| Title | 確率過程量子化は古典力学的か？ |
|---|---|
| Sub Title | Are quantum stochastic processes classically mechanical? |
| Author | 高村, 友也(Takamura, Tomoya) |
| Publisher | 三田哲學會 |
| Publication year | 2008 |
| Jtitle | 哲學 No.120 (2008. 3) ,p.123- 144 |
| JaLC DOI | |
| Abstract | We show that the theory of quantum stochastic processes, which is one of the formalisms of quantum mechanics, is a generalization of Newtonian mechanics so as to be applied to the motion which has noise. We notice that the time-symmetry of stochastic processes plays an essential role in the generalization. The approach of the theory of quantum stochastic processes restricts our investigation to the timesymmetry of stochastic processes, while the interpretational problems of quantum mechanics are so chaotic that we can not specify the problems. The subjective probability, which represents our ignorance on the deterministic world, is a timeasymmetrical prediction either from the past to the future or from the future to the past, and satisfies the additivity of probability. We first doubt the time-asymmetry of objective stochastic processes which stochastic processes have been supposed to have. Then, necessarily we are forced to doubt the additivity, too. The timesymmetry of objective stochastic processes mentioned above leads to the conclusion that the strangeness of quantum mechanics is not the strange-ness of mechanical parts of quantum mechanics. The quantum mechanical strangeness results from our biased view about the concept of probability. Finally, an answer to the question whether or not quantum stochastic processes are classically mechanical is given. |
| Notes | 投稿論文 |
| Genre | Journal Article |
| URL | https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000120-0123 |

投稿論文

# 確率過程量子化は古典力学的か？

高　村　友　也*

## Are Quantum Stochastic Processes Classically Mechanical?

*Tomoya Takamura*

We show that the theory of quantum stochastic processes, which is one of the formalisms of quantum mechanics, is a generalization of Newtonian mechanics so as to be applied to the motion which has noise. We notice that the time-symmetry of stochastic processes plays an essential role in the generalization. The approach of the theory of quantum stochastic processes restricts our investigation to the timesymmetry of stochastic processes, while the interpretational problems of quantum mechanics are so chaotic that we can not specify the problems. The subjective probability, which represents our ignorance on the deterministic world, is a timeasymmetrical prediction either from the past to the future or from the future to the past, and satisfies the additivity of probability. We first doubt the time-asymmetry of objective stochastic processes which stochastic processes have been supposed to have. Then, necessarily we are forced to doubt the additivity, too. The timesymmetry of objective stochastic processes mentioned above leads to the conclusion that the strangeness of quantum mechanics is not the strangeness of mechanical parts of quantum mechanics. The quantum mechanical strangeness results from our biased view about the

* 慶應義塾大学大学院文学研究科修士課程（哲学）

concept of probability. Finally, an answer to the question whether or not quantum stochastic processes are classically mechanical is given.

## はじめに

量子力学には3種類のフォーマリズムがある．Schrödinger や Heisenberg，Dirac らによる正準量子化法，Feynmann による経路積分量子化法，そして Parisi-Wu や Nelson による確率過程量子化法である．一般にこれらは同値な理論であると言われている．状態ベクトルと演算子という抽象的数学装置から成り立っている正準量子化法については，その解釈の難しさは周知のとおりである．一方，経路積分量子化法はある二点間を結ぶすべての波動経路の総和を考えるものである．また確率過程量子化は，確率的運動をする粒子の理論である．このようにこれら2つの理論は比較的はっきりとした概念的基礎に基づいてはいるが，複素数の波を用いる Feynmann の経路積分や，複素時間を導入する Parisi-Wu の確率過程量子化は，基本的には正準量子化法の計算的便宜であるとされている．それに対し，Nelson による確率過程量子化は，実時間，実関数に基づく粒子の理論であり，また力学として Newton 力学を用いている．そのため，Nelson の理論が作られた1966年当時から現在に至るまで，確率過程量子化（以後，「確率過程量子化」は Nelson 流の理論に限って用いる）に基づいて，微視的世界にも何らかの意味で Newton 力学が通用するのではないかと主張する人たちと，それに異を唱える人たちとの論争が続いている．さらに，明確な軌跡を持つ粒子を扱う理論であることから，量子力学に関する解釈問題に解決をもたらす可能性があると考える人もいるが，ここ百年弱の間に蓄積された量子力学の非古典性の論証・検証により，Nelson の理論にも何らかの穴があるだろうと考えるのが一般的である．しかしどこでどんな非古典的仮定が混入したのか明らかにされて

いるわけではない．本稿では，確率過程量子化と古典力学との共通点と相違点について整理し，相違点がどのような妥当あるいは非妥当な物理的基礎に基づいているのかを考察する．

## 2. 確率過程量子化の動機と歴史

確率過程量子化は，粒子の運動に最初からランダム性を導入することで，確率過程によって量子現象を再現する．では，そもそもそのような揺動が生じる原因は何だろうか．たとえば，その原因を真空中の未知なる媒質―いわゆるエーテル―の衝突運動に見た場合，花粉の微粒子の Brown 運動が古典的現象であるのと同じように量子の運動も古典的だということになる．これは何もかもを古典力学へと還元してしまう道であるが，エーテルという外部構造に訴えることを必要とするし，またいわゆる「隠れた変数の理論」にあたるため，決定論的な外部構造の力学変数を用いて量子力学を再現することを禁じた「隠れた変数の非存在定理」や Bell の結果に抵触すると考えるのが普通である．また，ランダム性をこのように解釈すると，後に見るような確率過程量子化の時間対称的構造に解釈を与えるのが難しくなる．

