Title	カット除去法による独立性証明
Sub Title	Independence proof via cut elimination method
Author	浜野, 正浩(Hamano, Masahiro)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1999
Jtitle	哲學 No.104 (1999. 12) ,p.33- 44
JaLC DOI	
Abstract	We give a direct independence proof of Kirby-Paris' Hydra Game [9] from Peano Arithmetic (PA). This is done by giving a relationship between Gentzen's consistency proof [5] for PA and the Hydra Game. Compared with Kirby-Paris' and Cichon's [3] proofs, our proof is direct in that we do not use any finite characterization theorem of the PA-provably recursive functions. We prove that one step reduction of Kirby-Paris' Hydra Game corresponds to finite steps of Gentzen's proof reduction. With the help of Godel's Incompleteness Theorem, Kirby-Paris' unprovability result follows.
Notes	投稿論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000104-0033

投稿論文

カット除去法による独立性証明

浜　野　正　浩*

Independence Proof via Cut Elimination Method

Masahiro Hamano

We give a direct independence proof of Kirby-Paris' Hydra Game [9] from Peano Arithmetic (PA). This is done by giving a relationship between Gentzen's consistency proof [5] for PA and the Hydra Game. Compared with Kirby-Paris' and Cichon's [3] proofs, our proof is direct in that we do not use any finite characterization theorem of the PA-provably recursive functions. We prove that one step reduction of Kirby-Paris' Hydra Game corresponds to finite steps of Gentzen's proof reduction. With the help of Gödel's Incompleteness Theorem, Kirby-Paris' unprovability result follows.

* 北陸先端科学技術大学院大学助手
* 当研究は日本学術振興会及び平成7年度文部省科研費補助金からの助成による成果の一部である.

1 はじめに

1931年，Gödel [4] は第一不完全性定理で算術を含む論理体系で真ではあるが証明できない命題のあることを示した．彼はGödel文と呼ばれるある種の自己言及命題がその様な命題になっていることを証明した．彼が得た独立命題とは，Gödel numberingによってコード化されている純論理学的なものであり，具体的な数学にかつて現れたことがないようなものであった．

Gödel文等の自己言及文ではなく，具体的で自然な数学の命題の中に算術体系から独立なものが存在するか否かは，長年の間未解決であった．その肯定的解決の一つとして1982年，Kirby-Parisは有限な組合せ論的ゲーム“Hydra Game”を導入し，このゲームの停止することを示す命題がPeano算術体系 PA から独立であることを証明した．しかしながら命題自身の素朴さに比べれば，彼らの独立性の証明はある種の順序数の関数族によって証明可能性を特徴付ける定理によっていて，その方法は複雑である．

一方1938年，Gentzen [5] は証明図の変形という具体的な操作（証明の還元法）に基づいてPeano算術 PA の無矛盾性をカット除去法によって示した．Gödel [4] の第二不完全性定理によればこの証明の還元法の停止することを示す命題はPeano算術 PA から独立にならなければならない．

当論文での我々の目標は，Gentzenのカット除去法をKirby-Parisの独立命題と直接関連付けることによって，Kirby-Parisの命題の独立性のより簡単かつ直観的な別証明を得る事である．そのために我々は，GentzenのPAのための無矛盾性証明の還元法の一つの一つの手続きが，非常に自然な解釈によってKirby-Paris Gameの有限回の手続で表現できることを示す．これは，Gentzenの還元法の手続きがKirby-Paris Gameの特別な戦略と同一視できるという事に他ならない．従って我々のこの方

法によれば，Kirby-Paris Game の停止性そのものが Gentzen の還元法の停止を含意し，それ故 PA の無矛盾性を保証するのである．従って Gödel の第二不完全性定理よりこの停止性を表現した命題は PA から独立である．

2　Kirby-Paris の Hydra Game

この章では，Kirby-Paris の Hydra Game を項書き換え系によって定義し，これから導かれる幾つかの書き換え規則を説明する．

定義 1　(森の集合 $\mathscr{T}$)

1. $\alpha \in \mathscr{T} \cup \{0\}$ の時 $(0, \alpha) \in \mathscr{T}$.
2. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathscr{T}$ の時 $\alpha_1 \# \cdots \# \alpha_n \in \mathscr{T}$.

