慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	パラドックスから真理の理論へ
Sub Title	From paradoxes to a theory of truth
Author	西脇, 与作(Nishiwaki, Yosaku)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1986
Jtitle	哲學 No.83 (1986. 11) ,p.1- 31
JaLC DOI	
Abstract	In the fourth century BC our ancestors found the so called reflexive paradoxes. And all through the time these paradoxes have embarrassed our rational thinking persistently. The Liar paradox, among them, and Russell's paradox, a late comer, have had the crucial role when we think over the concept of truth and the foundation of modern mathematics. As a matter of fact, Russell's paradox was the first step to modify set theory and to construct several axiomatic set theories, despite his type theory could not get a honor of the theory of foundation. As to the Liar paradox, Tarski taught us convincingly that we were not able to represent 'true in a language L' in L. Here we will pay attention on these two papadoxes and find their common logical structures. And then by using them, we will try to construct a theory of truth, by which we mean a way of defining the predicate 'true (false)'. Our main interest is how to define 'true in a language L' in L. However, what we will find is that we have to restrict Convention (T) to avoid the inconsistency of our system like the limitation of the abstraction principle in the case of Russell's paradox. Moreover, the restricted Convention (T) forces us to use 'true' and 'false' strangely. This means that we are still very far from possessing the true theory of truth. However, we suppose our step here in this paper is certainly one step toward the theory.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000083-0001

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

パラドックスから真理の理論へ

西　脇　与　作*

From Paradoxes to a Theory of Truth

Yosaku Nishiwaki

In the fourth century BC our ancestors found the so called reflexive paradoxes. And all through the time these paradoxes have embarrassed our rational thinking persistently. The Liar paradox, among them, and Russell's paradox, a late comer, have had the crucial role when we think over the concept of truth and the foundation of modern mathematics. As a matter of fact, Russell's paradox was the first step to modify set theory and to construct several axiomatic set theories, despite his type theory could not get a honor of the theory of foundation. As to the Liar paradox, Tarski taught us convincingly that we were not able to represent 'true in a language *L*' in *L*.

Here we will pay attention on these two papadoxes and find their common logical structures. And then by using them, we will try to construct a theory of truth, by which we mean a way of defining the predicate 'true (false)'. Our main interest is how to define 'true in a language *L*' in *L*. However, what we will find is that we have to restrict Convention (T) to avoid the inconsistency of our system like the limitation of the abstraction principle in the case of Russell's paradox. Moreover, the restricted Convention (T) forces us to use 'true' and 'false' strangely. This means that we are still very far from possessing the true theory of truth. However, we suppose our step here in this paper is certainly one step toward the theory.

* 慶應義塾大学文学部助教授（哲学）

1. はじめに

古来パラドックスは，それが論理的にも心理的にもパラドクシイカルにみえればみえるほど，私たちを刺激し，かつ知的な挑戦をかきたててきた．なかでも，クレタ島の嘘つきに代表される論理-言語的なパラドックスは遙か昔から存在していたが，Russell の集合に関するパラドックスによって再び注目を浴びるようになった．そしてその結果，論理や言語についての哲学は20世紀の哲学のなかで光彩を放つようになる．パラドックスに触発された論理や言語の哲学的な探求は，パラドックスについての多くの解釈や解決法を生み出してきた．そして，それらの成果をもとにして新しい理論が作られ，数々の興味深い定理が証明されてきたが，未だに論理-言語的なパラドックスに含まれる謎の部分がすっかり白日のもとにさらされたというには程遠い状況にある．私たちはここで，一見単純に映りながら，実は最も厄介で手に負えない，いわゆる意味論的パラドックスを取り上げ，それから自由な真理の理論の可能性を探ってみよう．探る際の指針として，いわゆる論理的パラドックスの解決法を参考にするために両方のパラドックスに共通する構造を浮かび上がらせ，いわば双子の理論を模索する道を選んでみよう．

この数年間に真理とパラドックスについての研究は相当集中的に行なわれたが，この火ぶたを切ったのは Kripke の論文であった [Kripke]．いわゆる論理的パラドックスの代表的な一つである Russell のパラドックスがそれまでの素朴な集合論の再建を促し，パラドックスから自由ないくつかの集合論が構成されたように，パラドックスから自由な真理の理論が果たしてうまく作れるかどうか，それがここでの私たちの関心である．私たちができるだけ一様な仕方でパラドックスを取扱うことに決めた理由は，集合論の既になされた解決の方法を参考にして真相に迫ろうと考えるからであり，しばしば算術のシステムを例にするのも同様の考えからである．だ

からといって，真理についての理論が集合論や算術の理論と同じように解決されるとは考えていない．集合論や算術の理論がそれら独自の問題を抱えているように，真理の理論もそれ独自の問題を抱えているからである．その独自の問題を解決するためにも，まず最も基本的な問題を解決するのが理屈というものである．その問題とは，述語「……は真である」をパラドックスに陥らないで言語のなかでいかに定義できるか，そしてその定義がパラドックスをどのように処理するか，ということである．

2．問　　題

真理の理論を作り上げようとする場合，私たちに課せられる最低限の課題は，「……は真である」という述語が合理的に使われる言語を提供することである．そのための試金石となるのがパラドックスである．

私たちはいくつかのパラドックスをできるだけ同じ観点から，かつ同じ方法で扱うために，[Goddard & Johnston] に従って，次の論理式を出発点にして考えてみよう．

（1）　$\neg\exists x\forall y(A(y, x)\leftrightarrow\neg A(y, y))$

この論理式が第一階の述語論理のなかで証明できることは次のことから簡単にわかる．

$\vdash\forall yF(y)\longrightarrow F(x)$

より，

$\vdash\forall y(A(y, x)\leftrightarrow\neg A(y, y))\longrightarrow(A(x, x)\leftrightarrow\neg A(x, x))$.

したがって，任意の x について，

$\vdash\neg\forall y(A(y, x)\leftrightarrow\neg A(y, y))$.

それ故，$\vdash\neg\exists x\forall y(A(y, x)\leftrightarrow\neg A(y, y))$.

さて，ここで(1)の否定，すなわち $\exists x\forall y(A(y, x)\leftrightarrow\neg A(y, y))$ に注目してみよう．この存在命題に注目する理由は，Ramsey 以来常套句となった，いわゆる論理的パラドックスと意味論的パラドックスが，いずれも(1)

の否定の形をしていることを見極める点にある．二つに分類されてきたパラドックスの代表例を以下に示してみよう．2.1 が論理的パラドックス，2.2 と 2.3 が意味論的パラドックスと言われてきたものの 代表的な例である．

2.1 Russell のパラドックス

自分自身を含まないものの集合を抽象の原理 (principle of abstraction) によって作ることができるので，その集合を R とすると，

$$y \in R \longleftrightarrow y \notin y.$$

そのような R が存在することから，

$$\exists x \forall y (y \in x \longleftrightarrow y \notin y).$$

この式は明らかに(1)の否定の一例になっている．

2.2 Grelling のパラドックス

形容詞について，

$A(y, \mathrm{Het}) \longleftrightarrow y$ は y によって述べられる性質を持っていない

とすると，

$\forall y(y$ が形容詞 $\longrightarrow \exists x(A(y, x) \longleftrightarrow \neg A(y, y))$

となり，やはり(1)の否定形が得られる．

2.3 Liar（嘘つき）

Liar にはいくつかの変形があるが，単純な Liar は命題論理による表現と，述語論理による表現に分類できそうである．

（2）（2）は真でない．

ここで(2)の文を ϕ とすれば，(2)は $\neg T(\phi)$ (ϕ は真でない) と表現できる．この表現の仕方でも問題はないし，しばしばこの方が有用な場合が多い（私たちも後にこの表現形式を使う）が，ここでは(1)の否定形を作るために述語論理による表現の仕方を考えてみよう．今，言明 S がある時間 t の間になされる唯一の言明であって，その S の内容は，t の間になされるすべての言明は偽である，とする[(1)]．ここで，