そこで本稿では「運動とは本来確率的かつ微分不可能なもので，特別な場合に決定論的で滑らかな軌道を描く」といった立場をとる．揺動の原因を考えず，揺動を最初から認めることになる．一言で言うと，決定論的な外部構造を仮定するような立場が確率を主観的なものとして捉える立場，一方，運動とはそもそも確率的なものであるといった立場が確率を客観的なものとして捉える立場である．後者の立場は非常に急進的な考え方ではあるが，とりあえず以下のような正当化を与えることができよう．主観的確率は，ランダム性が決定論的な世界に対する情報の不足から生じたものであるという消極的な定義を出発点としているために，その不足している情報に対応する物理的対象を必要とする．それに対して，決定性が確率論

的な世界から生じたものであるとするためには，多数の粒子の振舞い[1]や物理的な力による束縛[2]を考慮すればいい．したがって後者のほうが，現在私たちが知りうる限りでの物理的対象の中で話が収まるために，概念装置として経済的であると言える．

確率過程量子化のアイデアそのものは1931年にSchrödingerによってすでに提示されている[1)]．物理学の理論の発展においてしばしば見られるように，それは何かしらの概念的な理由に基づいて発案されたものというよりも，形式的な理由によって動機づけられたものと考えられる．自由粒子のSchrödinger方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi=\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$$

一方，古典的拡散方程式あるいはFokker–Planckの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu=D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mu$$

ただし，$\phi$が波動関数（複素関数）であるのに対し，$\mu$は確率密度（実関数）であり，$\varepsilon$が複素定数であるのに対し，$D$は実定数である．この形式的類似性に注目したSchrödingerは，拡散方程式と時間反転拡散方程式（これらは互いに共役関係にある）を基礎方程式として粒子の確率過程の分布密度を計算し，それが波動関数の2乗と一致することを示した．Nagasawa[4)]の解説によれば，当時の数学，特に確率過程論が未発達であったために，Schrödingerは彼のアイデアをそれ以上推し進めることはできなかったと考えられる．その後，1930年代前半のKolmogorov

[1] 例えば熱や圧力といった概念を個々の分子の力学的運動の総体として扱う統計力学は，確率的運動をする多数の粒子から決定性が生じる典型例である．もちろんこれは主観的確率の例だが，全く同じことが，個々の粒子が客観的に確率的な運動をしていたとしても成り立つことは自明である．

[2] 後に見るように，確率的運動をする粒子の道筋(7)は，ランダム性および他物体との相互作用の和によって描き出される．後者が前者に対して相対的に大きくなればなるほど，古典的な決定的運動に近くなる．

による測度論的確率論の構築を経て，20 世紀中頃までに確率過程論が大きく発展した．これらの後押しを受けて，1966 年に Nelson が確率微分方程式とその時間反転方程式から Schrödinger 方程式を導出し[2]，これが量子化理論としての出発点となった．Schrödinger にしても Nelson にしても，本来時間非対称な確率過程（拡散過程）を時間対称化したところに，Einstein の Brown 運動などに代表される古典的確率過程との違いがある．次節ではより洗練された現代のフォーマリズムを見るが，そこでは時間対称的な確率過程がどういったものかをより明瞭に理解することができる．

## 3.　確率過程量子化の理論

長澤[3,4]のフォーマリズムに基づいて，時間対称的な確率過程がどのように量子力学を再現するのかを見る．まず以下の定理を示すことができる．

**定理 1（Markov 過程の三つの表現）**　ある時間区間 $(a, b)$ における *Markov* 過程 $X_t$ は，その測度 $Q$ を以下の三つの表現によって与えることができる：

$$
\begin{aligned}
Q &= \int \mu_a(dx_0)Q(a, x_0; t_1, dx_1)Q(t_1, x_1; t_2, dx_2)\cdots \\
&\qquad \cdots Q(t_{n-1}, x_{n-1}; b, dx_n)f(x_0, x_1, \cdots, x_n) \\
&= [\tilde{\phi}_a \phi_a q \rangle\!\rangle \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \int f(x_0, x_1, \cdots, x_n)\tilde{Q}(a, dx_0; t_1, x_1)\tilde{Q}(t_1, dx_1, t_2, x_2)\cdots \\
&\qquad \cdots \tilde{Q}(t_{n-1}, dx_{n-1}; b, x_n)\mu_b(dx_n) \\
&= \langle\!\langle \tilde{q}\tilde{\phi}_b \phi_b] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q=&\int dx_0\tilde{\phi}_a(x_0)p(a,\,x_0;\,t_1,\,x_1)dx_1p(t_1,\,x_1;\,t_2,\,x_2)dx_2\cdots\\
&\quad\cdots p(t_{n-1},\,x_{n-1};\,b,\,x_n)\phi_b(x_n)dx_nf(x_0,\,x_1,\cdots,\,x_n)\\
=&[\tilde{\phi}_a p\rangle\!\rangle\langle\!\langle p\phi_b]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ただし，$a<s<t<u<b$, $\mu_a=\tilde{\phi}_a\phi_a$ は確率密度の初期分布，$\mu_b=\tilde{\phi}_b\phi_b$ は確率密度の終期分布，$Q(s,\,x;\,t,\,B)$, $\tilde{Q}(s,\,x;\,t,\,B)$ は時刻 $s$ に位置 $x$ にあった粒子が時刻 $t$ にボレル集合 $B$ に移る確率を表す遷移関数で，実数（実際は3次元）全体を $\mathbf{R}$ とすれば，$Q(s,\,x;\,t,\,\mathbf{R})=1$, $\tilde{Q}(s,\,x;\,t,\,\mathbf{R})=1$ を満たす．$q$, $\tilde{q}$, $p$ は遷移確率密度で $Q(s,\,x;\,t,\,B)=\int_B q(s,\,x;\,t,\,y)dy$ 等の関係にある．$[\cdots\rangle\!\rangle$といった表記は，その一段上の式の略記である．