定義 2　(ヒドラの集合 $\mathscr{T}_0$)　$\mathscr{T}_0 = (0, \beta) | \beta \in \mathscr{T}\}$. $\mathscr{T}_0$ の元のことをヒドラと呼ぶ．

記法 1　$\underline{1} = (0, 0)$

定義 3　$\mathscr{T}[*]$ を，$\alpha \in \mathscr{T}$ のちょうど一つの $\underline{1}$ を * で置き換えて得られる表現の集合を指すとする．$\mathscr{T}[*]$ の元を *context* と呼ぶ．ヒドラ *context* とは $\alpha \in \mathscr{T}_0$ から得られる *context* とする．$c \in \mathscr{T}[*]$ と $u \in \mathscr{T} \cup \mathscr{T}[*]$ に対して $c[u]$ を c の*に u を代入したものとする．

定義 4　Succ は $\alpha \# *$, $\alpha \# * \# \beta$, $* \# \beta$, もしくは*の形をしたすべての *context* の集合とする．ここで $\alpha, \beta \in \mathscr{T}$.

上の $c[u]$ の定義では $u \neq 0$ が仮定されていた．(何故ならば $0 \notin \mathscr{T} \cup \mathscr{T}[*]$). $c[u]$ の定義を $u = 0$ の場合まで広げる．

定義 5　$c \in \mathscr{T}[*]$ に対して，$c[0] \in \mathscr{T} \cup \{0\}$ を以下のように定義する．

$$c[0] \equiv \begin{cases} \alpha & c \in \mathrm{Succ} \text{ が } \alpha \# * \text{ or } * \# \alpha \text{ の形の時} \\ \alpha \# \beta & \text{もし } c \in \mathrm{Succ} \text{ が } \alpha \# * \# \beta \text{ の形の時.} \\ c[0/*] & \text{それ以外の時. ここで } c[0/*]\mathrm{c} \text{ の*に } c \text{ を代入して得られる項である.} \end{cases}$$

Kirby-Paris の Hydra Game [9] は，次で定義される $\mathcal{T}_0 \cup \{0\}$ 上の項書き換え系 $(\mathcal{T} \cup \{0\}, R)$ と同一視できる：Kirby-Paris の Hydra Game では毎回ヒドラの redex を選び，それを任意に選んだ自然数 n にたいして以下の Rule 1' と Rule 1 にそって書き換えていく．

定義 6 **(cf. Kirby-Paris [9])** $(\mathcal{T} \cup \{0\}, R)$ を，次の書き換え規則 R を持つ $\mathcal{T} \cup \{0\}$ 上の項書き換え系と定義する（図 1 参照）.

Rule 1' $c[\underline{1}] \to_{KP} c[0]$, もし $c \in \mathrm{Succ}$.

Rule 1 $(0, a[\underline{1}]) \to_{KP} (0, a[0]) \cdot (n+1)$ もし $a \in \mathrm{Succ}$ ならば任意の $n \in N$ に対して．ここで $\alpha \cdot \mathrm{n}$ とは $\underbrace{\alpha \# \cdots \# \alpha}_{n}$ の事.

もしヒドラが正規型（既約型）を持つならば，それは 0 でなければならない事がすぐ分かる.