$\forall y$(y が t になされる言明$\longrightarrow$(S は y について真$\longleftrightarrow$$y$ は y について真でない))

とすれば，言明 S は真か偽なのであるから，S は y について真，を $A(S, y)$ とすると，

$A(S, S) \longleftrightarrow \neg A(S, S)$

となり，これから(1)の否定形が得られる．

このようにみてくると，いずれのパラドックスも(1)の否定形という表現形式にまとめられるという点で，Ramsey の分類はこの限りでは表面に現われてこない．だからといって，彼の分類が誤っているとか，あるいはパラドックスのすべてが同一の形式をもっているとか言うつもりはさらさらない．(1)の否定形という表現形式でまとめられるということを根拠にして，その視点からパラドックスを眺めてみようというだけである．

さて，話を(1)に戻してみると，(1)が述語論理の定理になることから，パラドックスを防ぐために Frege の考えに従うならば，次のようなことになるであろう．

$\vdash y=x \longrightarrow (A(y, x) \longleftrightarrow A(y, y))$

この定理の対偶をとって，汎化すれば，

$\vdash \forall x \forall y((A(y, x) \longleftrightarrow \neg A(y, y)) \longrightarrow y \neq x)$

となることから，次のような条件が考えられるであろう．

C.　$F(y, x)$ で x, y が自由な変項であって，それ以外に束縛変項が含まれていないとき，$\exists x \forall y F(y, x)$ は矛盾であり，その条件は，$F(y, x) \longrightarrow y \neq x$ である．

Cが何故言えるのかを簡単にみてみよう．

$\vdash \forall y F(y, x) \longrightarrow F(x, x)$

$\vdash F(y, x) \longrightarrow y \neq x$ (C より)

これから，$F(x, x) \longrightarrow x \neq x$ がでてくるから，

$\vdash \neg \forall y F(y, x)$

$\vdash \neg \exists x \forall y F(y,\ x)$

よって，$\vdash F(y,\ x) \longrightarrow y \neq x$ が，$\exists x \forall y F(y,\ x)$ がパラドックスになるための十分条件となっていることがわかる．ところで，この条件の論理式は(1)の形と少々違っている．(1)のなかに現われる $\longleftrightarrow$ がCのなかには登場せず，消えてしまっている．しかし，この一般化によって，例えば，$\exists x \forall y$ $(y \neq x)$ は矛盾しているということが端的にわかるのである．(2) このCをいま少しわかりやすく書き直すと，

C′．　$\vdash F(y,\ x) \longrightarrow y \neq x$ であり，$\exists x \forall y F(y,\ x)$ から矛盾がでてくるならば，x の値として選べるものは変項 y の動く領域には存在しない．

このC′は一種のメタの解決法である．このメタの解決法をどのようにして言語や論理システムのなかに具体化していくかが，今までに生み出されてきた解決法の内容そのものといってもよいだろう．実際には，パラドックスの理解の仕方やそれらを取り巻く周囲の状況によって二種類のパラドックスは違った歴史を辿ることになったが，上のような形式化に従うならば，それらは同じ構造を共有しているといえるであろう．

3．Liar と Russell のパラドックスの共通性

2節での話からさらに一歩踏み込んで，二種類のパラドックスの共通の構造を探るために，Russell のパラドックスと Liar を代表に選んで，パラドックスを生み出すことになる要因を洗いだしてみよう．

3.1 Liar

既に [Tarski, [1]] によって見事に示されたように，Liar のパラドックスは私たちの自然言語（そしてほとんどの形式言語）のもつ普遍性（universality＝意味に関して閉じていること＝自らの表現について言及できること）から生じるが，その中味を項目別に書き出してみよう．この項目は次の Russell のパラドックスにも共通のものである．(3)

（1） 言語

（i） 命名ができる．すなわち，言語 L の各言明 ϕ は L のなかに名前をもっている．それは L の項であって，ϕ の名前を「ϕ⌉ と表わすことにする．（以後「ϕ⌉ という記法は常に ϕ の名前として使う）．

（ii） 自己言及ができる．すなわち，任意の論理式 $\phi(x)$ について，ある論理システムのなかで $\phi(\ulcorner\phi\urcorner)$ に同値な言明 ϕ を作ることができる．したがって，$\phi \longleftrightarrow \phi(\ulcorner\phi\urcorner)$ がいえる．

（2） 論理

通常の命題論理.(4)

（3） 原理

「x は真である」を述語記号 $T(x)$ で表わすと，Tarski の Convention T が原理となる．

(T)　L(論理システム S の言語) の任意の ϕ について，$T(\ulcorner\phi\urcorner) \longleftrightarrow \phi$.

以上の項目がすべて満足されているような論理システム，あるいはそれを含むようなシステム（したがって，自然言語）では，次のようにして簡単に矛盾が起こる．いま，ϕ を Liar に対応するような，$\phi \longleftrightarrow \neg T(\ulcorner\phi\urcorner)$ となる言明とする．（T） より，$T(\ulcorner\phi\urcorner) \longleftrightarrow \neg T(\ulcorner\phi\urcorner)$．これから矛盾が起こるわけであるが，その起こり方は，述語「……が証明河能である」についての Gödel の第一不完全性定理の証明のプロセスによく似ている．実際，Gödel は彼の証明のヒントを Liar から得たのであったし，Tarski はその Gödel の結果から述語 T が算術の形式システムのなかでは定義できないことを示したのであった.(5)

3.2 Russell のパラドックス

ここでも 3.1 と同じような項目を挙げて，その中味を調べてみよう．

（1） 言語

クラスについての命名ができる．すなわち 言語 L の $\phi(x)$ に対して，項 $\{x|\phi(x)\}$ を作ることができる．

（2） 論理

通常の第一階の述語論理.

（3） 原理

抽象の原理がクラスの項に適用できる. すなわち,

$$\forall y(y\in\{x|\phi(x)\}\longleftrightarrow\phi(y)).$$

これらの項目を満たすことから, 2節で述べた, 自分自身を含まない集合 R を考えると,

$$R=\{x|x\notin x\}$$

となり, 抽象の原理より,

$$y\in R\longleftrightarrow y\in\{x|x\notin x\}\longleftrightarrow y\notin y$$

が任意の y についていえることになる. したがって, $R\in R\longleftrightarrow R\notin R$ が得られ, 矛盾が起こる.

このように3.1と3.2のそれぞれを比較すれば, 両方のパラドックスが形式的な表現だけでなく, それらが同じような状況のなかで同じようにして矛盾を生じさせていることが看取できる.

4. パラドックスの解決法とその影響

3節で私たちは二つのパラドックスが表現形式と構造において双子のように考えられることをみたが, パラドックスを引き起こす要因ということになると, その手掛りとして三つの項目のそれぞれを診察すればよいことがわかる. そして, それら診察の項目は,

1. 言語, 2. 論理, 3. 原理,

であった. これらのすべてについて認めるならば, 徴候あるいは症状としてのパラドックスが生じるのであるから, 項目のいずれかを制限したり, 修正したりすることで徴候としてのパラドックスを防止できるのではないか, ということになろう. 事実, いままでに考えられてきたパラドックスの解決法は 1.～3. の項目のどれかを修正するという形でなされてきたと

いえよう．そして，当然のように，パラドックスは私たちの論理システムが病んでいることの徴候としてほとんど常に受け取られてきた．（しかし，パラドックスの存在こそが論理システムの健全さの徴候なのだという考えがあることも忘れてはならない．とにかく今の私たちにはパラドックスは何かの徴候なのである．この点は6節参照）．