この3つの表現は，同じ確率過程に関してそれぞれ時間順向き，時間逆向き，時間対称的な予測を考えたものである．定理1は，いずれの方法で予測しても，ある一つの軌道に対して同じ確率測度が与えられることを示している．それぞれの直感的な意味は以下のとおりである．時間順向き予測は，初期時刻 $a$ における確率密度分布 $\mu_a=\tilde{\phi}_a\phi_a$ から前向きの遷移確率 $q$（すなわち，ある点にあった粒子が時間前向きにおける次の瞬間に各々の位置にいる確率を表現した関数）にしたがって確率分布が広がっていく様子を表したものである．これと同じことを，時間後ろ向き予測は逆向きに行う．これは，終時刻 $b$ における確率密度分布 $\mu_b=\tilde{\phi}_b\phi_b$ から後ろ向きの遷移確率 $\tilde{q}$（ある点にあった粒子が時間後ろ向きにおける次の瞬間に各々の位置にいる確率．前向きの遷移確率 $q$ から構成される）に従って確率分布が広がっていく様子を表したものである．時間対称的予測は，出発点となる情報の半分を初期時刻 $a$ の $\tilde{\phi}_a$ が，もう半分を終期時刻 $b$ の $\phi_b$ が担い，同じ遷移確率 $p$ によってそれぞれ時間前向き，後ろ向きに広がりを見せると考える．このとき，単に過去と未来から予測するという方法が時間対称的であるというだけでなく，フォーマリズム上どちらが過去

でどちらが未来なのか見分けがつかない．このような遷移確率 $p$ が存在するというのは不思議なことであるが，いずれにしても $p$ は $q$ と $\tilde{q}$ から構成できる．ここで，$\tilde{\phi}$ や $\phi$ といった関数は実数関数であるがそれ自体は観測可能量ではない．しかしながら，以下の自然な性質を満たすものとして定義されている．

$$\int \tilde{\phi}_a(x)dxp(a, x; b, y)\phi_b(y)dy = 1 \tag{4}$$

これは，$\tilde{\phi}_a$ から $\phi_b$ に至るすべての可能性を合算すると確率1になるという意味である．時間対称的予測において時刻 $t$ における確率分布 $\mu_t$ は

$$\mu(t, x) = \tilde{\phi}_t\phi_t \tag{5}$$

$$= \left(\int \tilde{\phi}_a(z)dzp(a, z; t, x)\right)\left(\int p(t, x; b, y)\phi_b(y)dy\right) \tag{6}$$

として与えられ，(4) の条件のもとで，規格化条件 $\int \tilde{\phi}_t\phi_t dx = 1$ が満たされる．

具体的に確率過程のサンプルを考える際は，(1) の別表現として

$$X_t(\omega) = X_a(\omega) + \int_a^t a(s, X_s(\omega))ds + \sigma B_{t-a}(\omega) \tag{7}$$

を考えればよい．ただし $\sigma B_{t-a}$ はブラウン運動によるノイズ，$a(t, x)$ はドリフト空間で，粒子がどの方向へ漂いやすいかを決める関数である．そしてこのドリフト空間をポテンシャルや力といった物理学的概念から決定しなければならない．それは，古典力学において力の概念が加速度（つまり速度空間）を決定し，それを元に粒子の軌道を定めるのと全く同じことである．ただし，古典力学においては積分を2回行えばいいだけであるが，確率過程の場合はドリフトとポテンシャルとの関係が簡単ではない．その関係を明らかにするのが (3) である．実は，数学的には上のような3つの表現が可能であるが，これにポテンシャルや力といった物理学的概念を導

入するときは，(1) や (2) ではうまくいかず，(3) でなければならない（詳しくは後の節を参照）．(3) の別表現は，古典的熱拡散方程式とその共役方程式の二つの方程式でもって与えられ，これらを QSP における運動方程式と考える：

$$\frac{\partial\phi}{\phi t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta\phi+c(t,x)\phi=0 \tag{8}$$

$$-\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta\tilde{\phi}+c(t,x)\tilde{\phi}=0 \tag{9}$$

ただし，$c(t,x)$ はポテンシャルである．これらの方程式の基本解が (3) の $p$ であり，一般解は

$$\phi(t,x)=\int p(t,x;b,y)\phi_b(y)dy \tag{10}$$

$$\tilde{\phi}(t,x)=\int\tilde{\phi}_a(z)dzp(a,z;t,x) \tag{11}$$

で与えられる．天下り式に同じ記号を使ったが，実はこのようにして得られた $\phi(t,x)$ と $\tilde{\phi}(t,x)$ が，(5) における $\phi(t,x)$ と $\tilde{\phi}(t,x)$ である．これらの一般解によって，前向きドリフトおよび後ろ向きドリフトは以下のように与えられる：