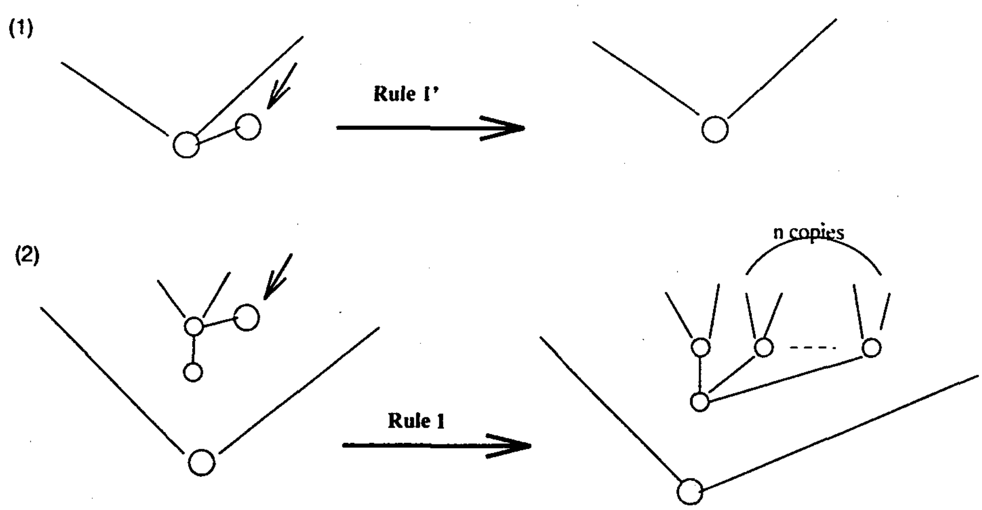

図 1: Kirby-Paris' Hydra Game の Rule

定理 1 **(Kirby-Paris の独立性定理 [9])** 命題“すべてのヒドラに対するすべての再帰的戦略は必勝戦略である”は，ペアノ算術から独立である.

記号$\to_{KP}$によって，$(\mathcal{T} \cup \{0\}, R)$ の一回の書き換えによる reduction relation を表す事とする．Kirby-Paris [9] は$\to_{KP}$は最初の ε 数 ε_0 より小さい順序系に含まれてしまう事に注意した．従って ε_0 以下の順序数の整列性が “Kirby-Paris の Hydra Game のすべての戦略が必勝戦略である” と

いう特徴を含む（参照．Kirby-Paris [9]）．この特徴を，Kirby-Paris の Hydra Game の停止性と呼ぶ．$\mathscr{T}$ の同値関係～を # の associative-commutative property によって引き起こされるものとする．（これは $\mathscr{T}_0$ を ε_0 以下の順序数と同一視すれば順序数の自然和 # に対応する（参照．Kirby-Paris [9]））．記号 $\rightarrow^*_{KP}$ は～を法とした推移的かつ反射的閉包を表す事とする．以下の書き換えは Kirby-Paris の Hydra Game の停止性を使って Rule 1 と Rule 1' から導かれる．

Rule 2　$c[\alpha]\rightarrow^+_{KP}c[\underline{1}]$ もし $c[\alpha]\in\mathscr{T}_0$ かつ $\underline{1}\neq\alpha\in\mathscr{T}$ の時．

Rule 3　$c[b[\underline{1}]]\rightarrow^*_{KP}c[b[0]\#\underline{1}]$，もし $c[b[\underline{1}]]\in\mathscr{T}_0$ の時．

3　Gentzen の *PA* のための cut 除去法

次章で Gentzen の *PA* のための還元法 [5, 11] が直接的に還元関係 $\rightarrow_{KP}$ で表現できることを証明する．Gödel's の第二不完全性定理によればこの補題の系として Kirby-Paris の独立性定理が直ちに出て来る．以下 *PA* とは Takeuti [11] の Chapter 2 で定義された Peano Arithmetic を指すものとする．我々の高さの振り方は Takeuti [11] の Definition 12.4 を少々細分化したものである．この細分化された高さは Gentzen の還元法を Kirby-Paris' Hydra Game で表現する時に効いてくる．

定義 7　*PA* の証明図 P と P に現れる各々の S に対して自然数 $h(S)$ を対応させるような関数 h が以下の条件を満たす時 $\langle P, h\rangle$ を高さ付きの付きの証明図と呼び $h(S)$ を P の中での S の高さとよぶ．ここで $g_0(D)$ は D に現れる論理記号の個数を表すものとする．以下 S' は S の下式を指すものとする．

1. $h(S)=0$ もし S が P の終式の時．
2. $h(S)\geq h(S')$ もし S が *cut* と *induction* 以外の推論の上式の時．
3. $h(S)\geq\max\{h(S'), g_0(D)\}$ もし S が *cut* の上式の時．ここで D はその *cut formula*.

4. $h(S) \geq \max\{h(S'), g_0(D)\}+1$ もし S が *ind* の上式の時．ここで D は その *induction formula*.

5. $h(S')=h(S'')$ もし S' と S'' が或る推論の左上式と右上式である場合.

