差異も残っている．にもかかわらず，注目すべきなのは，この対称性

が，初期量子状態 $|\phi\rangle$（これは初期確率分布 $\||\phi\rangle\|^2$ と直接結びついている）の設定と独立であるという事実である．この点が，古典的確率過程と決定的に異なる．時間発展演算子は，いわば状態の遷移振幅であり複素数であるが，初期状態とは独立に後ろ向き遷移振幅を $\hat{U}^\dagger$ によって計算できる．前向き遷移振幅が斉次的であれば，後ろ向き遷移振幅も斉次的になる．つまり，古典的確率過程における遷移確率の両向き斉次性と非平衡状態という二者択一が，量子力学においては（複素数を用いてではあるが）両立していることになる．むしろ，これら二つの性質が成り立つようにヒルベルト空間を使うように（神様に？）言われているかのようである．もうひとつ注目すべきなのは，量子力学において，後ろ向きの確率 (23) を計算する際に，前向きの確率 (22) を計算した時と別の確率空間を構成しているのに対して，古典的確率過程では単一の確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ にこだわっている点である．これについても，単一の確率空間を使う代わりに単一のヒルベルト空間を使うように，また，確率法則の後ろ向き遷移確率の存在論的身分を見直すように言われているかのようであるが，これ以上は本稿の射程を超える．

以上は，あくまで量子力学，つまり単体の対象の客観的な確率運動を扱うための理論における事実である．もちろん量子的確率を用いて（古典的極限をとることなしに）統計力学を書き下すことはできない．しかしながら，量子力学において（確率的な意味で）非平衡な状態と，時間反転対称（したがってまた両向きに斉次的）な法則とを同時に扱っているという事実は，逆に古典的確率過程において単一の確率空間を捨てて遷移確率自体の対称性を考えるという方針が誤りであることを示唆しているように思われる．つまり，量子力学においては，束縛条件がどうであったとしても，それとは独立に，物理的な場としての遷移確率（ただしこれが正確には遷移振幅であることが量子力学の解釈を難しくしているのだが）が存在する．この考え方は，Popper[12)] の傾向性解釈によってよく表現されてい

る．また，様々な種類の束縛条件を（この世界の客観的事実として）考えうるという意味では，多世界解釈に通ずるものがある．一方，統計力学における確率概念において存在論的優位性を持つものは，実際に過去に存在していた（そしてそれ以外ではあり得なかった）粒子集団の統計分布としての束縛条件であり，それらが変化していく様子をあとから記述したものが遷移確率である．結局，熱力学的な非対称性は，そうしたモノの在り方自体の時間非対称性に起源しているのではないだろうか．もし，過去における束縛条件に何かしらの優位性があって，その束縛条件から始まる確率過程の確率空間以外を考えることが無意味であるとしたら，これまでの数学的議論により，非対称性が帰結するだろう．このようなモノの在り方自体の時間非対称性を仮定して，そこから必要な非対称性を帰結させる推論は，次節で見るような，「別の非対称性から法則の非対称性を導く」ような説明形式の一例である．

7.　別の非対称性から法則の非対称性を導く

現象の非対称性を説明するためには，(13) の形式を採らねばならず，そのためには前向きの斉次遷移確率行列 $\hat{P}$ によって HMC が構成されねばならず，そしてそのためには斉次 Markov 性の概念的根拠となっているものが時間非対称に導入されねばならない．しかしながら，粗視化や擾乱といったオーソドックスな基礎付けを検討する限り，それらが時間的に未来に向かってのみ導入される根拠は無さそうである．粗視化については本稿第 5 節で検討したとおりである．擾乱については，注目している系と独立した状態でやってくる外部の影響が，系との物理的相互作用の後に相関して出て行くという非対称性を「入来効果の独立性の原理」と名付け批判している Price[13]（第 2 章）などを参照のこと．このような状況において，熱力学第二法則の概念的基礎付けとして考えうるもう一つの方針は，確率法則の非対称性を，物理学内外の別の非対称性から説明することであ