**定理 2　($\phi,\tilde{\phi}$ を媒介としたドリフトとポテンシャルの関係式)**

$$a(t,x)=\sigma^2\nabla\log\phi(t,x) \tag{12}$$

$$\tilde{a}(t,x)=\sigma^2\nabla\log\tilde{\phi}(t,x) \tag{13}$$

ただし $\sigma$ は拡散係数である．サンプル過程の導出にはどちらか一方向のドリフトで十分であるが，ポテンシャルとドリフトとの関係を明らかにするために両方のドリフトが考慮された．

さて，このような時間対称的な確率過程はこの段階ですでに量子力学特有の干渉現象等をすべて再現する．以下のような変数変換を施すことで，

干渉現象の存在を直感することができる．

$$R(t,x)=\frac{1}{2}\log\phi(t,x)\tilde{\phi}(t,x) \tag{14}$$

$$S(t,x)=\frac{1}{2}\log\frac{\phi(t,x)}{\tilde{\phi}(t,x)} \tag{15}$$

この関係を通じて $\phi(t,x)$ と $\tilde{\phi}(t,x)$ は

$$\phi(t,x)=(\operatorname{sign}\phi(t,x))e^{R(t,x)+S(t,x)} \tag{16}$$

$$\tilde{\phi}(t,x)=(\operatorname{sign}\tilde{\phi}(t,x))e^{R(t,x)-S(t,x)} \tag{17}$$

と表現できる．$S(t,x)$ が干渉現象を起こす位相因子として振舞う．実際にコンピュータシミュレーションで干渉現象を再現して見せた論文としては保江・Zambrini (1985)[5] が有名である．また，この節の理論で用いた関数は実数関数のみであった．つまり，複素関数を導入する以前にすでに干渉現象を再現している．実は，ここで出てきた関数 $\tilde{\phi}$, $\phi$ と同等な情報を持った複素関数として

$$\psi(t,x)=(\operatorname{sign}\phi(t,x))e^{R(t,x)+iS(t,x)} \tag{18}$$

$$\psi^*(t,x)=(\operatorname{sign}\phi(t,x))e^{R(t,x)-iS(t,x)} \tag{19}$$

を定義してみると，それらの関数の満たす方程式がいわゆるSchrödinger 方程式とその共役方程式:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla^2\psi-V(t,x)\psi=0 \tag{20}$$

$$-i\frac{\partial\psi^*}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla^2\psi^*-V(t,x)\psi^*=0 \tag{21}$$

であることがわかる[3]．ただし，$V(t,x)$ はポテンシャルを表す．これらは先に定義した確率過程における運動方程式 (8)，(9) の複素表現であると言

[3] 興味深いことに，これら二つの方程式は，相対論的量子力学の Dirac 方程式あるいは Klein–Gordon 方程式の非相対論的極限が与える二つの方程式となっている．

える．つまり，伝統的量子力学にも実は両方の運動方程式が必要なのだが，それは最終的に $\phi$ の共役をとるという形で，あるいはより一般的には内積をとる際ブラベクトル $\langle\phi|$ を考えるという形で隠されていたことになる[4]．またこのとき，$\tilde{\phi}_t\phi_t=\phi_t^*\phi_t=e^{2R}$ が成り立つため，(5) を確率過程量子化における Born の規則と見ることができる．

**定理 3（確率過程量子化における Born の規則）**

$$\mu(t,x)=\tilde{\phi}_t\phi_t \tag{22}$$

## 4.　確率過程量子化の古典性

確率過程量子化は，ある時刻ある場所において然るべき運動状態をもった粒子を扱う理論であるという点で，古典的である．これとは別に，さらに以下のような意味で古典力学と共通点を持っている．

確率過程量子化は，力学として Newton 力学を用いている．では「Newton 力学を用いる」とはどのような意味か．力の概念を用いて他の物体との相互作用を記述すること，これが本質的である．物体の存在は周囲に力の場を形成し，それによって，もし他の物体がその場に位置したときに，次の瞬間にどちらにどの程度動かされるかを教えてくれる速度場が形成される．純粋な古典力学では，この速度場（と初期条件）さえわかれば，後は過去未来永劫にわたる軌道が決定する．軌道の決定は単に数学的な作業であり，力学の力学たる所以は速度場自体を決定して，物と物との相互関係を描くところにある．これらのことが，いわゆる「運動方程式を解く」といった作業に詰め込まれている．運動方程式を1回積分すれば

[4] 通常の量子力学で初期時刻 $a$ における情報のみをもとに定義された $\phi$ から，時間対称的であるはずの確率過程の確率密度が得られてしまうのは一見不思議である．この点に関しては，元をたどれば「複素共役をとる」という数学的操作が何の必然性もない操作であることから，この操作が結果的に未来からの情報を付加していると考えられる．むしろ驚くべきは，1926 年にはそのような意図なしに波動関数が導入されたということである．

速度場が，もう1回積分すれば軌道が決まる．あるいはHamiltonの理論などでは最初からこれらの操作が二つの方程式として記述されている．同じことを，もし粒子がノイズを含むような確率的運動をする場合に，どのように扱ったらよいのかを考えたのが確率過程量子化法である．絶えずランダムな揺動に突き動かされているような粒子の軌道は，接線の引ける滑らかな軌道ではなく，ある点で微分することができない．したがって，そもそも微分方程式を立てることができない．そこで，確率的な運動では，力の概念はその運動が単位時間後に移動するであろう期待値を決定すると考える．この期待値をドリフトと呼び，このようにして構築された理論が確率微分方程式の理論である．軌道の決定は，物理的概念によって定められたドリフト場に従って，サンプル経路を描くことになる．前節のフォーマリズムでは，ドリフトを定めるための運動方程式が(8)と(9)，そのドリフトを用いてサンプル経路を描く方程式が(7)であった．