定義 8 • $0(0, \mu)=\mu$

• $0(\mathrm{n}+1, \mu)=(0, \underline{1}\#0(\mathrm{n}, \mu))$

証明図のヒドラへの解釈は，Definition 12.6 [11] の証明図に対する順序数の割り振りを変更したものに基いて以下の様になす.

定義 9 (cf. Def 12.6 in Takeuti [11]) **1** $O(S)=\underline{1}$ もし S が P の始式の時.

2 J の上式 S' (と S'') の順序数が割り振られているとする.

$$\frac{S' \qquad (S'')}{S} J$$

この時 $O(S)$ は次の様に定義される.

2.1 J が構造規則の時: $O(S)=0(h(S')-h(S), O(S'))$

2.2 J が$\neg$, $\wedge$; 左, $\forall$の時: $O(S)=0(h(S')-h(S), \underline{1}\#O(S'))$

2.3 J が$\wedge$; 右の時: $O(S)=0(h(S')-h(S), O(S')\#O(S''))$

2.4 J が *induction* の時: $O(S)=0(h(S')-h(S), \underline{1}\#O(S'))$

2.5 J が *cut* の時: $O(S)=0(h(S')-h(S), O(S')\#O(S''))$

PA の高さ付きの証明図 $\langle P, h\rangle$ に対して S を P の終式とした時 $O(P, h):= (0, 0(1, O(S)))$ と定義する．つまり $O(\langle P, h\rangle)\in\mathscr{T}_0$.

4 cut 除去法による定理 1 の証明

次の補題は項書換え系 $\langle\rightarrow_{KP}, \mathscr{T}_0\rangle$ が，PA の無矛盾性を証明するのに十分な強さを持っていることを示すものである．したがってこの補題から，Gödel の第二不完全性定理より主定理が導かれる.

補題 1 $\langle P, h\rangle$ をペアノ算術の高さ付きの証明図とし P' を P を *Gentzen-Takeuti* の一回の還元法によって得られる証明図とする．このとき P' に

高さ h' を付け，$O(\langle P, h\rangle) \rightarrow^{*}_{KP} O(\langle P', h'\rangle)$ と出来る．

補題の証明

最も主要な二つの場合である Gentzen Takeuti の証明の還元法 VJ-Reduction (cf. p. 105〜p. 106 [11]) と Cross Cut-Reduction (cf. p. 110〜p. 114 [11]) の場合に項書き換えを行なってみる．

（VJ-Reduction の場合） P が end-piece に induction を含んでいる時：I を，最も下にある induction らの一つだとする．下の証明図 $\langle P, h\rangle$ に現れる t が $n+1$ と等しくなる場合（t が 0 と等しい場合は簡単）かつ I が始式でない場合（I が始式の場合は簡単）を考える．

$\langle P, h\rangle$ は，以下の形をしているとする．ここで l と $m+1$ は，各々式 $A(0), \Gamma \rightarrow \Delta, A(t)$ と式 $A(a), \Gamma \rightarrow \Delta, A(a')$ の高さを表すとする．高さの定義より $l \leq m$ が成り立っている．

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\dfrac{\vdots\ Q(a)}{0(k-m, \alpha)}\,J}{} & k+1 \\[2ex]
\dfrac{A(a), \Gamma \rightarrow \Delta, A(a')}{0(m-l+1, \underline{1}\#0(k-m, \alpha))}\,I & m+1 \\[2ex]
A(0), \Gamma \rightarrow \Delta, A(t) & l \\
\vdots & \\
\rightarrow &
\end{array}
$$

従ってある hydra context c に対して $O(\langle P, h\rangle) = c[0(m-l+1, \underline{1}\#0(k-m, \alpha))]$ と表される．この時 $\langle P', h'\rangle$ は，以下の形である．