歴史的にみるなら，まず(1)の言語の項目が修正の対象となった．Russell のタイプ理論はまさに形式言語の syntax に対する制限であるし，Tarski の言語の間の階層的な区別（対象言語とメタ言語という区別による階層）もやはり言語についての（メタの）制限である．両方の解決法の関係を少々大雑把にいうならば，タイプ理論の考えを言語に関して外在化したのが Tarski の言語の階層の考えであると言えないこともない．Russell はパラドックスの原因を抽象の原理そのものよりは，その適用の仕方の不正確さに求め，それを正確にするために言語の syntax に type や order を導入したのであった．これに対して，Tarski は Convention (T) を否定しなかった（彼はむしろ，充足 (satisfaction) 概念を使って (T) が成立するような解釈の枠組を考えた）ので，syntax はそのままにして言語の適用範囲を制限することになったのである．また，ひとや時や場面によって，述語 T が異なる意味内容をもつ，すなわち指示詞的 (indexical) であるという観点からなされた [Parsons], [Burge] の研究も Russell のタイプ理論の真理の理論への変容とみることができる．1975年くらいまでは，タイプ理論と Tarski の言語の階層説の様々な融合の仕方を探るというのが一般的な動向だったようである．

言語の syntax のなかに type や order を設け，分岐させるという考えは，形式言語については不自然なことではなく，したがってことさら抵抗もないのであるが，自然言語となるとどうであろうか．どんな自然言語にもその syntax の一部として type や order があるのかも知れないが，それがはっきり文法化され，意識されていることはまずないし，また実際

に使用されていない場合がほとんどである．そのためにタイプ理論的な言語観にはどこか不自然で，人工的な感じがつきまとうのである．

Russell のパラドックスが数学全体の基礎を脅かすということから，Russell 自身の提出した解決の道をとらなかった大部分の基礎論研究者たちは第二の道として公理的な集合論の構築という道をとった．そしてそこでは，言語の syntax のみによってパラドックスを回避するのではなく，整備された syntax の助けを借りて，抽象の原理を修正することに主眼点が置かれた．そして抽象の原理の代わりに部分集合の公理を置き，基礎の公理 (axiom of foundation) によって，パラドックスの出現を防いだのであった．公理的な集合論のなかにも，class と set の区別を認めるとか，[Gilmore] にみられるように論理の部分的な修正という考えによるシステムもある．いずれにしろ，私たちの手許に現在あるいくつかの公理的な集合論によって，数学の基礎という点では一応パラドックスから解放されたといえよう(6)．

一方，Liar に代表される，いわゆる意味論的パラドックスの方はどうであろうか．Tarski の解決法は真理の問題を，真理と語の指示や意味との関係の問題に方向を変えてしまう要素を含んでいた．彼の場合，「真である」という概念は充足関係を使って定義されるから，充足関係，すなわち論理式と世界との対応関係が，真理の研究に際してその後の哲学者の関心を引くことになったのである．確かに真理の問題は語の指示や意味といった言語の問題を抜きにしたのでは片手落ちになるであろうが，その問題はどちらかといえば真理の内容や性格に関する問題であって，真理をどのように定義するかという問題とは質の違ったものである．指示や意味といったものはどちらかといえば語の問題であって，述語 T の定義可能性は文や言明の問題なのである．したがって，述語 T の定義に関する問題はより一層論理的な追求になじむともいえるのである．Tarski 自身の重点がどちらにあったかははっきりしていたと思われるのであるが，それが指示

や意味の問題としてより多くの場合に取り上げられるのは，その後の言語哲学者たちによる（意識的な）偏向であるといえなくもない.(7) Tarski の隠れた意図がどうであれ，彼の研究それ自体は指示や意味と真理の関連を明らかにすることが第一の目標であったのではなく，したがってそのように彼の研究をみることは誤りではないだろうか.

Tarski の研究の核心は次の定理に示されているように，Gödel の第一不完全性定理から述語 T の定義不可能性を明らかにした点にある.

(Gödel-Tarski の定理)

真理の形式的な定義はできない．すなわち，（算術を含む）形式言語のなかのすべての文 ϕ について，

$$\vdash \phi \longleftrightarrow T(\ulcorner\phi\urcorner)$$

となるような述語 T はその形式言語のなかには存在しない.

この定理の証明の内容は以後の議論のためにもたいへん興味深い. $T(\ \ )$ が存在すると仮定した上で，対角線の補題(8)を使うと，

$$\vdash \phi \longleftrightarrow \neg T(\ulcorner\phi\urcorner).$$

さらに，$T(\ \ )$ の存在と前提から，

$$\vdash \phi \longleftrightarrow T(\ulcorner\phi\urcorner).$$

それ故，$\vdash \phi \longleftrightarrow \neg\phi$ となり，$T(\ \ )$ の存在から矛盾が起こることになる.

この証明の過程は，既にみた Liar のパラドックスの起こり方とたいへんよく似ている．上の証明では，対角線の補題が自己言及の役割を果たしているのである.

だが，この定理はどうも真理の研究に足留めをくわすように働いたようである．そしてこの足留めは，[Montague] の結果によって一段と強化され，(9) 証明可能性の研究（述語「……は証明できる」の研究）が進展するのとは裏腹に，述語 T の研究は総じて無視されることになったのである.（述語 T の定義不可能性の研究は算術や集合論のシステムについてのものであるが，それが自然言語の場合にも拡張されて適用されたのは，[Tarski

[1]] の研究によるだけでなく自然の動向でもあった).

証明可能性の研究の方は，Gödel の結果を受け継いで，その内容を外在化し，独立させた形で進む．これが Recursion Theory であり，近年になってそれらの結果を再度算術のなかに内在化する動きが盛んになってきている.(10)

このようにみかけの障害はあったものの，Tarski 流の解決法を不満とし，さらに新しい可能性を，特に述語 T をそれが述語する言語のなかで定義する可能性を探ってみようということで，この10年間くらいの間に多くの試みがなされてきた．それらのなかには，syntax に注目して，その修正を計るという伝統的な路線に乗った [Parsons] や [Burge] の優れた考察も見逃せないが，現在の活性化の引き金になったのはやはり Kripke の考えであろう．この新しい動向は，論理や原理に注目し，それらを修正，改変してみようという動きである．論理の方では，真理値の欠除（以後，truth-value gap, または単に gap と呼ぶことにする)，多値論理（特に Kleene の三値論理）と述語 T の帰納的な定義を巧みに組み合わせたものである．(いくつかのシステムについては，[Martin(ed.)] にある).

述語 T についてのこの新しい定義の技術的な構成は，定義可能性の一般理論として作られた弱い集合論（例えば，Kripke-Platek theory）のなかで可能なわけであるが，多値論理を使い，極限をとるという点で，解決の方法が ad hoc ではないかという疑念を哲学者に引き起こしている．構成のすべては集合論のなかで原理上は可能なのであるから，そこにはなんら問題はない，と論理学者ならば済ませるであろう．哲学の側から出される反論の真意は，真理についての以下に述べるような観点に恐らく基づいているのであり，その観点こそが真理の扱いをほかの類似の概念の扱いから区別してきた理由と思われる.

述語 T の定義に関する理論が形式的な定義だけを目的とするのであれば，多値論理を使おうと，あるいは他の非古典的論理を使おうと，そのこ

とが原理上集合論によって表現できる限りで，（そして集合論を妥当なものとして認めるならば）なんら問題はないといえる．証明可能性という概念が個々のシステムに依存した概念であるように，真理も想定されたシステムに依存した，その意味で相対的な概念であれば，なんら反論の余地はない．しかし，一方に，真理という概念は半ば直観的で，かつ普遍的なものであって，定義するものではなく，発見するものだという見解もある．ちょうど計算可能性という概念が直観的で，それを形式的に定義することだけで済ますわけにはいかないのと同じように．そこから，今はまだ隠れた真理の普遍的な概念がただ一つ存在し，それを見出すのが真理についての理論の目的だという考えが出てくることになる．すると，例えばKripkeの一連の真理の定義の構成は存在する真理についての説ということになる．それは真理を定義する一つの手法以上のものとなる．そして，その定義の構成の途中で用いられる三値論理や極限操作は単なる構成の手続きではなくなり，私たちが真理を操る現場で実際に使われる論理や操作という意味を帯びてくる．日常の生活のなかで三値論理や極限操作を使うということ，それが問題だという反論である．

