Title	ダッチ・ブック論証による信念の度合いとしての確率解釈
Sub Title	The interpretation of probability as degree of belief by the Dutch book argument
Author	高須, 大(Takasu, Dai) 横尾, 剛(Yokoo, Tsuyoshi)
Publisher	三田哲學會
Publication year	2003
Jtitle	哲學 No.109 (2003. 3) ,p.273- 289
JaLC DOI	
Abstract	Lots of efforts have been paid for interpreting the concept of probability by another familiar concept such as ignorance, degree of a partial logical entailment, degree of belief, frequency, and propensity. In this paper the subjective theory is addressed. According to this theory, probability is interpreted as coherent degree of belief of a particular individual. This interpretation is achieved through following the two-step replacements: (1) Degree of belief is interpreted as fair betting quotient; (2) Fair betting quotient is interpreted as probability. The first replacement is based on the claim that in a bet (decision-making in an uncertain situation) a bettor's degree of belief whether an event will occur can be measured by a real number which she gives through her judgement on the fairness of the bet. The second replacement is based on the fact that when a bettor makes bets on events, in order to be guaranteed not to lose whatever happens (in order to be coherent) she should assign her betting quotients in accordance with the probability axioms, and vice versa. It is the so-called Dutch Book Theorem that guarantees this fact mathematically. The purpose of this paper is to clarify and confirm the contents of the subjective theory in terms of betting systems along the following approach (Ramsey (1931), de Finetti (1937), Howson Urbach (1993), Gillies (2000), etc.).
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000109-0273

研究ノート

ダッチ・ブック論証による信念の度合いとしての確率解釈

高須　大*, 横尾　剛†

The Interpretation of Probability as Degree of Belief by the Dutch Book Argument

Dai Takasu and Tsuyoshi Yokoo

Lots of efforts have been paid for interpreting the concept of probability by another familiar concept such as ignorance, degree of a partial logical entailment, degree of belief, frequency, and propensity.

In this paper the subjective theory is addressed. According to this theory, probability is interpreted as coherent degree of belief of a particular individual. This interpretation is achieved through following the two-step replacements: (1) Degree of belief is interpreted as fair betting quotient; (2) Fair betting quotient is interpreted as probability. The first replacement is based on the claim that in a bet (decision-making in an uncertain situation) a bettor's degree of belief whether an event will occur can be measured by a real number which she gives through her judgement on the fairness of the bet. The second replacement is based on the fact that when a bettor makes bets on events, in order to be guaranteed not to lose whatever happens (in order to be coherent) she should assign her betting quotients

* 慶應義塾大学大学院文学研究科博士課程（哲学）E-mail: takasu@phil.flet.keio.ac.jp

† 慶應義塾大学大学院文学研究科博士課程（哲学）E-mail: yokoo@phil.flet.keio.ac.jp

in accordance with the probability axioms, and vice versa. It is the so-called Dutch Book Theorem that guarantees this fact mathematically.

The purpose of this paper is to clarify and confirm the contents of the subjective theory in terms of betting systems along the following approach (Ramsey (1931), de Finetti (1937), Howson & Urbach (1993), Gillies (2000), etc.).

1 導　　入

不確実な事象を扱うとき，確率が用いられる．この確率概念を，別の既知の概念によって解釈しようとする試みが，これまで数多くなされてきた．確率概念の解釈として提起されてきたものの中で，主要なものは次の5つに分類することができる[1]:

(a) 古典的無知説: 確率を決定主義的な系に関する無知の度合いとして解釈する

(b) 論理説: 確率を部分的含意の度合いとして解釈する

(c) 主観説: 確率を個人の信念の度合いとして解釈する

(d) 頻度説: 確率を頻度として解釈する

(e) 傾向性説: 確率を反復可能な条件の集合に固有の傾向性として解釈する

本稿では，上記の諸解釈の中から，(c) の主観説を取り上げる．通常，主観説による確率の正当化には，賭け指数 (betting quotient) と呼ばれるものの集合が満たす条件（整合性 (coherence) として定義される）と，確率の公理との間の論理的な関係を述べる定理（ダッチ・ブック定理と呼ばれる）が用いられる．主観説では，この定理に基づく論証（ダッチ・ブック論証と呼ばれる）によって，確率を，公平な (fair) 賭け指数と同一視されたある特定の個人の信念の度合い (degree of belief) で， かつ， それら

[1] Gillies (2000) を参照せよ.

の集合が整合性の条件を満たすものとして解釈する.[2]

本稿の目的は，既存の主観説の試み[3]を厳密な仕方で表現することを通じて，主観説の内容を確認することにある.