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\vdots\ Q(0)}{0(k-m+1, \alpha)}\,J_0 & \dfrac{\vdots\ Q(0')}{0(k-m+1, \alpha)}\,J_1 & k+1 \\[2ex]
A(0), \Gamma \rightarrow \Delta, A(0') & A(0'), \Gamma \rightarrow \Delta, A(0'') & m \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\underline{A(0), \Gamma, \Gamma \rightarrow \Delta, \Delta, A(0'')}} & m \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{A(0), \Gamma \rightarrow \Delta, A(0'')} & \\
\ddots & & \\
\vdots & \dfrac{\vdots\ Q(n)}{}\,J_n &
\end{array}
$$

$$\dfrac{A(0),\Gamma \xrightarrow{0(k-m+1,\,\alpha)\cdot n} \Delta, A(n) \qquad A(n),\Gamma \xrightarrow{0(k)-m+1,\,\alpha)} \Delta, A(n+1)}{A(0),\Gamma,\Gamma \xrightarrow{0(m-l,\,0(k-m+1,\,\alpha)\cdot n+1)} \Delta,\Delta,A(n+1)}\begin{matrix} m\\ l\end{matrix}$$

$$\dfrac{\overline{A(0),\Gamma-\Delta,A(n+1)}}{A(0),\Gamma-\Delta,A(t)}\ term-replacement$$

$$\begin{matrix}\vdots\\ \rightarrow\end{matrix}$$

従って $O(\langle P',h'\rangle)=c[0(m-1,0(k-m+1,\alpha)\cdot(n+1))]$.

我々の $O(\langle P,h\rangle)$ から $O(\langle P',h'\rangle)$ への項書換えの列は次のようになる．

今，その下式が $A(a),\Gamma\rightarrow\Delta,A(a')$ となる P の中の推論を J と置く．高さの定義より $h(J$ の上式$)=k$ ただし $m\leq k$. $\langle P',h'\rangle$ で J_i を $Q(i)$ の中に現れる J の複製，また S_i を J_i の上式とするただし $0\leq i<n$. $\langle P',h'\rangle$ に，次のような高さ h'を付ける．

$$\begin{cases} h'(A(i),\Gamma\rightarrow\Delta,A(i'))=m \\ h'(S_i)=k+1 \end{cases}$$

この P'の高さ h'によって，我々は $O(\langle P,h\rangle)$ から $O(\langle P',h'\rangle)$ へ以下のような項書換えが出来る（図２参照）.