以上のアナロジーより，古典力学と確率過程量子化の違いは，揺動の有無だけであることがわかる．力学としてNewton力学を用いている確率過程量子化は「古典力学の確率的運動に対する一般化」であると言える．(7)において，ブラウン運動の項を0とおけば，古典的な速度と道のりの関係に戻る．すなわち，揺動の減少とともに純粋な古典力学的軌道へと収束する．

ただし，いくつかの補足が必要である．まず，この理論のどこが「量子化」か．$\hbar$の値は揺動の度合い$\hbar/m$として，実験値から得られる．$\hbar$が導出されるものではなく実験から得られるということは，通常の量子力学でも同じである．粒子がある一定の揺動運動を常に続けていて静止することがないという描像は，通常の量子力学における「量子化」が物理量（例えばエネルギーなど）の最低単位をもたらすことに通ずる．2点目，上の記述から明らかなように，ここで使われている「古典力学的」とは単にNewton力学の手法を用いているという意味で，例えば粒子が滑らかで決

定論的な運動をすることは含意されていない．3 点目，確率過程量子化は，単なる古典的確率過程ではなく，時間対称的確率過程であるという事実がある．他の量子化がなしえなかった複素数を用いないフォーマリズムが，この時間対称性によって実現されているという意味で，確率過程量子化だけでなく，量子力学とは何であるかを問う上で非常に重要な性質である．

それでは，なぜ時間対称的な確率過程でなければならないのだろうか．量子力学が単に「Newton 力学を確率的運動にも適用できるように一般化したものである」と言いうるためには，その際に必要とされた時間対称的構造に解釈を与えなければならない．

## 5.　古典的確率過程と物理的概念の衝突

ここで，確率過程の理論に力学を導入する際に問題となった箇所，すなわち確率過程量子化の理論構築のために時間対称性が要請された当の現場を詳しく見る．

定理 1 の時間非対称的表現 (1), (2) では，遷移確率について以下のような規格化条件が前提とされていた．

$$Q(s, x; t, \mathbf{R}) = 1 \tag{23}$$

$$\tilde{Q}(s, x; t, \mathbf{R}) = 1 \tag{24}$$

あるいは，

$$\int q(s, x; t, y)\, dy = 1 \tag{25}$$

$$\int \tilde{q}(s, x; t, y)\, dy = 1 \tag{26}$$

ところが，例えば (1) の確率密度の拡散の表現（いわゆる古典的熱拡散方程式）は，$u$ を確率密度，$V(x)$ をポテンシャルとして

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta u + V(x) u \tag{27}$$

と表わされるが，これを解くと，

$$u(t, x)=P_X[f(B_t)e^{\int_0^t V(B_s)ds}] \tag{28}$$

ただし，[…] は期待値を，$\{B_t, P_X\}$ は Brown 運動を表す．これは，$Q$ や $q$ に関して規格化条件が満たされないことを意味している．例えば，単純に $V$ が定数であるような場合，

$$\int q(s, x; t, y)dy>1 \tag{29}$$

といったことが生ずる．すなわち，ポテンシャルのある場，力を考慮しなければならない場，あるいは（古典的）力学を考慮しなければならない場では，時間非対称な表現 (1) や (2) は使えない．

そこで，通常の規格化条件に代えて（通常の規格化条件を満たさないような $p$ をそのまま用いて)，時間対称的規格化条件とでも呼ぶべき

$$\int \tilde{\phi}_a(x)dxp(a, x; b, y)\phi_b(y)dy=1 \tag{30}$$

を定義すると，(5) は規格化され，

$$\int \tilde{\phi}_t\phi_t dx=1 \tag{31}$$

となる．(25) と (30) とを比べてみると，(25) では時刻 $s$ に位置 $x$ にあった粒子が後の時刻 $t$ に様々な位置 $y$ にある確率の総和が 1 であると言っているのに対し，(30) は時刻 $a$ のすべての可能性に対して時刻 $b$ のすべての可能性が実現される確率の総和が 1 であると言っている．(30) は過去と未来とを同等に扱っている．(時刻 $a$ と $b$ のどちらが過去でどちらが未来かは単に記号の定義の問題でしかない.)

## 6.　なぜ時間対称性か

そもそも「確率」とは人間と物理世界の関係のどのような側面を描写しているものなのだろうか．まずは「確率」という言葉の使い方から考えて

みたい．例えば，私たちが「その粒子は確率的運動をしている」と言うとき，何を意味しているのだろうか．様々な解釈が考えられるが，どんな解釈も，確率がその粒子のある時刻の状態（に関する情報）と別の時刻の状態（に関する情報）の関係を扱っているということを大前提としている．このことは「決定的」という言葉と対比するとわかりやすい．決定的か否かは，二つの時刻の状態があってその関係を考えることで初めて言えることである．同様に，「確率的」という言葉も時間性なくしては意味をなさない．「トランプには4分の1の確率でハートがある」が不自然で，「トランプには4分の1の割合でハートがある」が自然なのはこのためである．あるいは「トランプからハートを引く確率は4分の1である」とすれば時間性が入ってくるので自然になる．この「時間性」は確率論が数学的（測度論的）に公理化されることによって失われてしまった確率の一側面である．確率論の公理において，私たちは根元事象に対してある確率値を与えるが，具体的にどのようにその確率値を与えるべきかは公理系の教えてくれるところではない．その際与えられるべき確率値に，次に見るような「確実性のエントロピーの増大」というかたちでの時間性が隠されている．これが私たちが「確率」という言葉を使う際に時間性が入ってこないと不自然に感じる原因になっている．本節では，この確率概念における時間性を問い直すことで，確率過程量子化の時間対称的構造の基礎づけを試みる．ただし，「概念的基礎づけ」とは結局のところ私たちが納得のいくように説明することであり，私たちが納得のいくような説明が私たちの日常経験に由来しているものであるとすれば，古典力学から逸脱する可能性のある内容の概念的基礎づけをするのは難しい．したがってここでは，確率概念の時間非対称的な構造の根拠を疑うことで，時間対称的な構造の基礎づけとする．