2 主観説とダッチ・ブックの論証

2.1 主観説の方策：信念の度合いから確率への2段階の置き換え

主観説では，確率は行為者の整合的な信念の度合いと解釈される．ここでは，この解釈を2段階の置き換えによって整理してみよう．1つ目は，信念の度合いを公平な賭け指数とみなすという段階である．つまり，aを事象の生起に関する言明であるとするとき，「賭け手Xのaについての信念の度合いはpである」という言明は，「賭け手Xのaについての公平な賭け指数はqである」という言明とみなされる．後に詳しく見るが，公平な賭け指数というのは，その生起が不確実な事象についてのある種の賭け（不確実な状況での意思決定）において，賭け手の公平性に関する判断を通じて与えられる実数である．2つ目は，公平な賭け指数を確率とみなすという段階である．つまり，「賭け手Xのaについての公平な賭け指数はqである」という言明は，「$P(a)=r$（aが真であることの確率値はrである)」という言明とみなされる.

2つ目の置き換えは，次のような事実に基づいている．賭け手が，何らかの試行の生起を条件にしてその生起が決まるような事象についての賭け（ここでは，いくつもの賭けを一挙に行うような場合を想定している）をするとき，いかなる試行の結果が生じようとも賭け全体として必ず損をす

2 このようなアプローチは主観説における唯一のものではない．他にも，Ramsey (1931) に始まる効用理論を通じたアプローチなどがある．Howson (1995), Howson & Urbach (1993) を参照せよ.

3 Ramsey (1931), de Finetti (1937), Howson & Urbach (1993), Gillies (2000) を参照せよ.

るような賭けにしないためには（賭け手が整合的であるためには），賭け指数の付与を確率論に従う仕方で行わなければならないし，また，その逆も成り立つという事実である．このことを数学的に保証するのが，ダッチ・ブック定理と呼ばれるものである．以下では，主観説の主張を順を追って，詳しく見ていくことにする．

2.2 賭けの一般形式と賭け指数

本稿では，賭けを用いて主観説を展開するアプローチを採用する．まず，賭けに関連する用語の定義から始める．賭けはどの結果が生じるかが不確実な何らかの試行（例えば，サイコロ振り，ルーレットのゲーム，競馬のレース etc.）の生起を条件として行われる．このとき，賭ける対象 A を賭けの対象と呼ぶことにする．賭けは，X という賭け手と Y というブック・メーカーとの次のような取り決めとして定義できる．賭けの対象になっている A が生じたならば，賭け手 X は $(1-q)\varDelta S$ をブック・メーカー Y から受け取り，生じなければ，$q\varDelta S$ を Y に支払うという取り決めとして賭けを考えることができる.[4] さらに，$\varDelta$（$+1$ あるいは -1）と S $(\in\mathbb{R}_{\geq 0})$ の値はブック・メーカーによって決定され，賭け手は，$q(\in\mathbb{R}_{\geq 0})$ の値を決定するときに，$\varDelta$ と S の値は知らされていないものとしよう．このとき，賭け手 X が与える値 q を賭け指数と呼ぶことにする．ここで，S は，賭けの賞金を表し，$\varDelta$ は，賭け手とブック・メーカーの間での賭け金の動きの向き（以下では，「賭けの向き」と省略する）を表す.[5] この取り決めが実行されることを，「賭けが行われる」と呼ぶことができる．

試行の結果からなる集合を $\Omega=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ と表す．ただし，Ω の要

[4] この取り決めは，A が生じたならば，X は $\varDelta S$ を Y から受け取り，生じなければ，何も受け取らないという条件の下で，X が「参加費」として $\varDelta S$ を支払うという取り決めと言いかえることもできる．

[5] $\varDelta=-1$ の場合は，X は，A が生じたならば，$-(1-q)S$ を受け取り（$(1-q)S$ を支払い），生じなければ，$-qS$ を支払う（qS を受け取る）ということを意味する．

素は互いに排反ですべての可能性を尽くしており，Ω の任意の要素からなる単元集合 $\{e_k\}$ は試行の特定の結果を表す．賭け手 X は，Ω の任意の部分集合に賭けを行うものとする．Ω の部分集合全体からなる集合を $Bet=\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, A_{2^n}\}$ と表す．賭け手が，Bet の 2^n 個のすべての要素に「同時並行で」賭けを行うと，Bet は賭け手が賭けの対象とするすべての事象からなる集合を表すことになる．Bet を賭けのシステムと呼ぶ．さらに，賭け手が，賭けの対象 A_i に対して賭け指数 q_i を与えることを，$\Phi(A_i)=q_i$ と表す．[6]