$$0(m-l+1,\ \underline{1}\#0(k-m,\alpha))$$

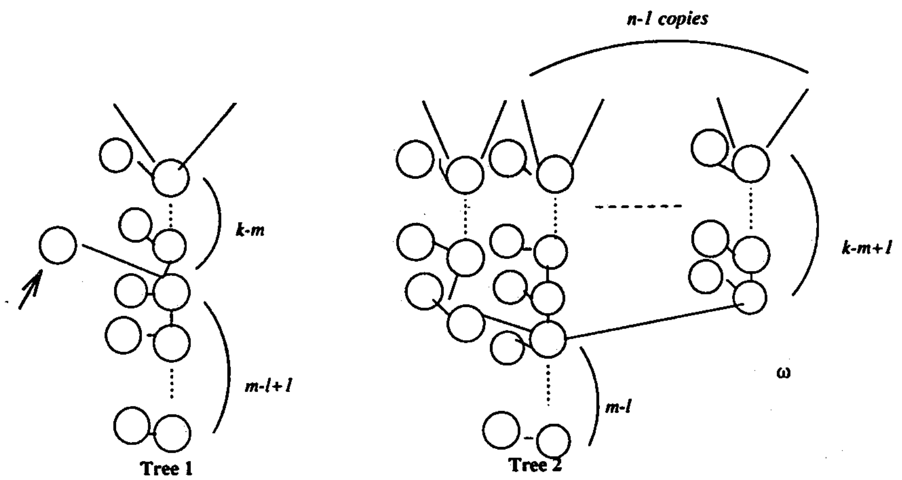

図 2:　VJ-Reduction の場合の項書換え

$= \quad 0(m-l, 0(1, \underline{1}\#0(k-m, \alpha)))$

$\xrightarrow{\text{Rule 1}} \quad 0(m-l, 0(1, 0(k-m, \alpha))\cdot(n+1))$

$= \quad 0(m-l, 0(k-m+1, \alpha)\cdot(n+1))$

(CrossCut-Reduction の場合) J の cut formula が $A\wedge B$, $\neg A$, もしくは $\forall x A(x)$ の時：$A\wedge B$ の場合を考える．$\langle P, h\rangle$ は次の形をしている．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\alpha}\ \Gamma_1 \to \Delta_1, A_1 \quad \dfrac{\vdots}{\alpha'}\ \Gamma_2 \to \Delta_2, B_1}{0(k_1 - h_1, \alpha\#\alpha') \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2, A_1\wedge B_1}\ {\scriptstyle k_1 \atop h_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\beta}\ A_2, \Pi_2 \to \Lambda_2}{0(k_2 - h_2, \underline{1}\#\beta) \quad A_2\wedge B_2, \Pi_2 \to \Lambda_2}\ {\scriptstyle k_2 \atop h_2}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{a[\alpha']}\ \Gamma_3 \to \Delta_3 A\wedge B \quad l \qquad \dfrac{\vdots}{b[\underline{1}]}\ A\wedge B, \Pi_3 \to \Lambda_3}{\Gamma_3, \Pi_3 \to \Delta_3, \Lambda_3}\ J \ {\scriptstyle l \atop l}$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\cdots\cdots}{0(l-n, c[a[\alpha']\#b[\underline{1}]])}\ {\scriptstyle l \atop n}$$

$$\Phi \quad \to \quad \Psi$$

$$\vdots$$

$\Phi - \Psi$ は J の下にあり，その高さ n が l より小さくなる式のうち最も上にあるもの．ここで l は J の上式の高さを指す．

$\langle P', h'\rangle$ は次の形：

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\alpha}\ \underline{\Gamma_1 \to \Delta_1, A_1}}{0(k_1-h_1, \alpha) \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \to A_1, \Delta_1, \Delta_2, A_1\wedge B_1}\ {\scriptstyle k_1 \atop h_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\beta}\ \underline{A_2, \Pi_2 \to \Lambda_2}}{0(k_2-h_2, \beta) \quad A_2\wedge B_2, \Pi_2, A_2 \to \Lambda_2}\ {\scriptstyle k_2 \atop h_2}$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{a[0]}\ \Gamma_3 \to A, \Delta_3, A\wedge B \quad \dfrac{\vdots}{b[\underline{1}]}\ A\wedge B, \Pi_3 \to \Lambda_2}{\Gamma_3, \Pi_3 \to A, \Delta_3, \Lambda_3} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{a[\alpha']}\ \Gamma_3 \to \Delta_3, A\wedge B \quad \dfrac{\vdots}{b[0]}\ A\wedge B, \Pi_3, A \to \Lambda_3}{\Gamma_3, \Pi_3, A \to \Delta_3, \Lambda_3}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\cdots\cdots}\;l}{\Phi \xrightarrow{0(l-m,\,c[a[0]\#b[\underline{1}]])} A,\Psi}\;m \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\cdots\cdots}\;l}{\Phi, A \xrightarrow{0(l-m,\,c[a[\alpha']\#b[0]])} \Psi}\;m}{\dfrac{\overline{\Phi\to\Psi, A}\;\; m \qquad\qquad \overline{A, \Phi\to\Psi}\;\; m}{\Phi,\Phi \xrightarrow{0(m-n,\,0(l-m,\,c[a[0]\#b[\underline{1}]])\#0(\mathrm{l}-\mathrm{m},\,\mathrm{c}[\mathrm{a}[\alpha']\#b[0]])} \Psi,\Psi}\;n}$$

$$\overline{\Phi\to\Psi}$$
$$\vdots$$
$$\to$$

上の証明図に書かれているようにP'の高さh'は次のように定義できる.

- $h'(\Phi\to A,\Psi)=\cdots=h'(\Phi\to\Psi,A)=m$
  $h'(\Phi,A\to\Psi)=\cdots=h'(A,\Phi\to\Psi)=m$ ここで$n\leq m<l$.
- Sが上以外のP'の式の時はPの中にSがその複製となっているような式$\tilde{S}$が存在する. $h'(S)=h(\tilde{S})$.