日常的には，あるいは古典力学をベースとして物事を考えるときには，以下のような確率の使い方は至極自然に感じる．ある時刻における粒子の

状態（位置や運動量）が斯々であったという条件の下で，別の時刻における粒子の状態が然々である確率は何パーセントである．これが確率だとすれば，確率とは「確実性のエントロピー」が増大していく様子を表現したものである．古典的ブラウン運動をする花粉の微粒子を例にすれば，最初はある点に非常に確かに存在している．次の瞬間にどちらの向きから水分子が飛んでくるかは不確実であるから，次の瞬間の位置の確からしさは少しぼやけ，確実性のエントロピーは増大する．その次の瞬間にはもっと増大する．先に出てきたような「トランプからハートを引く確率は4分の1」といった等確率値は，このような確実性のエントロピーが増大しきっている状態での予測という特別なケースにあたる．重要なのは，この「確実性のエントロピー」が物理学の熱力学第二法則よろしく増大則に従うという直観である（ただし確率の場合，増大の方向は私たちが予測をしようとする時間の向きに依存している）．そのような直観を表現してくれる古典的拡散過程（Brown 運動）の理論は時間的に非対称である．エントロピー増大の理論がエントロピー減少を表現できないように，通常の確率過程の理論では，広がっていく確率過程の逆過程を表現することはできない．正確には，一歩一歩の遷移確率を分解して新しい逆向き遷移確率を構成し，逆向き過程を構成することはできる（(2) の表現にあたる）のだが，アンサンブル集団の振舞いを記述する方程式は逆向き過程には使うことはできない．

ところが，宇宙空間に漂う，一歩一歩が全方向に等確率で動くような粒子を考えたとき，それは明らかに時間対称的な運動をしている．簡単に言うと，その粒子の運動をビデオに撮ったとき，それを順向きに再生しているのか逆向きに再生しているのか区別がつかない．あるいは同じ条件のもとで，複数の確率過程（アンサンブル）を同じ画面で同時に再生したとしても，やはり順向きか逆向きかの区別はつかない．

時間対称的な運動と，時間非対称的な理論．この違いは，人間が予測を

始める際の物理系に対する「確実性のエントロピー」の低さ，すなわち非常によくわかっているという状況に起源している．偶然ある位置を通っていた粒子に注目し，まるでそこから全宇宙がスタートしたかのように扱う．熱力学的増大則が過去におけるエントロピーの低さに起源していると考えられるのに対し，確率論的増大則は，ある時刻における情報の確かさ（たいていの場合，確実な情報から予測をスタートさせるし，その逆は不可能である）に起源している．

では，時間対称的な確率運動を時間対称的なままに記述するような方程式はないのだろうか．それはつまり，古典的拡散過程のように時間の向きがはっきりしている理論ではなく，過去と未来の見分けがつかないような理論である．実はそのようにして時間対称性を実現しようとする動機の中で作り上げられたのが，確率過程量子化の理論である．

確率過程量子化は，普通の非対称な確率的推論を過去と未来との両方から行った理論ではない．例えば私たちは，昨日の天気と明日の天気から今日の天気を予測することができる．梅雨時であれば，昨日と明日が雨ならば梅雨前線が訪れている証拠であり，今日も雨の可能性が高い．これは単なる「2 方向からの時間非対称的予測」である．このようなことを確率過程量子化が行っているわけではない．前節で見たように，時間的に非対称な Brown 運動の理論に，力の概念を組み入れて物理理論にしようとすると，全空間の確率が 1 を超えてしまうといったことが起きる．このため，力のある場では通常の Brown 運動の理論は使えないことがわかっている．したがって，確率過程の時間対称化とは，Newton の理論を確率的運動に拡張するために要請される変更であると捉えることができる．確率過程量子化では，ある点 A から別の点 B へ移動する遷移確率 $p$ は，それを逆側から辿ったとき B から A に移る遷移確率 $p$ に等しくなる．そのような $p$ を拡散過程について構成することができる．つまり，宇宙空間に漂っている粒子の軌道を任意に切り取ってきて，私たちから見ての確率で

はなく，その確率的運動そのものの確率測度を記述してくれるのが時間対称的確率過程である．このような記述に物理学的な力の概念（これはよく知られているように時間対称的な概念である）を導入することで，拡散過程の物理理論が構築され，たった一つの方程式でどちらの向きにも対応できるような Schrödinger 方程式と同じ形をした定理が導かれるのである．繰り返すと，「確実性のエントロピーの増大」としての確率的運動には，物理理論としての資格がない．それは物理的な概念と整合しない．

ここで，操作的な事実を整理しておくと，時間的に非対称な表現 (1), (2) は物理的概念とは整合しないが，一たび時間対称的表現 (3) によってドリフトが与えられれば，具体的なサンプル経路を描くのは (1) あるいは (2) である．つまり，私たちがどう見るかとは別に，物理的世界において確率測度が定められていて (3)，それをある 1 点からある時間方向に向かって眺めたとき ((1), (2)) にはエントロピーの増大という描像があてはまることになる．