任意の賭けの対象 A_i に対し，賭け手 X が賭け指数 q_i を付与する．それに対して，ブック・メーカー Y は，$\Delta_i S_i$ を与える．Δ_i と S_i の値の与え方をブック・メーカー Y の戦略と呼ぶことにし，ブック・メーカーが賭け手の賭け指数の与え方に対して採り得る，賭けの向き Δ_i と賞金 S_i の値のすべての与え方からなる集合を Str_{Bet} と表す．[7] また，Str_{Bet} の任意の要素を str_j と表す．Str_{Bet} は，賭けのシステム Bet に対してブック・メー

[6] (1) Φ は，Bet を定義域とし，$[0, +\infty]$ を値域とする関数である．(2) 賭け指数の与え方は賭け手によって異なりうるし，また，同じ賭け手でも，背景情報によって異なり得るものと考えられる．しかし，本稿では，賭け手と賭けを行う時刻を固定している．(賭けは「一挙に」行われ，「一挙に」精算される．) なお，賭けを行う時刻（や賭け手がもつ背景知識）を固定する本稿のような仕方でのダッチ・ブック論証は，賭け手の信念の度合いの与え方 (Ψ) についての共時的原理の正当化をねらったものであるため，通常，共時的な (synchronic) ダッチ・ブック論証などと呼ばれる．これに対して，新たな情報が得られたときに，どのようにして賭け手が賭け方（信念の度合いの与え方）を変えるべきかについての原理の正当化をねらったダッチ・ブック論証は，通時的な (diachronic) ダッチ・ブック論証などと呼ばれ，現在盛んに研究されている．(3) 賭け指数は，現実の賭けでよく用いられる賭け率 (odds) とは異なる．ここでの設定でいえば，任意の賭けの対象 A について，賭け手 X が賭け指数 q を与えるとき，その賭け手は A について賭け率 $q/(1-q)$ での賭けを行っていることになる．

[7] Str_{Bet} は $\{\Delta_i S_i \mid \Delta_i=+1 \vee \Delta_i=-1, S_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ for } i=1, 2, \ldots, n, \ldots, 2^n\}$ として定義される．

カーが採り得る戦略の集合であり，str_j は特定の戦略を意味する．[8]

賭けが行われるための条件をまとめると，以下のようになる：(1) 試行と試行のすべての結果からなる集合 Ω が確定する；(2) 賭けのシステム Bet の各々の要素 A_i に対して賭け手 X が賭け指数 q_i を付与する；(3) ブック・メーカー Y が賭け手の賭け方に応じて戦略 $\varDelta_i S_i$ を与える；(4) 試行が行われる．さて，このような条件が整い，実際に 2^n 個の賭けが行われたとする．このときの賭け手の正味の利得は，(1) 賭け手が賭け指数を付与する仕方 Φ，(2) ブック・メーカーが採った戦略 str_j，(3) 試行の結果 $\{e_k\}$，によって決定される．賭けのシステム Bet からの賭け手の正味の利得を $Prf(\{e_k\}, \Phi, str_j)$ と表すことにすると，それは以下の式で表される：

$$Prf(\{e_k\}, \Phi, str_j) = \sum_i (1-q_i)\varDelta_i S_i + \sum_j (-q_j)\varDelta_j S_j$$

ここで，1つ目の総和は，$A_i \supseteq \{e_k\}$ であるような i について取られ，2つ目の総和は，$\{e_k\} \cap A_j = \varnothing$ であるような j について取られる．つまり，1つ目の総和は，「当たった」賭けからの利得の合計を表し，2つ目の総和は，「外れた」賭けからの損益の合計を表す．

上記の一般的形式を簡単な具体例を挙げて説明しよう．2頭立ての競馬で，それぞれの馬が勝つかどうかについて賭けを行う．出走馬を h_1, h_2 とする．w_i は馬 h_i が勝つという結果を表すとすると，起こり得るすべての結果は，$\Omega = \{w_1, w_2\}$ で表される．ここで賭け手は，賭けのシステム $Bet = \{\varnothing, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_1\} \cup \{w_2\}\}$ のすべての要素に対して賭け指数を与える．

---

[8] Williamson (1999b) は，もし，確実に起こる事象と起こり得ない事象に関する知識について，賭け手とブック・メーカーとの間に差があると仮定されているならば，その仮定だけから，賭け手がダッチ・ブックを被るか，「ブック・メーカーがダッチ・ブックを被る」かのどちらかが常に生じ得るため，上記の知識について両者が一致していることが必要だと正しく論じている．（「ダッチ・ブックを被る」ということの意味は，後の節で与えられる．）ここでは，賭け手，ブック・メーカー双方とも，「論理的全能者」であると仮定されている．