このP'への高さ付けh'によって我々は$O(\langle P,h\rangle)$から$O(\langle P',h'\rangle)$へ以下のような還元列を作れる（図3参照）;

$$\begin{array}{ll}
 & 0(l-n,\,c[a[\alpha']\#b[\underline{1}]]) \\
= & 0(m-n,\,0(l-m,\,c[a[\alpha']\#b[\underline{1}]])) \\
= & 0(m-n,\,(\mathbf{o},\,\mathbf{1}\#\mathbf{o}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{m}-\mathbf{1},\,\boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{\alpha}']\#\boldsymbol{b}[\underline{\mathbf{1}}]]))) \\
\xrightarrow{\text{Rule 1}} & 0(m-n,\,(0,\,0(l-m-1,\,c[a[\alpha']\#b[\underline{1}]]))\cdot 2) \\
= & 0(m-n,\,(0,\,0(l-m-1,\,c[a[\boldsymbol{\alpha}']\#b[\underline{1}]]))\#(0,\,0(l-m-1,\,c[a[\alpha']\#b \\
 & [\underline{1}]]))) \\
\xrightarrow{\text{Rule 2}} & 0(m-n,\,(0,\,\mathbf{o}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{m}-\mathbf{1},\,\boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}[\underline{1}]\#\boldsymbol{b}[\underline{1}]]))\#(0,\,0(l-m-1,\,c[a[\alpha']\#b \\
 & [\underline{1}]]))) \\
\xrightarrow{\text{Rule 3}} & 0(m-n,\,(0,\,\underline{1}\#0(l-m-1,\,c[a[0]\#b[\underline{1}]]))\#(0,\,\mathbf{o}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{m}-\mathbf{1},\,\boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{\alpha}']\#\boldsymbol{b} \\
 & [\underline{\mathbf{1}}]]))) \\
\xrightarrow{\text{Rule 3}} & 0(m-n,\,(0,\,\underline{1}\#0(l-m-1,\,c[a[0]\#b[\underline{1}]]))\#(0,\underline{1}\#0(l-m-1,\,c[a[\alpha']\# \\
 & b[0]]))) \\
= & 0(m-n,\,0(l-m,\,c[a[0]\#b[\underline{1}]])\#0(l-m,\,c[a[\alpha']\#b[0]]))
\end{array}$$

ここで太文字はそれぞれの段階で書き換えられるべき redex を表す.