この問題が具体的な形で出てくるのが，いわゆる Revenge Problem であろう．強められた嘘つき (Strengthened Liar) の議論は次のようになっている．Kripke-Martin 流の結論では，Liar の文 S は真でも偽でもない．すると，S は少なくとも真ではないことになる．これはまさに S が言おうとすることそのものであり，(T) を制限したにもかかわらず，S が真であると結論されてしまう．これは不自然なことである．この議論については後に再度考えてみよう．

ここでは論証なしに次のことだけ述べておこう．述語 T の定義の可能性を言語のなかで考える際に，事実との対応に敏感になっても，得られるのは真理の経験的な理論だけである．証明可能性や集合といった概念は論理を前提にした概念であり，したがって，論理なしの証明といったものは

端的に無意味である．これに対して，真理は論理を前提にしなくとも，例えば事実との対応ということによって扱うことができる，という考えは意外に自然に響く．ここに混乱した論争の源がありそうである．ついでながら，真理の対応説はこの自然な響きに促されて，論理以外のものによる自己の正当化を飽くことなく求めるのである．

5．いくつかの原理

私たちは二つのパラドックスに共通する構造をみてきたし，また，Russell のパラドックスについて，タイプ理論や公理的集合論による解決を知ってもいる．真理についても，この二つのことを考え合わせるならば，当然，集合論の（パラドックスを防ぐ）公理からのアナロジーで，述語 T についての原理 (T) の修正という方策が考えられる．集合論を Zermelo が再構成しようとした際に，集合の世界を cumulative hierarchy として直観的に描いたように，truth-value gap と帰納的な定義をもとにして修正の原理を探ってみよう．

原理の検討に入るまえに，次のことを述べておきたい，それは，原理と論理という私たちの最初の項目は見かけほどには違いがないということである．三値論理を使ってモデル論的に構成された真理の理論が，結果として，原理のある修正によって構文論的に作られた論理システムと同じであれば，どちらの項目をとるかは問題ではなくなる．非古典的な論理や極限操作はモデルの構成の際の道具に過ぎなかったのであり，述語 T についての古典的な論理システムが作られるということで，4節で述べた哲学的反論を簡単に退けることができるのである．

言語や論理の項目も含めて原理のいくつかを書き出してみると，次のようなものが考えられる．(11)

(1)　通常の第一階の述語論理

(2)　言語は(1)の論理の言語 L で，命名と自己言及ができる．

(3)　述語 T についての条件

（ⅰ）　ϕ ならば，$T(\ulcorner\phi\urcorner)$

（ⅱ）　$T(\ulcorner\phi\longrightarrow\psi\urcorner)\longrightarrow(T(\ulcorner\phi\urcorner)\longrightarrow T(\ulcorner\psi\urcorner))$

（ⅲ）　$T(\ulcorner\neg\phi\urcorner)\longrightarrow\neg T(\ulcorner\phi\urcorner)$

（ⅳ）　$\forall x T(\ulcorner\phi(\bar{x})\urcorner)\longrightarrow T(\ulcorner\forall x\phi(x)\urcorner)$

($\bar{x}$ は変項 x のコードまたは名前．(3)のそれぞれの原理は(2)の言語 L に T という述語を加えた言語 $L(T)$ のなかで書かれている)．

ここで述語 T についての話を確定的にするために，L を算術 (Robinson の Q) の言語として証明可能性の述語と T とを比較してみよう．P を Q の定理の集合とすると，P は (1)，(2)，(3) (i), (ii) を満足する．ところが，(iii), (iv) は Gödel の第一，第二不完全性定理によって成立しない．また，Q の標準モデル（私たちが普通に考える算術に対応するもの）で真になるものの集合については，(3)(i) が成立しなくなってしまう．(これで定理と真理が違うものであることがよくわかる)．

上の(3)のそれぞれの特徴は，それらが構造的な条件であって，私たちが述語 T について自然に望むものである．よって，それらが然るべき手続きを踏んで実現できるかどうかが問題となる．それが色々な仕方で制限された形で実現可能であることが以下に例示されるが，それら色々の理論が上の原理のどれを満たし，どれを満たさないかを見極めておくことが述語 T の定義の出発点として必要であろう．

以下に三つの定義の構成の例を比べてみよう．話は Q についてのものとしておく．

5.1　Feferman

彼の論理システムは，後に詳しくみるが，Kripke のモデル論的な構成が下敷きになっており，次の関係が成立するように組まれている．(12)

$\mathfrak{N}$ を L の標準モデル，U を自然数の集合で述語 T の外延とし，($\mathfrak{N}$, U) を $L(T)$ のモデルとしよう．(U, V) を Kripke の T の外延と反外

延（偽なるものの外延）の組とし，$(\mathcal{N}, (U, V))$ を部分モデルとする．すると，Feferman の考えた論理システムでは，

$\vdash \phi$

iff ϕ が $(\mathcal{N}, U)$ で真

iff ϕ が不動点 (fixed point) $(\mathcal{N}, (U, V))$ で真

(iff は if and only if の略)．

が成立する．そしてこのシステムでは，$\phi \longrightarrow T(\ulcorner\phi\urcorner)$ が成立しない形で (T) が制限されている．((3)(i) が成立しないことになる)．

5.2 van Fraassen

これは supervaluation と呼ばれる方法で，次のような関係を想定する [van Fraassen]．

ϕ が部分モデル $(\mathcal{N}, (U, V))$ で真(偽)

iff ϕ がすべての古典的モデル $(\mathcal{N}, W)$ で真(偽)（ここでは W を U を含む真なる $L(T)$ の文の集合とする）．

この方法は Kripke の構成の一変形と考えることができる．W が無矛盾であることを加えれば，(3)(iii) が成立する．さらに，W が極大無矛盾ならば，(3)(iv) 以外はすべて満足される．(当然ながら，ω-無矛盾性がさらに加われば，原理のすべてが成立する)．

5.3 Herzberger

彼が素朴な意味論と命名したもので，次のように構成される [Herzberger][13]．

U を文の集合とし，帰納的に，

$h(U, 0)=0$

$h(U, \alpha+1)=\{\phi|\phi$ は $h(U, \alpha)$ で真$\}$

$h(U, \lambda)=\bigcup_{\alpha<\lambda}\bigcap_{\alpha\leq\beta<\lambda} h(U, \beta)$ （λ：極限順序数）

（これは，ついには $\langle h(U, \alpha)|\alpha<\lambda\rangle$ の列に入る文の集合を意味している）

その上で，次のように定義する．

ϕ が真

iff $\forall U(\phi \in h(U, \infty))$

（ここで $h(U, \infty)=\{\phi \mid \exists\alpha(\phi \in h(U, \alpha))\}$）

このように構成すると，次のことがすぐわかる．

$\phi \in h(U, \infty)$

iff ϕ は(3)(iv) 以外のすべてを満足する．

Hertzberger のシステムによく似た [Gupta] のシステムでは，(3)(ii), (iii), (iv) はいずれも成立しなくなっている．上の Hertzberger の極限のとり方が下極限であることから察せられるように，極限のとり方の違いにその理由がある．

以上のものが代表的な例である．様相論理では (3)(i) は necessitation rule と呼ばれており，Q の標準モデルで真な文については，これが成立しない，その意味で Feferman のシステムが Q に関しては自然であるといえよう．[14]

6．モデル論的構成から論理システムへ

ここではモデル論的な帰納的構成（5節の例はいずれもモデル論的）と公理的な論理システムの間の移行を既存のものより一般化した形で考え，両者の間の見かけの違いを解消すると同時に，今まで平行的に扱ってきた二つのパラドックスとその克服が数学の基礎としての集合論と真理の理論に違った扱いを要求するようになる，ということを示してみよう．既に述べた哲学的な反論に肩すかしをくわすと同時に，新しい哲学的な考察の必要性が出てくることがこの節で述べたいことである．