つまり，合計4個の賭けを行う．これらの賭けに対して，賭け手がそれぞれ0, 0.4, 0.6, 1という賭け指数を付与し，ブック・メーカーが1, −2, 2, −1という戦略を採ったとする．このとき，馬h_1が勝ったとすると，賭け手は，$\{w_1\}$と$\{w_1\}\cup\{w_2\}$への賭けに「当たり」，$\{w_2\}$と$\varnothing$への賭けには「外れた」ことになる.[9] このとき，各々の賭けからの賭け手の正味の利得は，それぞれ0, −1.2, −1.2, 0となり，正味の利得の合計は−2.4となる．馬h_2が勝ったとすると，賭け手は，$\{w_2\}$と$\{w_1\}\cup\{w_2\}$への賭けには「当たり」，$\{w_1\}$と$\varnothing$への賭けには「外れた」ことになる．各々の賭けからの賭け手の正味の利得は，それぞれ0, 0.8, 0.8, 0となり，正味の利得の合計は1.6となる．

2.3　第1段階：信念の度合いと公平な賭け指数

信念の度合いと公平な賭け指数とを結び付ける第1段階の置き換えについて見ていくことにする.[10] まず，賭け手は任意の賭けの対象について信念の度合いを持つと仮定される：

(i)　Xは賭けのシステム*Bet*の任意の要素，すなわち，任意の賭けの対象A_iに対して信念の度合いb_iを持つ．ここで，*Bet*の各要素とその要素についてのXの信念の度合いとを対応させる関数をΨとし，$\Psi(A_i)=b_i$と表す．

次に，賭け手の信念の度合いは，賭け手がどのような条件（賭け指数）での賭けを公平であるとみなすかによって測定できるとされる.[11] 賭け手Xにとって，賭けA_iの条件である賭け指数q_iが公平であることは，以下

[9] 試行の結果が何であれ，$\{w_1\}\cup\{w_2\}=\{w_1, w_2\}=\Omega$への賭けには「当たり」，$\varnothing$への賭けには「外れる」．

[10] この部分の記述については，Horwich (1982), Skyrms (1986), Howson & Urbach (1993) を参照した．

[11] 通常，賭け手は賭けから利益を得たいので，公平な賭けではなく，自分にとって有利な賭けを行いたいだろう．ここでは，賭け手に自分の信念の度合いを測るための思考実験をしてもらうと考えればよい．

のように定義される[12]:

(ii) 賭け手 X が賭けの対象 A_i に対して与える賭け指数 q_i が X にとって公平であるとは，X が賭け指数 q_i での A_i への賭けと，賭け指数 $1-q_i$ での A_i^c への賭けの有利さが等しいと判断することである.[13] ここで，賭けのシステム Bet の各要素とその要素についての X の公平な賭け指数とを対応させる関数を Φ_{fair} と表すことにする.

賭けの公平性についてもう少し説明が必要だろう．賭けは，利得表 (payoff table) で表現するのが便利である．以下の利得表は，賭け手 X が賭け指数 q_i で A_i へ賭けたときの支払いを示している（左の列は，その賭けにおける結果を表し，右の列は，その結果が生じたときの賭け手 X の正味の利得を表す．便宜上，ここでは $\Delta_i=+1, S_i=1$ とする）:

［賭け A_i の利得表］

結果	賭け手 X の正味の利得
A_i が生じる	$1-q_i$
A_i が生じない	$-q_i$

上の定義 (ii) は，賭け手 X にとってこの賭けが公平であるならば，次の利得表で表される賭けも同じ賭け手にとって公平であるという定義である:

［賭け A_i^c の利得表］

結果	賭け手 X の正味の利得
A_i^c が生じる	$(1-(1-q_i))=q_i$
A_i^c が生じない	$-(1-q_i)$

[12]「事象 A を対象とする賭けの賭け指数 q が公平である」は，「賭け指数 q での事象 A を対象とする賭けが公平である」と同義である．後者のほうが日常的表現に近いかもしれない.

[13] ここでは，任意の賭けの対象について，賭け手は公平な賭け指数を一意に定めることができると仮定している.

これは，A_i が生じれば（A_i^c が生じなければ）$-(1-q_i)$ を獲得し（$(1-q_i)$ の損益を被り），A_i が生じなければ（A_i^c が生じれば）q_i を獲得する賭けのことであり，ブック・メーカーの立場に立った賭けに他ならない．したがって，賭け手 X にとっての賭け A_i が公平であるとは，立場を替えてもその賭けが公平なままである（その賭けの有利さが変わらない）ということである．