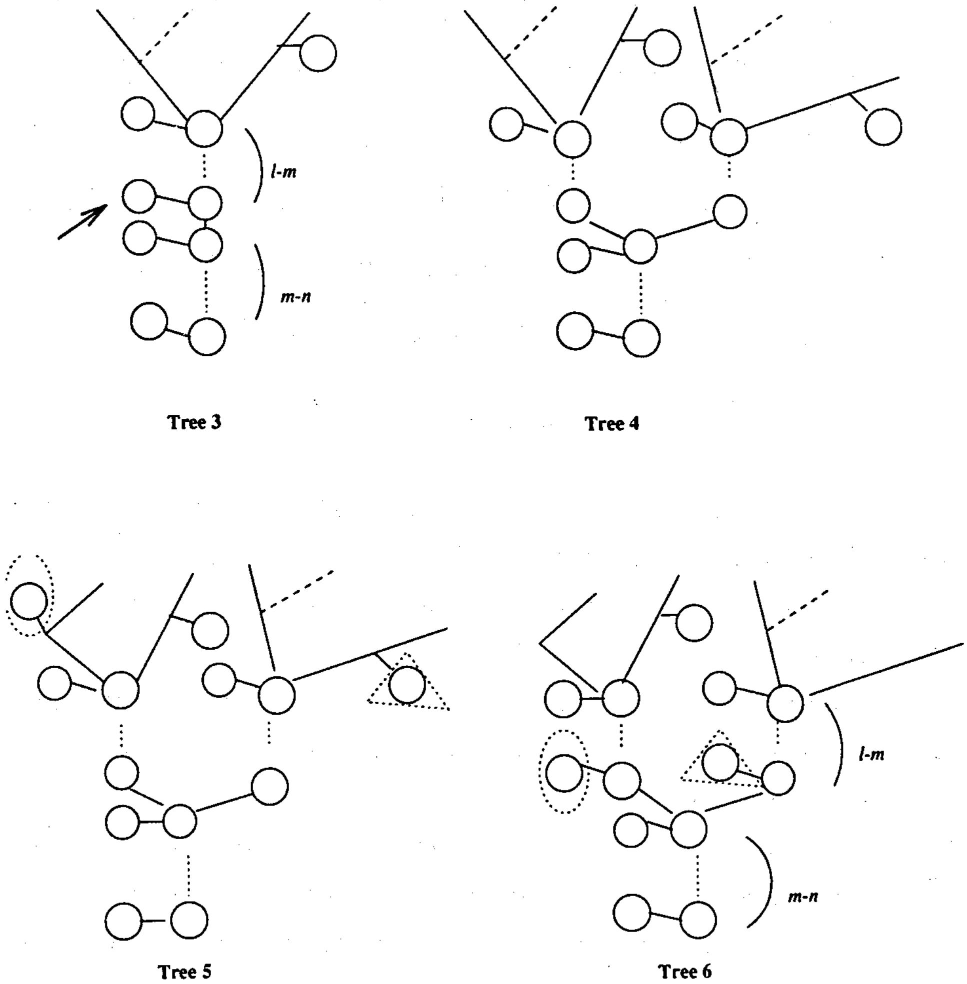

図 3:　Cross Cut-Reduction の場合の項書換え

5　ま　と　め

我々が得た主定理の別証明の方法を通じて明らかになったのは，組合せ論的独立命題と Gentzen の還元法との直接的な関連である．もちろん Kirby-Paris の独立命題の背後には，Gentzen の還元法による無矛盾性証明を端初とした ε_0 以下の順序数上の関数族と証明可能性についての詳細な分析があるが，Gentzen が証明図という数学的対象に直観的にどの様な洞察を加えていたか，の見通しを与えるものではない．この見通しを示唆するものとして Jervell [8] の Gentzen Game があるが，彼の Game は

証明図をそのまま抽象化した人為的なものであり高さの概念を捨象してしまっているため，我々が Hamano-Okada [6] で証明したように，この Game の critical ordinal は ε_0 より大きな $\phi_\omega(0)$ になってしまっている．Kirby-Paris Game のような単純で自然な組合せ論的原理と Gentzen の還元法を結びつけた我々の結果は，Gentzen が証明図に加えた数学的な洞察の本質の一面を汲み上げたものであると思われる．

参考文献

[1] T. Arai, A Subsystem of Classical Analysis Proper to Reduction Method for Π^1_1-Analysis, *Tsukuba J. Math. 9 (1985)*, 21–29.

[2] W. Buchholz, An Independent Result for (Π^1_1-CA) + BI, *Annals of Pure and Applied Logic 33 (1987)*, 131–155.

[3] E. A. Cichon, A Short Proof of Two Recently Discovered Independence Results Using Recursion Theoretic Methods, *Proc. of American Math. Soc. 87 (1983)*. 704–706.

[4] K. Gödel, Über formal unentscheibare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System, I, *Montash. Math. Phys. 38 (1931)*. 173–198.

[5] G. Gentzen, Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitbeweise für die reine Zahlentheorie, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exackten Wissenschaften, Neue Folge 4 (1938)*, 19–44.

[6] M. Hamano and M. Okada, A Relationship among Gentzen's Proof-Reduction, Kirby-Paris' Hydra Game and Buchholz's Hydra Game, *Mathematical Logic Quarterly 43* (*1997*), 103–120.

[7] M. Hamano and M. Okada, A Direct Independence Proof of Buchholz's Hydra Game on Finite Labeled Trees, *Archive for Mathematical Logic 37* (*1998*), 67–89.

[8] H. R. Jervell, Gentzen Games, *Zeitschr. f. math. Logikund Grund. d. Math. 31 (1985)*, 431–439.

[9] L. Kirby and J. Paris, Accessible Independence Results for Peano Arithmetic, *Bull. London Math. Soc. 14 (1982)*, 285–193.

[10] M. Okada, Note on a Proof of the Extended Kirby-Paris Theorem on Labeled Finite Trees, *Europ. J. Combinatorics 9 (1988)*, 249–253.

[11] G. Takeuti, *Proof Theory*, 2nd edition, North Holland, 1987.