私たちは次の順序で話を進めてみよう．

1. 述語 T を含んだモデルの構成
2. 述語 T を含んだ論理システムの構成

1,2 を一般的に述べるという意味は，それぞれについて三値，四値，supervaluation の考えが同時に展開できるような枠組を述べるという意味である．最後に練習問題ということで，既に述べた Strengthened Liar を再考してみよう．

6.1 モデルの構成

ここでは Kripke の論文と順序集合についての若干の知識を前提にした上で話を進めよう[15]．モデルを構成する要点は，述語 T が矛盾なく解釈されるような（述語論理の他の記号の解釈を含んだ）モデルを，言語 L のモデルからどのように構成するかにある．構成されたモデル内では述語 T は古典的にではなく，三値の論理を満足することになる．もちろん，T を含まない文は古典的に解釈される．構成をみれば明らかなように，「真である」という述語に限らず，「有意味である」，「真らしい」といった自己言及できる述語，さらには一般の外延が不明確な述語に対してさえ，このモデルの構成は同じように適用できる．また，構成の際に帰納的な手法を取るのは，真なる文の集合が拡張に対して束になっていないからであり，それが不動点の採用に結びつくのである[16]．

言語 L の古典的モデルを $M_0=<D, I_0>$ とする．D は $L(T)$ のすべての文を含むような集合，I_0 は L の解釈とする．また，D のどの要素 x も $I(\bar{x})=x$ なる定項 $\bar{x}$ をもつ，特に ϕ は「ϕ⌉ と仮定する．T の解釈として部分述語（定義されていない部分をもつ述語で，部分関数に対応する）が考えられる．ここでは部分述語を $D\times\{t, f\}$ の部分集合とみなそう．ここで t, f は真，偽に対応する値である．（[Kripke] のように D の部分集合の互いに素の組 $\langle S_1, S_2\rangle$ とも表現できる．$D\times\{t\}$ の部分集分集合が S_1 に，$D\times\{f\}$ の部分集合が S_2 に対応する）．$D\times\{t, f\}$ の部分集合とは部分関数の別の表現でもあるから，部分述語を部分関数の記法 $(f(x)\approx y)$ で表わすことにする．解釈 I はこのようにして I_0 に T の解釈を加えて作られる．T 以外の述語については，$\approx$ と $=$ は同じである．

そこで次に $L(T)$ のモデルを定義しよう．$\mathrm{M}=\langle D, I\rangle$ は M_0 の拡張で，$I(T)$ は $L(T)$ の文と $\{t, f\}$ の積の部分集合とする．[17] 帰納的に $L(T)$ の文の付値 V を決めよう．

$V(Pc_1\cdots c_n)\approx t(f)$ iff $I(P)(I(c_1),\cdots, I(c_n))\approx t(f)$

$V(\neg\phi)\approx t(f)$ iff $V(\phi)\approx f(t)$

$V(\phi\vee\psi)\approx t$ iff $V(\phi)\approx t$ または $V(\psi)\approx t$

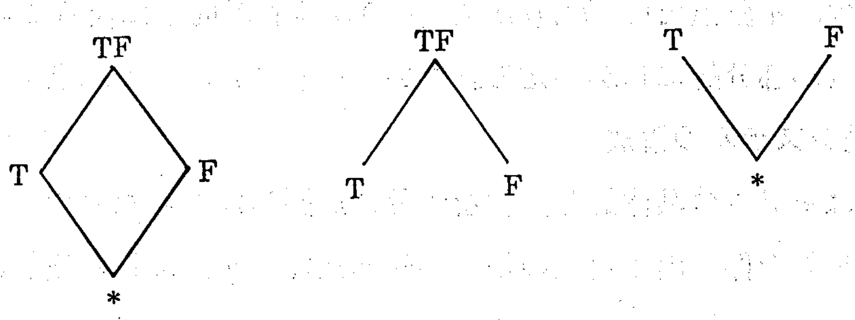
$V(\phi\vee\psi)\approx f$ iff $V(\phi)\approx f$ かつ $V(\psi)\approx f$

$V(\exists x\phi)\approx t$ iff D のある x について，$V(\phi(\bar{x}))\approx t$

$V(\exists x\phi)\approx f$ iff D のすべての x について，$V(\phi(\bar{x}))\approx f$

(この定義は [Woodruff] p. 216 と同じものである)．

この付値 V では $I(P)$ をどのようにとるか確定していない．これをどうとるかによって下図の $\langle \mathrm{T}_0\rangle$，$\langle \mathrm{T}_1\rangle$ または $\langle \mathrm{T}\rangle$ に分かれることになる．それは原始式 ϕ の値の可能性として，$\{\mathrm{T}, \mathrm{F}, *, \mathrm{TF}\}$ を考えることができるからである．この値の集合は図の意味で束になっており，三値の値とは下のような関係になっている．[18] (ここで T, F は上の定義の t, f に対応している)．



<T>　　　<T0>　　　<T1>

$\langle \mathrm{T}_0\rangle$，$\langle \mathrm{T}_1\rangle$ は三値で，双対の関係になっている．$\langle \mathrm{T}_0\rangle$ を採用すれば，真かつ偽なる文を認めるモデルが作られ，[Priest] の主張する真理値の構造となる．ほとんどの理論は $\langle \mathrm{T}_1\rangle$ に基づいている．

次に帰納的空間 (inductive space) を定義しよう．帰納的空間は $\langle U, J\rangle$

なる組で，U が集合，J は U の部分集合の上の単調オペレータである．すなわち，$S \subseteq S' \subseteq U$ ならば，$J(S) \subseteq J(S') \subseteq U$．通常は $S \subseteq J(S)$ となるが，$S = J(S)$ のとき，S は J の不動点と呼ばれる．J を繰り返し適用して，$J^{\alpha+1}(S) = J(J^{\alpha}(S)) = J^{\alpha}(S)$ に到達したとすれば，$J^{\alpha}(S)$ は S を含む不動点である．これを S の閉包 (closure) と呼び，S^* で表わそう．

これで二つの概念の定義が終ったので，次にこの二つを結びつけよう．$I(T) = S$ と解釈し，付値を V_s とし，帰納的空間を作る．少し詳しくいえば，次のようになる．U を文と真理値の組（$\langle \phi, t \rangle$ の形のもの）の集合とし，$S \subseteq U$ に対して，$J(S) = V_s$ とする．すると，$\langle U, J \rangle$ は帰納的空間となる．そして，J の不動点では，任意の文 ϕ について，

$T(\ulcorner \phi \urcorner)$ が真 iff $S(\phi) \approx t$

iff $V_s(\phi) \approx t$

iff ϕ は真

という関係が成立することになる.[19]

私たちは具体的な例を示してないが，それらは多くの論文に既に示されているので省く．([Kripke], [Visser], [Fitting]) この構成から得られる重要な結果は，不動点では $T(\ulcorner \phi \urcorner)$ と ϕ の真理値が同じになること，ところが，それが部分的にしか与えられないということ，この二点である．

6.2 論理システムの構成

私たちはモデルの具体的な詳細を十分に展開しなかったので，そこから論理システムを作り出す過程の妙味が味わえないが，6.1 の最後に述べたこと，特に述語 T を含むすべての文が真，偽の値をもてるわけではないという点がシステムを作る際の核心になる．真理値のないものを，真理値が欠除している (gap) と考えることが自然なのであるが，一方，真理値が余分に与えられている (glut)，すなわち真かつ偽であると考えることも不可能ではない．この場合，私たちの普通の意味での無矛盾性は成立しないが，6.1 のモデル構成では真かつ偽と解釈される文があっても手続きは実

行できる．

それ故，以下のシステムの構成では gap の考え方を基本にして，それと双対的な形で glut の考えに基づくシステムも考えてみよう．gap に基づくものは [Feferman], [Cantini] に類似のものである．