さて，それでは，なぜ公平な賭け指数は信念の度合いを表しているといえるのだろうか？　ここでは，そう考えてよいとする基本的なアイディアだけを，株式取引の例を使って簡単に説明してみよう．[14] 今，賭け手 X は，株券の仲買人であり，ブック・メーカー Y はある株券（これを S と表す）の所有者であるとする．Y は，X が株券 S の値段について実際にどういう値をつけているかを知りたい．そこで，Y は，X に100枚の株券 S を売りたいが，いくらの値段で買いたいか質問する（賭け1）．このとき X は，利益を得たいから，自分が実際に思っている値段より低い値を答える（過少評価する）だろう．逆に，Y が X に100枚の株券 S を買いたいが，いくらの値段で売りたいか質問する（賭け2）．このときは X は，自分が実際に思っている値段より高い値を答える（過大評価する）だろう．しかし，もし，Y が自分が売りたいのか，買いたいのか言わずに X に100枚の株券 S にどういう値をつけるか質問したら，X は実際に思っている値段（実際の信念の度合い）を答えるだろう．[15] このとき，仲買人は，自分が買い手になったとき（賭け1）と売り手になったとき（賭け2）の有利さが変わらないようにしたいだろう．そうするためには，実際に思っている値段（賭け1と賭け2における公平な賭け指数に対応す

[14] Gillies (2000) から借用した．

[15] 今の例で，Y が売り手なのか，買い手なのか明かさないことは，前述した賭けの一般形式では，賭けの向き Δ が正と負の両方の値を取り，どちらになるかは賭け手 X に知らされていない，ということに対応している．

る）を言うのが得策なのである．（なぜ得策なのかは，次に述べる整合性に関する議論で明らかになる．）

以上で，賭け手は，賭けの対象に対して何らかの信念の度合いを持ち，それは賭けにおける公平性の判断を通じて，公平な賭け指数として測定されうることを見た．以下では，賭け指数として公平な賭け指数を与える賭け手を想定して話を進めていく．

2.4　第2段階：公平な賭け指数と確率

前述の競馬の例では，賭け手は，ある馬が勝てば得をし，他の馬が勝てば損をするということが，実際に試行（競馬のレース）を行う前から決まっていた．つまり，試行の結果に応じて，得をする場合もあれば，損をする場合もあるということである．同じように，試行がどのような結果になろうとも，賭け手が必ず損をすることが試行を行う前から決まってしまう場合も考えられる．このような状況は，賭け手がブック・メーカーからダッチ・ブックを被る（状況）と呼ばれ，そのときのブック・メーカーの戦略はダッチ・ブックと呼ばれる．このような状況を前述した賭けの形式の下で定式化すると以下のようになる：

Φ は整合的である$:= \forall j \exists k \; Prf(\{e_k\}, \Phi, str_j) \geq 0.$

この定義から，

Φ は整合的でない$= \exists j \forall k \; Prf(\{e_k\}, \Phi, str_j) < 0$

となる．つまり，賭け手が賭け指数を付与する仕方である Φ が整合的であるとは，ブック・メーカー Y がいかなる戦略 str_j を採っても，その戦略に対して，賭け手 X の正味の利得が負にならない，つまり，賭け手が損をしないような試行の結果 $\{e_k\}$ が存在することであり，Φ が整合的でないことは，あるブック・メーカーの戦略 str_j が存在し，その戦略の下では，いかなる試行の結果 $\{e_k\}$ が生じても，賭け手の正味の利得が負になる，つまり，賭け手が損をするということである．こう定義すると，賭け手がダッチ・ブックを被るとは，賭け手の Φ が整合的でないことである．

前述の競馬の例では，賭け手の Φ（賭け指数の与え方）は，整合的であった．ところが，賭け手が賭け指数として，0, 0.6, 0.6, 1 という値を与えるとすると，賭け手は整合的ではなくなる（ダッチ・ブックを被る）．なぜなら，このときもし，ブック・メーカーが 1, 1, 1, 1 という戦略を採った場合には，もし h_1 が勝てば，各々の賭けからの賭け手の正味の利得は，それぞれ 0, 0.4, −0.6, 0 となり，正味の利得の合計は −0.2 となる．馬 h_2 が勝ったとすると，それぞれ 0, −0.6, 0.4, 0 となり，正味の利得の合計は同じく −0.2 となる．したがって，レースを行う前から賭け手 X の賭け指数の与え方がもつある戦略上の「欠点」のために，ブック・メーカー Y は「確実に得をする戦略（ダッチ・ブック）」を持つことができるわけである．

賭け手は各々の賭けの対象をすべて公平であるとみなすと仮定してきた．しかし，それにも関わらず，今の例では，賭け手は賭けのシステム *Bet* 全体からは，整合的でなくなってしまった．その理由は，賭け手が確率公理に違反する形で賭け指数を与えてしまったからである．今の例では，賭け手は，有限加法性と呼ばれる公理に違反している．ところで，この公理だけでなく，賭け手が賭けをするとき，どの確率公理に違反しても，その賭け手は整合的でなくなること，さらに，その逆も成り立つことが示されている．つまり，上述した整合性と確率公理との間には以下の関係があることが証明できる[16]:

ダッチ・ブック定理

Φ は整合的である $\Longleftrightarrow$ Φ は確率の公理 I–III[17] を満たす．

---

[16] この定理は，de Finetti と Ramsey によって独立に発見された．詳細については，de Finetti (1937), Ramsey (1931) を参照せよ．

[17] ここでは，以下のような公理系を採用する：空でない有限集合 $\Omega=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ と Ω の部分集合全体 $\mathcal{F}$ からなる可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$，および，$\mathcal{F}$ 上の集合関数 P: $\mathcal{F}\rightarrow[0, +\infty]$ が与えられたとき，P が以下の公理を満たすならば，P は確率測度と呼ばれる：（公理 I）$\forall A\subseteq\Omega,\ 0\leq P(A)\leq 1$;（公理 II）$P(\Omega)=1$;（公理 III）

すでに見てきたように，この定理に登場する Φ は，所与の賭けのシステム *Bet* に対して賭け手の賭け指数の付与の仕方を表すものだった．また，ここでは，賭け手は公平な賭け指数を付与すると仮定してきた．つまり，Φ を Φ_{fair} としてきた．このような解釈の下では，この定理は，賭け手は確率の公理に従って公平な賭け指数を与えるならば（賭けを行うならば），整合的であるし，また，整合的であるためには，公平な賭け指数の与え方が確率の公理に従ったものでなければならないということを主張している．[18] Φ が整合的であるとき，所与の賭けのシステム *Bet* に対して Φ によって与えられた賭け指数の集合 S は整合的であると呼び，S の個々の要素を整合的な賭け指数と呼ぶことにすると，上記の主張は，公平な賭け指数の集合が整合的であることは，それが確率公理を満たすための必要十分条件であることと同じである．したがって，確率は，全体として整合的であるような，公平な賭け指数という解釈を持つわけである．以上で，第2段階の置き換えが達成された．

賭け手が公平な賭け指数を付与する仕方 Φ_{fair} が確率公理 I—III を満たすということは，Φ は以下の条件を満たしているということである：（公理 I′）任意の賭けの対象 A について，$0 \leq \Phi_{fair} \leq 1$；（公理 II′）確実に生じる賭けの対象 Ω について，$\Phi_{fair}(\Omega)=1$；（公理 III′）賭けの対象 A と B が排反であるとき，$\Phi_{fair}(A \cup B)=\Phi_{fair}(A)+\Phi_{fair}(B)$．これらの公理 I′—III′ は，賭け手が（複数個の）賭けに臨んだとき，整合的であるために従わなければならない公平性の判断に関する規則と読むことができる．また，賭け手は公理 I′—III′ に一貫して従うならば，ダッチ・ブックを被ることはないし，その逆もいえる，と読むこともできる．

（これらの規則（公理 I′—III′）と当初仮定していた公平性についての定義 (ii) の関係について述べておこう．賭け手が従う公平性の判断の規則に

もし $\forall A_1, A_2 \subseteq \Omega$ かつ $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ ならば，$P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$.

[18] この定理の証明については，付録を参照せよ．

関して，定義(ii)で規定されるもの（これを規則Fと呼ぼう）しか仮定しないときには，賭けのシステムBetの任意の要素A_iについて，$\Phi_{fair}(A_i)=1-\Phi_{fair}(A_i^c)$... (*1) という関係しか成り立たない．前述の競馬の例では，賭け手が賭け指数q_iでの賭けA_iを公平であるとみなすとき，賭け指数$1-q_i$での賭けA_i^cも公平であるが，例えば，Ωの公平な賭け指数が何であるかについては規定しない．したがって，先に例で見たように，個々の賭けの対象について賭け手がすべて公平であるとみなしていたとしても，賭け指数の集合が整合的でなくなる場合があり得る．[19] 一方，賭け手が公理I′—III′のような規則に従うときには，上で見たように，賭け手はつねに整合的である．また，公理II′と公理III′より(*1)が導出できることから，公理I′—III′のような規則に従う賭け手は，規則Fも満たしている．賭け手が整合的であるためには，規則Fだけでは不十分なのである．）

3　結論：第1段階と第2段階の統合

第1段階の置き換えと第2段階の置き換えを組み合わせてみよう．第1段階では，Ψ（賭け手が信念の度合いを付与する仕方）はΦ_{fair}（賭け手が公平な賭け指数を付与する仕方）よって測られるとみなされた．第2段階では，Φ_{fair}について，ダッチ・ブック定理が成り立つことを見た．これらを組み合わせると，以下のことが成り立つ：