る．これを定式化しておこう：

$$\text{別の非対称性} \Rightarrow \text{非対称的（微視的）確率法則} \tag{24}$$

この説明形式に含まれるものは非常に広範囲に亘る．物理学内部からの説明としては，対称的な宇宙の中での局所的非対称性（ゆらぎ），量子力学における観測前後での非対称性，計算の限界を物理世界の客観的側面として捉えるカオス理論における非対称性などが挙げられる．物理学外部からの説明としては，フォーク非対称性（原因と結果の非対称性），形而上学的時間の非対称性（定まった過去と開かれた未来），人間存在の非対称性（未来における目的としての結果と，それをもたらすための手段として原因），などが挙げられる．また，これらの中間領域には，生命が感じる時間自体，特にその向きを，エントロピーの向きと同一視するという意味での人間中心原理がある．古くはBoltzmanの思想から，最近ではPrigogineの「内部時間」などが含まれ，日本でも渡辺がエントロピーと時間の同一性を強調している．

本節ではこの中から，前節の最後に示唆されたような，モノの在り方自体の時間非対称性が非対称的確率法則の起源となる可能性について検討したい．ここでモノの在り方自体の時間非対称性とは，過去の束縛条件に対して何かしらの存在論的優先権を与えるようなものを指す．これは，過去のエントロピーの低さを強調するPriceの立場や，Albert[1)]の過去仮定(Past Hypothesis)などとは異なる．例えば，形而上学的時間の非対称性とは，「既に在る過去」に対する「未だ無い未来」といった時制を伴い，かつ時間の流れを客観的に捉える時間観のことである．これは，まさに過去に存在論的な優先権があることを以って時間というものを特徴づける立場であるから，前節の議論に従えば，そこから確率法則の非対称性が導出されるかもしれない．しかしながら，直接的な反論として，たとえ時間が絶対的に未来へと流れつつあったとしても，モノの動きを特徴づける法則自体には未来の事象に優先権があるという状況を，少なくとも論理的には

考えうる．目的論的な世界観がよい例であると思われる．あるいは，この時間自体の非対称性を物理学内に取り込もうとする試みもある．たとえば，Weingard[18] は，重力ポテンシャルが空間に対して方向性を与えるのと同様な効果を，時間ポテンシャルの導入と時間の向きの関係に対して期待している．

これらのような若干遠回りな議論より，より微視的確率法則の非対称性に（概念的に）近い位置にあると思われる，モノの在り方自体の時間非対称性がある．ある法則で結ばれた原因と呼ばれる事象と結果と呼ばれる事象の間での時間的順序，すなわち因果の非対称性である．これを「原因は結果に時間的に先行する」と定式化しよう．この定式化では，そもそも原因と呼ばれる事象と結果と呼ばれる事象が時間的順序関係以外のしかたで定義されていなければならない．それは，二つの事象がある法則によって結ばれていて，なおかつその一方（原因と呼ばれるほうの事象）に何らかの存在論的な優先権が与えられている，ということによって為される．原因とは，結果がこの世界に存在することになったまさにその原因なのである．ここで，人間の自由，人間の行為，人間が引き起こす作用などは考えていない．そしてそれが時間的に非対称であるとは，存在論的に優位にある事象が，なぜか必ず時間的に先行している（過去の側にある）ということである．モノの変化は，時間的に過去にある事象と，時間的に未来にある事象，そしてその事象間を結ぶ法則，によって記述される．しかしながら，少なくとも決定論的な因果関係を考えた場合，これらのうちのどれか一つは定義としては過剰である．例えば，過去の事象と法則は未来の事象を含意するし，未来の事象と法則は過去の事象を含意するし，過去の事象と未来の事象があれば法則が新たに記述するものはない．因果の非対称性が含意するのは，このうち，過去の事象と法則に存在論的優先権を与え，未来の事象はそれらによって自然に帰結するものにすぎないとする最初の立場である．特に，決してその逆ではない．

さて，もしこの因果の非対称性があったとすれば，時間的に先行する束縛条件が原因となって，その中の可能的な各状態から因果法則によって次に起こりうる様々な結果を考え，たいていの場合は等確率を付与する．ただし，そこに確率が導入される理由は解釈によるが，そこでベースとなっている決定論的な基礎法則自体に因果の時間非対称性があるということが重要である．そのように導入された確率が前向き遷移確率である．運動の全体は，この初期条件と前向き遷移確率のペアから作られる．こうして，前向き斉次遷移確率によって構成される HMC が得られる．同様な考察は Barret and Sober[4] にも見られる．曰く，「もしも，原因の分布と前向きの法則が基本的な構成要素 (fundamental constituents) であれば，エントロピーは通常，増大する．(p. 948)」あるいは，「なぜ原因の分布と前向き法則の集合とが，この世界を形作っているもの (building blocks) なのだろうか．(p. 949)」