[Smullyan [1]] の signed formula の考えに似たものとして，二つのオペレータ I, Ǐ を使い，それらを $L(T)$ に加えよう．Iϕ, Ǐϕ はそれぞれ ϕ は真，ϕ は偽を意味しており，signed formula の Tϕ, Fϕ に対応していると考えればよい．([Feferman] では ϕ^+, ϕ^- と表わされており，私たちは [Cantini] の記号に従った)．

I, Ǐ についての公理 ([Cantini] p. 408)

(1) $\mathrm{I}\neg\phi \leftrightarrow \check{\mathrm{I}}\phi$, $\check{\mathrm{I}}\neg\phi \leftrightarrow \mathrm{I}\phi$

(2) $\mathrm{I}(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \mathrm{I}(\phi) \vee \mathrm{I}(\psi)$

$\check{\mathrm{I}}(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \check{\mathrm{I}}\phi \wedge \check{\mathrm{I}}\psi$

(3) $\mathrm{I}\forall x\phi \leftrightarrow \forall x\mathrm{I}\phi$, $\check{\mathrm{I}}\forall x\phi \leftrightarrow \exists x\check{\mathrm{I}}\phi$

(4) $\mathrm{I}\mathrm{I}\phi \leftrightarrow \check{\mathrm{I}}\check{\mathrm{I}}\phi \leftrightarrow \mathrm{I}\phi$

$\check{\mathrm{I}}\mathrm{I}\phi \leftrightarrow \mathrm{I}\check{\mathrm{I}}\phi \leftrightarrow \check{\mathrm{I}}\phi$

(5) $\mathrm{I}\phi \longrightarrow \phi$

これらの公理と双対的に，C, Čを考えることができる．身分は I, Ǐ と同じである．

$\mathrm{C}\phi = \neg\mathrm{I}\neg\phi$, $\check{\mathrm{C}}\phi = \mathrm{C}\neg\phi$

と定義すれば，上の(1)～(5)に対応した公理が得られる，(1)～(4)については I, Ǐ を C, Č で置き換えればよいが，(5)は，

$\phi \longrightarrow \mathrm{C}\phi$

となる．

ここで，次のようにして意味論的に閉じた理論を作ってみる．[20]

(i) $L(T)$ の原始論理式 ϕ について，

$\mathrm{I}\phi \leftrightarrow \phi$, $\check{\mathrm{I}}\phi \longrightarrow \neg\phi$

$(\mathrm{C}\phi \longleftrightarrow \phi,\ \neg\phi \longrightarrow \check{\mathrm{C}}\phi)$

(ii) L の原始論理式 ϕ について，

$\neg\phi \longrightarrow \check{\mathrm{I}}\phi \quad (\check{\mathrm{C}}\phi \longrightarrow \neg\phi)$

(iii) $\mathrm{I}\phi(y_0, \cdots, y_k) \longleftrightarrow S(\ulcorner\phi(c_0, \cdots, c_k)\urcorner)$

$\check{\mathrm{I}}\phi(y_0, \cdots, y_k) \longleftrightarrow \check{\mathrm{I}}S(\ulcorner\phi(c_0, \cdots, c_k)\urcorner)$

(ここで S は注(20)の ϕ にあたるもので，述語 T はその一例である)．

すると，次のことがわかる．

(6) $(\mathrm{I}\phi \longrightarrow \phi) \wedge (\check{\mathrm{I}}\phi \longrightarrow \neg\phi)$

$((\phi \longrightarrow \mathrm{C}\phi) \wedge (\neg\phi \longrightarrow \check{\mathrm{C}}\phi))$

(7) $\neg(\mathrm{I}\phi \wedge \check{\mathrm{I}}\phi)$

$(\mathrm{C}\phi \vee \check{\mathrm{C}}\phi)$

(8) L の文 ϕ について，$(\mathrm{I}\phi \longleftrightarrow \phi) \wedge (\check{\mathrm{I}}\phi \longleftrightarrow \neg\phi)$

$((\mathrm{C}\phi \longleftrightarrow \phi) \wedge \check{\mathrm{C}}\phi \longleftrightarrow \neg\phi))$

そこで [Feferman] p. 275 (ページは [Martin (ed.]) にならって，述語 T について，

$$\begin{cases} T(\ulcorner\phi\urcorner) \longleftrightarrow \mathrm{I}\phi \\ F(\ulcorner\phi\urcorner) \longleftrightarrow \check{\mathrm{I}}\phi \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} T(\ulcorner\phi\urcorner) \longleftrightarrow \mathrm{C}\phi \\ F(\ulcorner\phi\urcorner) \longleftrightarrow \check{\mathrm{C}}\phi \end{cases}\right)$$

と定義すれば，意味論的に閉じた論理システムのなかで，述語 T，F が支障なく定義されることになる．(6.1のモデルが無矛盾性を与えてくれる)．しかも，このシステムは，古典的なシステムの保存的な拡張 (conservative extension) になっている．(21)

以上のことから，古典論理のシステムを基礎にして，述語 T のいくつかの妥当と思われる性質を原理として加えれば，保存的な拡張という形で自己言及の可能な論理システムが得られ，かつそのモデルも存在すること

がわかった．古典論理を否定する必要はどこにもないのである．私たちは述語 T についてもっぱら述べたが，以上の構成は自己言及ができる他のどんな述語に対しても適用できることも明らかであろう．結局，2節の C′ を満足する述語について同じような論理システムが組めるのである．[Feferman] では述語 T と平行して，述語 $\in$ についても同様の論理システムが考えられている．

6.2 の構成で，では問題になる点は何かといえば，結局 I, Ǐ (C, Č) の性質についてである．述語 T についての意見の一致が私たちの間にないので，I, Ǐ の性質についても意見の相違が出てくるのは否定できない．C, Č はその一例といえよう．

最後に Liar の話に戻ろう．Liar は I, Ǐ を使うと，真でも偽でもないことになり，C, Č では真かつ偽と解釈できる．前者の場合，真ではない．よって，真ではないことを主張しているのであるから，Liar は真ということになり，特に I, Ǐ の使用の場合と合わないことになる．(C, Č を使った場合は Strengthened Liar の批判は反撃できる)．そこで，この論証を詳しくみてみよう．6.2 の (I, Ǐ の) システムを CF と呼んでおく．

Strengthened Liar の上の論証の奇妙さはどこに起因するのだろうか．すぐにわかることは，CF を使って得られた，Lair が真でも偽でもないという結論についての論証が CF の外で，私たちの通常の二値の真，偽概念を使って行なわれている点である．Strengthened Liar の論証は文の真・偽についての論証なのであるから，真・偽についての理論 CF を使わない理由はない．では，この論証を CF の中で行なったら，果してどうなるであろうか．

(2)　(2)は真でない．

この以前の例文について CF の中で考えてみよう．まず，この文は，$(2) \longleftrightarrow \neg \mathrm{I}(2)$ と表わされるような文である．これが真でも偽でもないという主張は，$\neg \mathrm{I}(2) \land \neg \check{\mathrm{I}}(2)$ であるから，上の関係より，

$$\neg I(\neg I(2)) \wedge \neg \check{I}(\neg I(2))$$

となる．よって，$\neg I(\neg I(2))$．これと上の関係 $(2) \longleftrightarrow \neg I(2)$ より，$\neg I(2)$．これは (2) の主張そのものだから，$I(\neg I(2))$．したがって，$\neg I(\neg I(2)) \wedge I(\neg I(2))$ となり，矛盾である．

この論証はどこかに誤りがなければならない．そうでなければ，CF が無矛盾であることに反するからである．それを見つけるのは簡単である．論証は $\neg I(2)$ から，($(2) \longleftrightarrow I(2)$ を使って) $I(\neg I(2))$ へと進んだ．ところが，$\vdash_{CF}\phi \longrightarrow I\phi$ である．したがって，CF の中で真・偽を考える限り，何ら矛盾は出てこないし，Strengthened Liar 自体は何の批判にもならないのである．