(iii)　［Φ_{fair}（公平な賭け指数の集合）$=\Psi$（信念の度合いの集合)］は整合的である$\Longleftrightarrow$［Φ_{fair}（公平な賭け指数の集合）$=\Psi$（信念の度合いの集合)］は確率公理I′–III′を満たす．

これはダッチ・ブック定理を信念の度合いを含めた形で書き直したものになっており，賭け手の信念の度合いの集合が整合的であることは，それ

[19] 試行の結果が1つに決まっているような賭け（例えば，必ず表が出るようなコイン投げを試行とする場合）については，賭け手は規則Fに従うだけでつねに整合的になる．

が確率公理を満たすための必要十分条件であることを述べている．言いかえると，賭け手が賭けにおいて確実に損をするような結果を被るのを回避する（整合的である）ためには，確率公理に従った仕方で自らの信念の度合いを与える必要があり，その逆も成り立つということである．さらに，Ψ が整合的であるとき，所与の賭けのシステム Bet に対して Ψ によって与えられた信念の度合いの集合 S は整合的であると呼び，S の個々の要素を整合的な信念の度合いと呼ぶことにすると，(iii) から，整合的な信念の度合いは確率であるといってもよいことが結論できる．

最後に，ここで展開した主観説の論証の流れをまとめておこう：

1. 賭け手の信念の度合いは，公平な賭け指数によって表現（測定）できる．（第 1 段階の置き換え）
2. （ダッチ・ブック定理）賭け手の賭け指数の集合が整合的であるのは，それが確率公理をみたすとき，かつそのときのみである．（第 2 段階の置き換え）
3. ［1, 2 より］賭け手の信念の度合いの集合が整合的であるのは，それが確率公理をみたすとき，かつそのときのみである．（整合的な信念の度合いは確率である．）

付録　ダッチ・ブック定理の証明

2.4 節で述べられたダッチ・ブック定理について，本稿の設定に沿った形での証明を与えておく（ただし，$\Longrightarrow$の側については，一部を省略してある）．[20]

ダッチ・ブック定理

Φ は整合的である$\Longleftrightarrow\Phi$ は確率の公理 I–III を満たす．

[20] この証明については，Kemeny (1955), Howson & Urbach (1993), Williamson (1999a), Gillies (2000) を参照した．ただし，Williamson(1999a) では，ここでの公理 III にあたるものが可算加法性の公理になっている．

定理の証明

($\Longrightarrow$の側)

($\varPhi$ は公理 I を満たさない$\Longrightarrow$$\varPhi$ は整合的でない) ([1])　$\wedge$

($\varPhi$ は公理 II を満たさない$\Longrightarrow$$\varPhi$ は整合的でない) ([2])　$\wedge$

($\varPhi$ は公理 III を満たさない$\Longrightarrow$$\varPhi$ は整合的でない) ([3]) を示せばよい.

[1], [2], [3] の場合に分けて証明する.

[1] $\varPhi$ は公理 I を満たさない$\Longrightarrow$$\varPhi$ は整合的でない

$Bet=\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots, E_{2^n}\}(\forall m(E_m \subseteq \Omega))$ が与えられ，この Bet に対して，$\varPhi$ によって，それぞれ $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots, r_{2^n}$ が与えられたとする. ここでは，$\varPhi(E_1)$ が公理 I に違反するものとする. $i \geq 2$ に対して $S_i=0$ とする. つまり，$\{\varDelta_i S_i \mid \varDelta_i=+1 \vee \varDelta_i=-1, S_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($i=1$ のとき)，$S_i=0$ ($i \geq 2$ のとき)$\} \subsetneq Str_{Bet}$ が与えられたとする. このとき，任意の k に対して

$$Prf(\{e_k\}, \varPhi, str_j)=\begin{cases} (1-r_1)\varDelta_1 S_1 & \text{if} \quad E_1 \supseteq \{e_k\}, \\ \quad -r_1 \varDelta_1 S_1 & \text{if} \quad \{e_k\} \cap E_1=\varnothing. \end{cases}$$

(1)　$\varPhi(E_1)=r_1>1$ の場合

$\varDelta_1=+1, S_1>0$ とすると，すなわち，$\{+S_1, 0, \ldots, 0\}$ の下では，任意の k に対して

$$Prf(\{e_k\}, \varPhi, str_j)=\begin{cases} (1-r_1)S_1<0 & \text{if} \quad E_1 \supseteq \{e_k\}, \\ \quad -r_1 S_1<0 & \text{if} \quad \{e_k\} \cap E_1=\varnothing. \end{cases}$$

(2)　$\varPhi(E_1)=r_1<0$ の場合

$\varDelta_1=-1, S_1>0$ とすると，すなわち，$\{-S_1, 0, \ldots, 0\}$ の下では，任意の k に対して

$$Prf(\{e_k\}, \varPhi, str_j)=\begin{cases} (1-r_1)(-S_1)<0 & \text{if} \quad E_1 \supseteq \{e_k\}, \\ \quad -r_1(-S_1)<0 & \text{if} \quad \{e_k\} \cap E_1=\varnothing. \end{cases}$$

したがって，(1) と (2) の場合を合わせて，$\exists j \forall k \; Prf(\{e_k\}, \varPhi, str_j)<0$.