ところが，Barret and Sober が「ミステリー中のミステリー (p. 949)」と称しているように，「時間的に先行する事象に存在論的優先権が与えられている」という事実を主張するのは容易ではない．日常的にはそれは，原因が時間的に先行していること自体に根拠づけられていることが多いように思える．しかしそれでは単なるトートロジーになってしまう．また，先に述べたように，ここでは人間が作用因となって事象を引き起こすこと，つまり未来は変えられるという感覚の起源は考えていない．そこで導入されるのが Reichenbach[14] に端を発するフォーク非対称性の概念である．フォーク非対称性とは，ある 2 つの事象に相関が見られる時，その各事象と法則によって関係している過去の共通の局所的事象が必ず存在するが，同様な未来の共通の事象は必ずしも存在しない，という未来に開いたフォークと過去に開いたフォークとの非対称性のことである．一方，原因と結果との関係は，フォークの根元と分岐した先端という関係になければならない．これは，2 つの事象に相関が見られる場合，必ず共通した原

因が存在すると考えることから帰結する．この段階では原因と結果の時間的順序には言及していない．ところが，この共通原因原理にフォークの向きの非対称性を加味すれば，原因と結果の非対称性，すなわち原因は必ず結果に時間的に先行することが帰結する．これで，フォークの非対称性から因果の非対称性，確率法則の非対称性，そしてエントロピー増大則へと至る道のりが完成したことになる．ちなみに，Sober[15] はフォーク非対称性を直接遷移確率の非対称性の根拠とし，また Arntzenius は逆に，遷移確率の非対称性を因果の非対称性の根拠付けとしているようである．筆者は，1 つの事象と複数の可能的事象とを結び付ける遷移確率というフォークと，本節で扱った因果のフォークとは，基本的には別の概念であると考えているが，本稿では詳しい検討に及ばなかった．

次の問題は，何がフォーク非対称性を保証してくれるかである．この点は，少なくとも古典力学に関する限り，あるいは Sober[15] のように生物学における事例を扱っている限り，巨視的現象における経験的事実に依存している．（量子力学の記述する微視的現象におけるフォーク非対称性を例に挙げ，因果の向きの客観的存在が主張される場合もある．例えば Dowe[6] を参照のこと．）例えば，池の水面に円形に広がる波紋があるとすれば，必ずその中心に波が起こった原因にあたるものが存在している．しかしながら，綺麗な円形を描いた波がある一点に集まってくることは（別に共通の原因を整えない限り）滅多にない．一方，例えばビリヤードボールどうしの運動量保存などの微視的現象（無論，スケールのことではなく，単体の現象という意味である）にはそのような非対称性はない．ある静止したボールが注目している系だとしよう．そして適当な方向から適当な速度で別のボールを当てたとする．衝突前後で運動量が保存されるという意味で，ランダムにやってきたにも関わらず，衝突後には相関関係が生じるように見える．しかしこれを時間的に逆に見ても，やはりランダムにやってきて，衝突後に相関して出て行く．つまり，衝突という共通原因

は，同時に共通結果にもなっている．ここに，フォーク非対称性はない．結局，Price[13] の糾弾するように，因果の非対称性による確率法則の非対称性の説明は，以下のような循環に陥っているようである：

$$\text{非対称的（巨視的）統計現象} \Rightarrow \text{フォーク非対称性} \Rightarrow \text{因果の非対称性} \Rightarrow \text{非対称的（微視的）確率法則} \Rightarrow \text{非対称的（巨視的）統計現象} \tag{25}$$

しかしながら，科学的説明においては，そのいかなる側面に関しても，必ず微視的法則から出発して巨視的現象を説明しなければならないのだろうか．次節で紹介したいのは，殊時間の向きに関する限り，論理関係 (25) のように巨視的現象が出発点となることを積極的に捉えるアプローチである．