この CF への翻訳から，I, $\check{I}$ が私たちの日頃親しんでいる真・偽とは少し異なった振舞をすることがわかり，私たちの真・偽ではないという印象は避け得ないだろう．C, $\check{C}$ で考えれば，$C(2) \wedge \neg C(2)$ と最初から異様な印象をもってしまう．これらの印象は私たちが極めて自然だと考えている Convention (T) を放棄したことの見返りなのである．(T) をそのまま採用したのでは一つの言語のなかで自己言及を矛盾なしにできない．それ故，(T) を制限する．だが，その制限によって，私たちが使い慣れている真理の概念を保持する限り，不自然で歪んだ印象をもたざるを得ないのである．これを欠点とみるか，定められた運命とみるか，まだ私たちには何ともいえない．[22]

7．再度二つのパラドックスの共通性について

私たちは出発点から Liar と Russell のパラドックスの共通性に着目し，それらの解決法についても共通なものを望むかのように論じてきた．6節の考察は，しかしながら，もっぱら述語 T についてであった．6節の考察が抽象の原理にもほとんど同じように適用されるならば，当然，述語 T の制限と類似のものが，抽象の原理についてもなされるであろう．

抽象の原理を，

$$x \in \{x | \phi(x)\} \longleftrightarrow \mathrm{I}\phi(x)$$

$$x \notin \{x | \phi(x)\} \longleftrightarrow \check{\mathrm{I}}\phi(x)$$

と修正して [Feferman]，集合論そのものを再構成することになる．これは文字通り共通の解決法といえるだろう．その意味で，これを強い共通の解決法と呼んでおこう．これに対して，弱い共通の解決法とも呼べるものが考えられないだろうか．確かに，2節でみたように二つのパラドックスは第一階の述語論理の言語を使えば，同じ形をしている．そしてその同じ形をとる鍵は，文とクラスそれぞれについての自己言及性にあった．そして今までの叙述からも察することができるように，単にたまたま偶然に二つのパラドックスが同じ自己言及性に起因しているのでもない．そこには共通性が確かに存在している．ところが，数学の基礎と真理の理論という二つのものを比べたとき，両者の違いが大きく現われてくる．数学の基礎については，完全だとはいえないにしても既にいくつかの理論があり，試練を経て現在に続いている．一方，真理の理論はといえば，それが本当に構築できるのかさえ誰にもわからない．その意味で私たちがここで考えたのはいずれもその候補といえる．もちろん，確からしい候補を考えたつもりであるが．6節の最後の論証からわかるように，I，$\check{\mathrm{I}}$ や C，$\check{\mathrm{C}}$ は私たちの普通の真・偽とはきっぱり違っているのである．そのことを抽象の原理の適用の制限にアナロジカルに使ってみれば，

$$\neg(x \in \{x | \phi(x)\})$$

から，$x \in \{x | \neg\phi(x)\}$ が主張できないことになる．これは以前の論証のときに私たちが遭遇したのと同じ困惑を引き起こす．

さらに，(T) と抽象の原理の制限は同じ方式で，すなわちどちらも I，$\check{\mathrm{I}}$ を使ってなされている．では I，$\check{\mathrm{I}}$ が確実なものかと問い直すと疑問がでてくる．一方，(T) の方は C，$\check{\mathrm{C}}$ を使って定義し直すこともできたが，C，$\check{\mathrm{C}}$ を使った場合の数学の基礎論は恐ろしくグロテスクなものになるだ

ろう．無矛盾性に関して数学的世界は真・偽の日常世界より遙かにアレルギーなのである．

ここで冷静になってみるために話を科学哲学での科学理論の扱い方に転じてみよう．科学理論の論理形式を主にした扱い方は現在では人気がなくなってしまったが，その大きな理由は，科学の本質を形式的な理論という抽象的なレベルで扱ったのでは片手落ちで，肝心の部分が無意識のうちに切り捨てられてしまうということであろう．形式的な理論というレベルでは，数学，自然科学，社会科学いずれの分野の理論もすべて同一の基準を満たす，例えば仮説演繹体系としてまとめられ，共通の構造だけが追求されることになる．この追求によって理論というレベルでの共通の構造が多くわかったのであるし，それらは無視できないのであるが，何か，しかも肝心の何かが欠けているという印象が多くの人々にもたれてきた．そしてその欠けたものを補うために発見の論理や科学史が使われもした．結局，形式的な理論という共通性を設定することで，何の理論であるのかが失われてしまったのであろう．

さて，話を弱い共通の解決法に戻そう．この主張は今までの叙述からほとんど明らかであろうが，しめくくりとして述べておこう．弱い共通の解決法とは，今まで私たちがずっと採用してきた方法なのである．Russell のパラドックスに対処するためのタイプ理論は変形されて Liar のパラドックスの解決に使われてきた．集合論の援用による解決もまた使われてきた．ただその際に二つのパラドックスは同じ病根に基づくと明言しなかっただけである．隠れて共通性を使ってきたのである．この立場をしばらく続けようというのが弱い共通の解決法の主張である．

パラドックスに関する事情は確かに好転した．述語 T の制限された形での定義が一つの言語で可能であることがわかった．ここで忘れてならないのは，それらのことが数学の基礎論の考えから得られていることである．この事実を生かそうとするならば，例えば Feferman の考えについ

てはそれを集合論について詳しく調べてみて，その後で真理の理論に応用してみるという道をとるべきだろう．証明可能性との比較についても然りである．算術についての真偽をまず調べ，それを一般化する方向がとられるべきであろう．言語のなかでの述語 T の定義という意味での真理の理論を経験的に構築するためには，既に私たちがある程度知っている算術や集合論で思考実験し，試行錯誤を繰り返すことが必要であろう．

そして，私たちが追求しているのが何の理論であるのかを忘れないことである．

注

(1) この点については，[Smullyan [2]] に興味深い説明がある．ついでながら彼の同書には数多くのタイプのパラドックスが，L. Carroll の本と同じ位に正確かつ文学的に叙述されている．

(2) さらに，
コカ・コーラはどんな清涼飲料よりうまい，0はどんな自然数より小さい，
といった文が，そのみかけに反して，パラドックスにならないことがわかる．いずれも，

$$\exists x \forall y (F(x) \land F(y) \land G(x, y))$$

という形であるが，$G(x, y) \to x \neq y$ を満足していない．

(3) この項目は [Feferman] の分類を少し変形して使用している．

(4) 論理として命題論理を採用するのは，通常の Liar の表現形式に従ったからである．2節で述べた形式で扱うときには述語論理の採用となる．

(5) この辺の経緯については，Gödel や Tarski の原論文の他に，現在では [Smoryński] に十分な叙述がある．

(6) 公理的な集合論にはさまざまなものがあり，それぞれ違った意図と形式をもっている．また，数学の基礎という観点からは集合論以外のものも考えられている．Feferman の研究の一つの動機には数学の基礎としてのカテゴリー論がある．集合論の基礎的な考えについては，[Fraenkel, Bar-Hillel, Levy] に詳しい．

(7) この偏向した理解の代表例は [Field] にみられる．Field は物理主義の徹底のためには Tarski の真理の定義では不十分であるとするが，その不十分さは定義をする際に物理主義と相容れない非物理的な概念（意味）が使われて

いるというものであり，彼が問題としているのは述語Tの定義可能性の不十分さではないのである．

（8） 対角線の補題とは次の主張である．
x だけを自由変項としてもつ，任意の論理式 $\phi(x)$ について，次のような文 ϕ が存在する．$\vdash \phi \leftrightarrow \phi(\ulcorner\phi\urcorner)$.