このような経緯から，以下のような解釈が可能である．私たちは，本当に確率的運動をしている粒子など見たことがない．私たちの想像する確率的運動とは常に，古典的 Brown 運動のように，決定論的な運動をする古典力学の世界が背後にあって，その中での人間の無知を表現した「確実性のエントロピーの増大」という形がベースになっている．そして現代において，本来時間対称的であるはずの確率的運動の姿が微視的世界の探求によって明らかにされようとしている．私たちはこれまで，量子力学的事実を眼前にして，実在に関する常識と確率に関する常識とを天秤にかけ，前者を捨て後者を救ってきた．「確率過程が干渉することなどありえない．だから，量子は粒子であるとともに波である．」と考えてきた．そしてその二重性から数々の奇妙なパラドクスが生み出されてきた．このような歴史は以下のように読み替えられる．「ある対象が粒子であると同時に波であるということはありえない．だから，確率過程というのは本来干渉する

べきものである.」.

そもそも「確率過程は干渉しない」あるいは「確率は加法性を満たす」といった直観自体が，確率を単に決定論的な世界の中で人間が思い描く可能性の集合だと捉えるところに起源している．ある人間にとって，人生は無数の分岐からなっていて，今日の可能性の集合の一つ一つの元の中には明日の可能性の集合が含まれていると感じる．ブラウン運動も同様に，現在の粒子の状態から次の瞬間の粒子の可能的状態が広がっていると感じる．この直観は，ある一定方向の時間とともにある人間から見て，過去や今の粒子の状態が確定していて，もし次にこちらの方向から水分子が飛んでくれば（因果的作用の結果）次の粒子の状態はこうなる，あちらから飛んでくればああなる，といった主観的確率による．そして起こらなかったほうの出来事は，その後決して世界に対して影響を与えることはない．しかし，もしそのような描像が客観的に確率的運動をする粒子にも当てはまるとしたら，その粒子は私たちが過去と呼んでいる時間方向の側よりも私たちが未来と呼んでいる時間方向の側での可能性を多く持っていることになる．物理学というものが人間の視点，特にこの場合，空間的な視点だけでなく時間的な視点をも超え出たところで対象を記述するようなものであるとすれば，可能性の集合も常に世界の外から（時間に対して中立な立場から）記述する必要がある．空間をある1点から眺めたとき，自分の近くにある物の後ろにある物は見えないが，それはその空間にとって本質的な性質ではない．同様に，時間的に前の可能性が時間的に後の可能性を全て包含しているということは，時間全体にとって本質的な性質ではない．そして一たびそのように考えると，途端に確率の加法性という概念は無根拠なものとなる．なぜなら，加法，すなわち足し算とは，同じ単位のものに対してのみ用いうるからである．確率における単位とはすなわち同じ時点での条件（情報）のことである．もしそのような視点をおかないとすれば，単純に足し算をしていい対象ではなくなる．確かに私たちは客観的な

確率運動に関しても，具体的な１本のサンプル経路を描くときには，ある１点（確実性のエントロピーの非常に低い状態）から出発して，いわばエントロピー増大というかたちでの確率的軌跡をたどっていくことになるが，その際すでに客観的世界の側で決まっているはずの確率測度が主観的確率の満たすべき性質に従っていなければならない理由はない．私たちは，時間の外に立って時間全体を眺めたとき，確率的運動に関して加法性が満たされなければならない理由をどこにも見出すことはできない．

以上のような考察から，確率過程からの量子力学へのアプローチは，量子力学の奇妙さの原因を，時間とともにある私たちから見た確率的運動が満たすべき性質と，時間全体を通して決まっている確率的運動が満たすべき性質との違いに落ち着けるものである，と言うことができる．

## 7.　確率が先か確率振幅が先か

前節まで，確率過程量子化が Newton 力学をノイズのある運動に一般化しようとする大きな流れの中にあることを見てきた．そしてその際の確率過程の時間対称化に対して，私たちが通常思い描く主観的確率の人間中心性を見直すといった形で基礎づけを試みてきた．そこで私たちは以下のように結論づけたい．「量子力学が奇妙なのは力学のせいではなく，私たちの確率的運動に対する常識がある種の人間中心原理によって支配されていたからである．私たちの世界はあくまで力学としては Newton 力学に支配されている」．しかしながら，そのような帰結が私たちの常識からどれだけ逸脱しているかを見積もることは容易でない．実際，時間的に対称な記述がなぜ干渉現象を生み出すのかに関しては直感的な説明は困難である．

最後に本節で，時間対称的確率過程の描き出す世界について検討・批判を与える．いくつかの確率過程 $\{X_t, t \in [a, b], Q^{(k)}\}$ を (3) の時間対称的記述によって表現すると，

$$Q^{(k)}=[\tilde{\phi}_a^{(k)}p^{(k)}\rangle\!\rangle\langle\!\langle p^{(k)}\phi_b^{(k)}],\quad k=1,2,\cdots \tag{32}$$

これらの確率過程の重ね合わせは，$\alpha, \beta$ を規格化定数として，

$$\tilde{\varphi}(t,x)=\alpha(t)\sum_k \alpha_k \tilde{\phi}^{(k)}(t,x) \tag{33}$$

$$\varphi(t,x)=\beta(t)\sum_k \beta_k \phi^{(k)}(t,x) \tag{34}$$

重ね合わせの確率密度は

$$\mu(t,x)=\alpha(t)\beta(t)\sum_{k,i}\alpha_k\tilde{\phi}^{(k)}(t,x)\beta_i\phi^{(i)}(t,x) \tag{35}$$