8.　現象の非対称性が法則の非対称性を説明する

熱力学的な時間の矢の説明において通常求められているものは，関係 (12) や関係 (13) などのように，微視的な確率法則から巨視的な現象を説明する形式である．これは科学的説明の常識にも倣っているといえる．本節ではこの逆の関係，すなわち，

$$\text{不可逆的（巨視的）統計現象} \Rightarrow \text{不可逆的（微視的）確率法則} \tag{26}$$

あるいは，

$$\text{非対称的（巨視的）統計現象} \Rightarrow \text{非対称的（微視的）確率法則} \tag{27}$$

などを検討してみたい．このうち，関係 (26) には時間の向きに関する議論としての価値はあまり無いと思われる．なぜなら，第 2 節でみたとおり，不可逆的な現象が説明されるか否かは斉次的 Markov 性を導入しうるか否かにかかっており，第 3 節によれば斉次的 Markov 性自体に時間の向きは無いからである．したがって，わざわざ逆の説明 (26) を考える理由がない．しかしながら，関係 (13) による説明がうまくいっていない以上，その逆である (27) に関しては検討に値する．

ロジックは簡単である．前向き遷移確率が斉次 Markov 的であればエントロピー増大則が，後ろ向き遷移確率が斉次 Markov 的であればエントロピー減少則が帰結する．しかるに，実際の世界ではエントロピー増大則が成り立っている．したがって，微視的世界を支配する確率法則は前向きに斉次 Markov 的，つまり時間非対称的でなければならない．(13) がエントロピー増大則を explicandum として扱っているのに対し，(27) はエントロピー増大則を explicans として扱っていることになる．

たとえば Sober[15, 4] は，Mendel の法則（もちろん時間斉次的である）が親の遺伝子型から子の遺伝子型の確率を計算するのに対して，子の遺伝子型から親の遺伝子型の確率を計算するのには使えないことを例に挙げている．(6) で見たように，両向きの斉次性は，その過程が平衡で無い限り成り立たない．その遷移確率が law-like なものとして認められるためには，時間並進不変性が成り立っているべきであると考え，Mendel の法則やエントロピー増大則といった経験則を顧みるに，微視的世界の確率法則は前向きに時間非対称であるようだ，と言及している．（ただし，Sober 自身は (27) の説明方式を主張しているわけではない．）また，Arntzenius[2] は (27) の形式をより明確に採用している．曰く，「世界の時間発展を支配している法則は時間的に非対称であり，時間非対称な理論（熱力学第二法則などの経験則）を定式化するためには，時空のいたるところにおいて定義された客観的な時間の矢を想定する必要がある．」(p. 68)

この説明方式において注意すべき点は，エントロピー増大則の全てに関して，巨視的現象から微視的法則を説明しようとしているのではないということである．HMC を用いてエントロピーの勾配を説明する試みは，とても偶然とは思えないほどうまくいっているのであり，その不可逆性に関しては通常通り HMC を用いる．しかしながら，その傾きの向きに関しては発想を逆転させ，現象から法則を説明しようというわけである．つまり，以下のペアのような説明方式を採っている．

$$\begin{cases} \text{不可逆的（微視的）確率法則} \quad \Rightarrow \quad \text{不可逆的（巨視的）統計現象} \\ \text{非対称的（巨視的）統計現象} \quad \Rightarrow \quad \text{非対称的（微視的）確率法則} \end{cases} \tag{28}$$

この説明方式(28)では，過去における束縛条件を説明する必要が無いのが利点である．しかしながら，非対称的確率法則という帰結は，HMCの概念的根拠である粗視化や擾乱を非対称に導入せねばならないことをも帰結してしまうことになる．たとえば，未来に関してのみ無知であるという人間の事情が，物理法則を規定するだろうか．あるいは，擾乱なるものは実際に，ランダムな要因として入ってきて，そして相関して出て行くのだろうか．これらの帰結を避ける唯一の方法は，HMCの不可逆性の起源を粗視化や擾乱といったものに求めるのをやめて，基礎法則自体の時間対称性を疑う立場である．たとえば，Mackey[10]は，経験的に知られている熱力学第二法則に整合するためには，基礎法則が不可逆性（特に，HMCにおけるnon-invertibility）を持たなければならないとして，不可逆性を持たない物理学における微視的法則の時間対称性の正しさを否定している．Mackeyの立場は，非対称性だけでなく，不可逆性までをも巨視的現象を中心に据える非常に強い立場である．確かにそう考えれば，粗視化や擾乱の非対称的な導入に頭を悩ませる必要はない．しかし，これは単体の対象に関するほとんどの実験結果が示している時間対称性に反する急進的立場であるだけでなく，そもそも，微視的基礎力学の対称性・可逆性と，巨視的現象の非対称性・不可逆性の整合性についての時間の矢の問題に対して，単に後者を一方的に肯定し，前者を全面的に否定するこの立場は，議論が堂々巡りしているという印象を受ける．つまり，それらの橋渡しをするはずの統計力学における確率法則の不可逆性・非対称性を説明するために，基礎力学自体の不可逆性・非対称性を利用してしまっている．もしもMackeyの主張が正しいとすれば，熱力学的な時間の矢の問題は解決するどころか，最初から存在しない．