（9） Montague の結果は次のようなものである．彼は $Pr(\ )$（証明可能である）を様相オペレータ□とみて，それと自己言及との関係に関心をもった．Gödel の第一不完全性定理より，

$$\vdash \phi \Rightarrow \vdash Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$$

$$\vdash Pr(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi$$

が同時に成立しないことを示した．

$$\vdash \phi \Rightarrow \vdash Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$$

は成立するので，

$$\nvdash Pr(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi\ .$$

Pr を T として考えてみれば，この最後の結果は，T が述語として定義できないことを示している．もっとも，彼の関心は ZF のように反映の原理 (reflexion scheme) が，つまり，

$$Pr_s(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi$$

が有限の部分理論 S について成立するようなシステムを考え，$\vdash \phi \not\Rightarrow S \vdash \phi$ を得ることにあった．(ZF は，したがって，有限に公理化可能ではないことになる)．

（10） [Boolos], [Smoryński] 参照．述語 Pr の算術内での構造，さらに一般的な数学理論内での構造の研究は Solovay の研究で息を吹き返したといえる．さまざまな手法が用いられるが，なかでも特徴的なのは様相論理やある種の代数（例えば，fixed point algebra) が使われる点である．これらの成果のかなりのものは真理の理論にとっても大いに示唆を与えるものである．真理の理論の構築に大いに参考になるものは三つ考えられるが，上叙のものの外に，定義可能性の理論と relevant logic がある．

（11） 以下の項目に類似のものが [Mcgee] にある．(1)～(3) を Robinson の Q で考え，(3)(iv) の変項を N（自然数）に制限すれば，簡単に Montague の結果が得られる（注 9 参照)．Mcgee は原理がすべて成立するような文の集合が ω-矛盾であることを示している．

（12） [Feferman] 参照．ちなみに彼の論文はいままで述語 T と $\in$ について書かれたものの中で最も包括的なものである．

(13) Herzberger は述語 T の形式的な定義のみでなく，私たちの日常言語の使用と「……は真である」の関係を具体的な文脈で，意味論の問題として考えている一人である．

(14) 他の例についてはは不自然なシステムかというと，そう簡単に結論は出せない．まず，Q の標準モデルは述語 T についての解釈を含んでいないし，さらに Q の話を自然言語についての話と同じようには考えられないからである．

(15) [Kripke] の他に [Woodruff] が適当な知識を供給してくれる．順序構造をも含め数学的な道具立てに最適なのは [Fitting] の解説である．以下の本文のスタイルは [Woodruff] を基本にして [Fitting] をしばしば参考に使った．[Fitting] の解説は彼が好む [Smullyan [1]] のスタイルに従っており，通常の述語論理との関連がよく把握できる．

(16) 束での不動点の研究は奇しくも [Tarski [2]] にあり，その内容は真理の研究の新動向に対して示唆に富んでいる．

(17) この定義からもわかるように，$L(T)$ は極めて弱い意味での第二階の言語と考えることもできる．

(18) 四値の値を基本に考えれば，注(16)の意味で [Tarski [2]] の結果が使える．四値の研究は [Visser] に詳しい．

(19) この証明は不動点の性質から明らかであろう．また，この関係のなかで，真を偽に，t を f に置き換えれば，ϕ が偽の場合についても，$T(\ulcorner\phi\urcorner)$ が偽 iff ϕ が偽，が成立する．S^* に入っていないものについては，それが定義されていないとして第三の値を与えることもできる．$\approx$ を $=$ を使って普通の関係に表現し直しておくと，

$$T(\ulcorner\phi\urcorner)\text{ が}\begin{cases}\text{真}\quad\text{もし } \langle\phi, t\rangle \in S^* \\ \text{偽}\quad\text{もし } \langle\phi, f\rangle \in S^* \\ \text{定義されない}\quad\text{それ以外のとき}\end{cases}$$

となる．

(20) 意味論的に閉じた理論とは，その理論が自己言及の文をもつこと，すなわち．

$$(\mathrm{I}\phi(\ulcorner\phi\urcorner)\leftrightarrow \mathrm{I}\phi)\wedge(\breve{\mathrm{I}}\phi(\ulcorner\phi\urcorner)\leftrightarrow\breve{\mathrm{I}}\phi)$$

がすべての ϕ について成立するような ϕ をもつことである．(ここで I, $\breve{\mathrm{I}}$ を C, $\breve{\mathrm{C}}$ に置き換えると，双対版ができる)．以下の定義は基本的には [Cantini] p. 409 に従うが，私たちの場合，モデルの定義の際に領域の個体には名前が与えられているので (iii) は彼の定義と異なっている．

(21) この保存的な拡張ということが，非古典的な論理に依存していないということの論理的な証明と考えてよい．保存的な拡張であることの証明は [Aczel,

Feferman], [Cantini] を参照.

(22) I, Ĭ と C, Č について直観的な理解を助ける意味で蛇足を加えておこう. 私たちが日常使う真・偽は曖昧なもので, ある時には I, Ĭ の意味で, また別の場合には C, Č の意味で使っていると考えることもできる. I, Ĭ は, 確実に真, 確実に偽という意味で, C, Č は真らしい, 偽らしいという意味で, 一つの真・偽の幅を与える基準のもとでの両極端にあるものと考えることもできる.

References

Aczel, P. and Feferman, S., "Consistency of the unrestricted abstraction principle using an intensional equivalence operator", in Seldin and Hindley, 1980, 67–98.

Boolos, G., *The Unprovability of Consistency*, 1979, Cambridge Univ. Press.

Burge, T., "Semantical paradox", 1979, *The Journal of Philosophy*, 76, 169–98, also in Martin.

Cantini, A., "A note on three-valued logic and Tarski theorem on truth definition", 1980, *Studia Logica*, 39, 405–14.

Feferman, S., "Toward useful type-free theories, I", 1984, *Journal of Symbolic Logic*, 49, 75–111, also in Martin.

Field, H., "Tarski's theory of truth", 1972, *The Journal of Philosophy*, 69, 347–75.

Fitting, M., "Notes on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth", 1986, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 27, 75–88.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y. and Levy, A., *Foundations of Set Theory*, 1973, North-Holland.

Gilmore, P.C., "The consistency of partial set theory without extensionality", in T. Jech (ed.), *Symposia on Pure Mathematics Proceedings*, Vol 13, Part 2, 1974.

Goddard, L. and Jonston, M., "The nature of reflexive paradoxes: Part I", 1983, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24, 491–508.

Gupta, A., "Truth and paradox", 1982, *Journal of Philosophical Logic*, 11, 1–60, also in Martin.

Herzberger, H.G., "Notes on naive semantics", 1982, *Journal of Philosophical Logic*, 11, 61–102, also in Martin.

Kripke, S., "Outline of a theory of truth", 1975, *The Journal of Philosophy*, 72, 690–716, also in Martin.

Martin, R.L. (ed.), *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, 1984, Clarendon Press.

Mcgee, V., "How truthlike can be a predicate be? A negative result", 1985, *Journal of Philosophical Logic*, 14, 399–410.

Montague, R., "Syntactical treatments of modality, with corollaries on reflexion principles and finite axiomatizability", 1963, *Acta Phil. Fennica*, 16, 153–67.

Parsons, C., "The Liar paradox", 1974, *Journal of Philosophical Logic*, 3, 381–71, also in Martin.

Priest, G., "Logic of paradox revisited", 1984, *Journal of Philosophical Logic*, 13, 153–79.

Seldin, J. and Hindley, J., *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, 1980, Academic Press.

Smoryński, R., *Self-Reference and Modal Logic*, 1985, Springer-Verlag.

Smullyan, R., [1] *First-Order Logic*, 1968, Springer-Verlag.

——— [2] *Alice in Puzzle-Land*, 「パズルランドのアリス」, 市場泰男訳, 社会思想社, 1985.

Tarski, A., [1] *Logic*, *Semantics*, *Metamathematics* (transl. by J. H. Woodger), 2nd ed., 1983, Hackett.

——— [2] "A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications", 1955, *Pacific Journal of Mathematics*, 5, 289–309.

van Fraassen, B., "Singular terms, truth-values gaps, and free logic", 1966, *The Journal of Philosophy*, 63, 481–5.

Visser, A., "Four valued semantics and the Liar, 1984, *Journal of Philosophical Logic*, 13, 181–212.

Woodruff, W., "Paradox, truth and logic Part I: paradox and truth", 1984, *Journal of Philosophical Logic*, 13, 213–32.