この式における干渉項が複数の Markov 過程の干渉を表現するものであるとされる．そして以上のことを複素数によって表現したものが，いわゆる伝統的量子力学の理論だということになっている．この事実をもって，たとえば Nagasawa[4] は，「量子力学で言われている“波動性”とは，波動関数の重ね合わせ以外の何物でもない．量子力学の解釈問題の解決に必要なのは，粒子の運動を扱うと同時に重ね合わせの原理を持ちうるような数学的対象である．我々の Markov 過程の理論はまさにそのような理論である.」（意訳，以下同様）と主張する．しかしながらここで表現されている重ね合わせは，実際，非常に奇妙なものである．たとえば，ダブルスリット実験のようなケースを考えてみると，それぞれのスリットを通る確率過程 $\{X_t, Q^{(1)}\}$，$\{X_t, Q^{(2)}\}$ の時間対称的表現は，

$$Q^{(1)}=[\tilde{\phi}_a^{(1)}p^{(1)}\rangle\!\rangle\langle\!\langle p^{(1)}\phi_b^{(1)}] \tag{36}$$

$$Q^{(2)}=[\tilde{\phi}_a^{(2)}p^{(2)}\rangle\!\rangle\langle\!\langle p^{(2)}\phi_b^{(2)}] \tag{37}$$

重ね合わせの確率密度は

$$\mu(t,x)=\alpha(t)(\tilde{\phi}^{(1)}\,\tilde{\phi}^{(2)}+\phi^{(1)}\phi^{(2)}+\tilde{\phi}^{(1)}\phi^{(2)}+\phi^{(1)}\tilde{\phi}^{(2)}) \tag{38}$$

最後の２項が「干渉項」ということになる．これはつまり，一方のスリットを通る確率過程の前向き予測と他方のスリットを通る確率過程の後ろ向き予測とが干渉していることになる．しかし，両方向からの予測とい

うことで私たちが通常思い描くのは，先に両方向からの確率予測を出しておいてそのあと規格化しつつ合算する

$$\mu(t, x)=\alpha(t)(\tilde{\phi}^{(1)}\tilde{\phi}^{(2)}+\phi^{(1)}\phi^{(2)}) \tag{39}$$

である．なぜ先に確率振幅とその重ね合わせなるものがあって，その後に確率がくるのか．計算の順序を最初からそのように仮定している時間対称的確率過程は，この量子力学の謎に答えているとは言い難い．先に確率を出してから合算する方法が古典力学に支配された日常世界のみで通ずる主観的確率という先入観によっていると糾弾することはできても，その逆の方法がなぜ微視的世界を表現するのかという問いに正面から答えるのは難しい．

Nagasawa[4] はこれについて，「時間対称的確率過程の確率測度は，初期確率分布だけではなく終期確率分布にも依存している．したがって，二つの確率過程が重ね合わされたとき，それが単に加法的にならないのは当然のことである」と説明している．しかし私たちは，初期確率分布と独立に決まる終期確率分布がどういったものかを想像することができないし，初期確率分布だけでなく終期確率分布に依存している確率測度なるものも知らない．また，「重ね合わされた確率過程は両方のスリットが開いていることを知っている」「$\mu=\tilde{\phi}\phi$ には二つの意味が重ねられていて，一つは1回の試行における確率過程の密度分布，もう一つは系の空間的な統計分布である」といった解説が与えられている．これらの言明は，私たちから眺めた確率とは別に，時間全体を通して決まっている確率的な物理世界の存在を感じさせるものである．未来が複数の可能性を持っているのと同様に，過去も複数の可能性を持っている，そう言わざるをえない．私たちはそれらの中の1点を時間的に一方向に辿たどっている．

実際私たちが目にしている世界は莫大な粒子から成り立つ巨視的な世界であるから，統計性，エントロピー，束縛条件などにより，上のような事実がそのまま成り立っているわけではない．しかしながら，個々の微視的

存在に着目するならば，時間対称的確率過程は私たちの常識から見て非常に奇妙な世界を描いていることになる．

## 8. さいごに

最後に，タイトルに掲げた問題をもう一度問い直してみたい．確率過程量子化が Newton 力学の確率的運動への一般化であるということは事実である．そしてその際必要とされる確率過程の時間対称的構造には，時間非対称な主観的確率を粒子の確率的運動にそのまま用いることを反省することで，一つの基礎づけを与えることができる．しかしながら，その時間対称的構造を掘り返していくと，それが描き出すところのものは，私たちが「Newton 力学」として安心して思い描く世界とはだいぶ距離があることがわかる．したがって，以下のようにまとめることができる．確率過程量子化は力学としては古典力学的だが，世界像としては古典力学的と言うには程遠い．

### 参考文献


1) Schrödinger, E. (1931) "Uber die Umkehrung der Naturgesetze" Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. *Phys. Math.* Kl. 30, 144–153.
2) Nelson, E. (1966) "Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics" *Phys. Rev.* 150, 1079–1085.
3) Nagasawa, M. (1993) *Schrödinger equations and diffusion Theory* (Boston, Birkhauser).
4) Nagasawa, M. (2000) *Stochastic processes in quantum physics (Boston, Birkhauser).*
5) Yasue, K. & Zambrini, J. C. (1985) "A Cinematic Study of Quantum Kinematics" *Ann. Phys.* 159, 99–117.