9. 結　　論

時間の矢の問題に対して，哲学的立場からは特に，本稿で定義したところの（不可逆性ではなく）非対称性の起源が考察の対象となってきた．その非対称性に関して，本稿では比較的最近の研究からいくつかの話題を採り上げた．束縛条件や一定の確率空間に縛られない形で確率過程の時間反転について議論しようという試み（第6節）は，（客観的確率分布ではなく）現前する粒子集団の統計分布を扱う際には馴染まないと思われる．しかしながら，そのような試みは，逆になぜ統計力学においては束縛条件に縛られなければならないのかという問題設定を生み出してくれる．それに対する答えの一つとして，原因と結果の非対称性，さらにはフォーク非対称性に訴える方法（第7節）があるが，それは寧ろ熱力学的非対称性によって導き出される非対称性の一つであると思われる．この点を逆手に取った全く違う視点からのアプローチ，すなわち巨視的現象の非対称性から微視的法則の非対称性を導く道のり（第8節）を紹介したが，結局，粗視化や擾乱といった概念の非対称性が（それを説明する必要はないものの）帰結されてしまうという困難に陥るようである．

いずれのアプローチも哲学的には一筋縄でいくようなものではないが，少なくとも過去の事象に何かしらの存在論的優先権を与えてそこから確率法則の時間の向きを決める立場（第7節）や，非対称性に関しては実際にエントロピーが（減少ではなく）増大しているという経験的事実を出発点に考える立場（第8節）は，おそらく多くの人が統計力学を学習する際に暗黙のうちに仮定している立場であろうことを，最後に付け加えておこう．

参考文献

1)　D. Albert. *Time and Chance*. Harvard University Press., 2000.

2) F. Arntzenius. Indeterminism and the direction of time. *Topoi*, Vol. 14, pp. 67–81, 1995.

3) G. Bacciagaluppi. Probability and time symmetry in classical markov processes. *unpublished*, 2007.

4) M. Barret and E. Sober. The second law of probability dynamics. *British Journal for the Philosophy of Science Journal of Philosophy of Science*, Vol. 45, pp. 941–953, 1994.

5) P. Bremaud. *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation and queues*. Springer, 1999.

6) P. Dowe. Process causality and asymmetry. *Erkenntnis*, Vol. 37, No. 2, pp. 179–196, 1992.

7) S. Kullback and R. A. Leibler. On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, pp. 79–86, 1951.

8) A. Lasota and M. C. Mackey. *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics*. Springer, 1994.

9) M. C. Mackey. *Time's arrow: the origins of thermodynamic behavior*. Springer, New York, 1992.

10) M. C. Mackey. Microscopic dynamics and the second law of thermodynamics. In L. Schulman C. Mugnai, A. Ranfagni, editor, *Time's Arrows, Quantum Measurements and Superluminal Behavior*. Roma: Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2001.

11) O. Penrose. *Foundations of statistical mechanics: a deductive treatment*. Pergamon Press, Oxford, 1970.

12) K. R. Popper. *Quantum theory and the schism in physics*. Hutchinson, London, 1982.

13) H. Price. *Time's arrow and Archimedes' point*. Oxford University Press, 1996.

14) H. Reichenbach. *The Direction of Time*. Berkely, University of California Press., 1956.

15) E. Sober. Temporally oriented laws. *Synthese*, Vol. 94, pp. 171–189, 1993.

16) J. Uffink. Compendium of the foundations of statistical physics. In J. Butterfield and J. Earman, editors, *Handbook of the philosophy of science: Philosophy of Physics*, pp. 924–1074. Elsevier North-Holland, 2007.

17) N. van Kampen. Fundamental problems in statistical mechanics of irre-

versible processes. In *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*. Amsterdam, North-Holland, 1962.

18) R. Weingard. Space-Time and the Direction of Time. *Noûs*, pp. 119–131, 1977.