[2], [3] の場合についても，[1] と同様の方針で証明できるが，ここでは省略する．

(⟸の側)

任意の j について，$E[Bet, str_j]$ を以下のように定義する：

$E[Bet, str_j] := \sum_{k=1}^{2^n} \Phi(\{e_k\}) Prf(\{e_k\}, \Phi, str_j)$

補題

Φ は公理 I—III を満たす $\Longrightarrow \forall j E[Bet, str_j]=0$

補題の証明

$Prf(\{e_k\}, \Phi, str_j)$ と $E[Bet, str_j]$ の定義より，以下のように書くことができる：

$E[Bet, str_j]=\sum_{i=1}^{2^n}[\sum_i \Phi(\{e_k\})-\Phi(A_i)\sum_{k=1}^{n}\Phi(\{e_k\})]\Delta_i S_i$

ただし，$\sum_i$は，$A_i \supseteq \{e_k\}$ であるような k について取られる．$j \neq k$ ならば，$\{e_j\} \cap \{e_k\}=\varnothing$ であり，$\cup_{k=1}^{n}(\{e_k\})=\Omega$ であることと，公理 II，公理 III より，$\sum_{k=1}^{n}\Phi(\{e_k\})=1 \ldots$ (*1)．したがって，

$E[Bet, str_j]=\sum_{i=1}^{2^n}[\sum_i \Phi(\{e_k\})-\Phi(A_i)]\Delta_i S_i$

任意の Bet の要素 A_i は，$A_i \supseteq \{e_k\}$ であるような $\{e_k\}$ の和集合 $\cup_k \{e_k\}$ の形で書くことができるので，$\Phi(A_i)=\Phi(\cup_k \{e_k\})$ となり，公理 III より，$\Phi(A_i)=\sum_i \Phi(\{e_k\})$．ゆえに，任意の j について，

$E[Bet, str_j]=\sum_{i=1}^{2^n}[\sum_i \Phi(\{e_k\})-\sum_i \Phi(\{e_k\})]\Delta_i S_i=0$

（補題の証明終わり）

公理 I より，$\forall k \Phi(\{e_k\}) \geq 0 \ldots$ (*2)．(*1), (*2) より，$\exists k \Phi(\{e_k\})>0 \ldots$ (*3)．補題より，$\forall j E[Bet, str_j]=0 \ldots$ (*4)．(*2), (*3), (*4) より，$\forall j \exists k$ $Prf(\{e_k\}, \Phi, str_j) \geq 0$． □

参考文献

(1) Capiński, M. and Kopp, E. (1999), *Measure, Integral and Probability*, London: Springer-Verlag.

(2) Finetti, B. de (1937), "La prévision: Ses Lois Logiques, Ses Sources Subjectives," *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **7**, 1–68. (B. de Finetti (1964), "Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources," in *Studies in Subjective Probability*, H. E. Kyburg, Jr. and H. E. Smokler, (eds.), New York: John Wiley and Sons, translated from French by Kyburg, Jr.)

(3) Gillies, D. (2000), *Philosophical Theories of Probability*, London: Routledge.

(4) Horwich, P. (1982), *Probability and Evidence*, Cambridge: Cambridge University Press.

(5) Howson, C. (1995), "Theories of Probability," *The British Journal for the Philosophy of Science* **46**, 1–32.

(6) Howson, C. and Urbach, P. (1993), *Scientific Reasoning: The Bayesian Approach* (2nd ed.), La Salle: Open Court.

(7) Kemeny, J. G. (1955), "Fair Bets and Inductive Probabilities," *The Journal of Symbolic Logic* **20**, 263–73.

(8) Kolmogorov, A. N. (1956), *Foundations of the Theory of Probability* (2nd English ed.), New York: Chelsea.

(9) Ramsey, F. P. (1931), "Truth and Probability," in *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, London: Routledge and Kegan Paul.

(10) Skyrms, B. (1986), *Choice and Chance: An Introduction to Inductive Logic* (3rd ed.), Belmont: Wadsworth Publishing Company.

(11) Williamson, J. (1999a), "Countable Additivity and Subjective Probability," *The British Journal for the Philosophy of Science* **50**, 401–16.

(12) Williamson, J. (1999b), "Logical Omniscience and Rational Belief," (preprint).