

Title	様相の証明可能性解釈
Sub Title	Provability interpretation of modality
Author	西脇, 与作(Nishiwaki, Yosaku)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1981
Jtitle	哲學 No.72 (1981. 1) ,p.1- 26
JaLC DOI	
Abstract	Recently Solovay proved the completeness theorem for G, according to which a modal sentence is a theorem of G if all of its translations are theorems of Peano Arithmetic. From this theorem, many interesting results were obtained and the relations between modality and provability have been gradually clarified. I will prove the completeness theorem for K4 and some topological properties of K4, where topology of K4 models $(A (W, R))$ is defined by derived set a la Simmons or co-derived set. And then I will consider some of the meta-mathematical structures of the predicate 'Bew'.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000072-0001">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000072-0001</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

# 様相の証明可能性解釈

西 脇 與 作\*

“Provability Interpretation of Modality”

*Yosaku Nishiwaki*

Recently Solovay proved the completeness theorem for  $G$ , according to which a modal sentence is a theorem of  $G$  if all of its translations are theorems of Peano Arithmetic. From this theorem, many interesting results were obtained and the relations between modality and provability have been gradually clarified.

I will prove the completeness theorem for  $K4$  and some topological properties of  $K4$ , where topology of  $K4$  models  $(\mathcal{A}(W, R))$  is defined by derived set à la Simmons or co-derived set. And then I will consider some of the meta-mathematical structures of the predicate ‘Bew’.

\* 慶應義塾大学文学部助手（哲学）

## 1. 序

Hilbert の無矛盾性プログラムは Gödel の不完全性定理の証明によって放棄されることになったが、Gödel の証明で重要な役割を果たしたのは自己言及 (self reference) の形式化と  $\text{Bew}(x)$  (' $x$  は証明可能である') の構成であった。論理式  $\text{Bew}(x)$  は Gödel の手続きに従えば、次の 3 つの導出条件を満たしている。PA を Peano Arithmetic, PA の表現  $F$  のゲーデル数を表わす numeral を  $\llbracket F \rrbracket$ ,  $\vdash_{\text{PA}} F$  を  $F$  が PA の定理、とすると、任意の PA の文  $S, S'$  に対して、

- (I)  $\vdash_{\text{PA}} S \implies \vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket)$
- (II)  $\vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\llbracket (S \rightarrow S') \rrbracket) \rightarrow (\text{Bew}(\llbracket S \rrbracket) \rightarrow \text{Bew}(\llbracket S' \rrbracket))$
- (III)  $\vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket) \rightarrow \text{Bew}(\llbracket \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket) \rrbracket).$

$\text{Bew}(\llbracket S \rrbracket)$  は直観的には、「 $S$  が証明可能であることを主張する文」である。

これらをもとにして次の二つの補題が証明される。

1. 1 (対角線の補題)  $x$  以外の変項を含まない PA の任意の論理式  $F(x)$  に対して、次のような文  $S$  が存在する。

$$\vdash_{\text{PA}} S \leftrightarrow F(\llbracket S \rrbracket)$$

1. 2 (Löb の定理) PA の任意の文  $S$  に対して、

$$\vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket) \rightarrow S \iff \vdash_{\text{PA}} S$$

1. 1 の  $F(\ )$  に  $\neg \text{Bew}(\llbracket \ ) \rrbracket$  を考え、 $\vdash_{\text{PA}} S$  とすると、導出条件(I) より  $\vdash_{\text{PA}} \neg \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket)$ 。よって、 $\vdash_{\text{PA}} \neg \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket) \wedge \vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket)$ 。これは矛盾であるから  $\vdash_{\text{PA}} \neg S$ 。又、Löb の定理の左側が満される文 ( $\Sigma_1$  文、又は  $\omega$ -無矛盾性)  $\text{Bew}(\llbracket S \rrbracket)$  について、 $\vdash_{\text{PA}} \neg S$  とすると、 $\vdash_{\text{PA}} \neg S \rightarrow \neg \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket)$ 。よって、 $\vdash_{\text{PA}} \neg \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket)$ 。1. 1 より、 $\vdash_{\text{PA}} S$  で矛盾。従って、 $\vdash_{\text{PA}} \neg S$ 。つまり、 $\vdash_{\text{PA}} S \leftrightarrow \neg \text{Bew}(\llbracket S \rrbracket)$  ならば、 $\vdash_{\text{PA}} S$ かつ(付加条件のもとに)  $\vdash_{\text{PA}} \neg S$ 。(第一不完全性定理)

$\text{Con}$  を  $\neg \text{Bew}(\ulcorner \perp \urcorner)$  ( $\perp$  は矛盾式) とすると、第二不完全性定理は  $\vdash_{\text{PA}} \text{Con}$  と表わされる。前と同様に  $F()$  に  $\neg \text{Bew}(\ulcorner \top \urcorner)$  を考える。(I) より、 $\vdash_{\text{PA}} \perp \rightarrow S \implies \vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\ulcorner (\perp \rightarrow S) \urcorner)$ 。(II) から、 $\vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\ulcorner \top \urcorner) \rightarrow \text{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$ 。よって、 $\vdash_{\text{PA}} S \rightarrow \neg \text{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$  ならば、 $\vdash_{\text{PA}} S \rightarrow \text{Bew}(\ulcorner \top \urcorner)$ 。逆に (II) より、 $\vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow \text{Bew}(\ulcorner \text{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \urcorner)$ 。(I), (III) から、 $\vdash_{\text{PA}} S \leftrightarrow \neg \text{Bew}(\ulcorner S \urcorner)$  を使うと、 $\vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow \text{Bew}(\ulcorner \neg S \urcorner)$ 。(I), (III) より、 $\vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow \text{Bew}(\ulcorner \neg S \wedge S \urcorner)$  で、これは  $\vdash_{\text{PA}} \text{Bew}(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow \text{Bew}(\ulcorner \top \urcorner)$  を含意する。対偶をとり、前の結果と結びつけると、 $\vdash_{\text{PA}} S \leftrightarrow \neg \text{Bew}(\ulcorner \top \urcorner)$ 、つまり、 $\vdash_{\text{PA}} S \leftrightarrow \text{Con}$ 。ところで  $\vdash_{\text{PA}} S$  であったから、 $\vdash_{\text{PA}} \text{Con}$ 。

これらの証明をみると、 $\text{Bew}(\ulcorner \top \urcorner)$  は PA の述語であり、今これを  $\square$  (様相論理の必然性を表わす結合子) で置き換える、導出条件を書き直してみると、(I)  $\vdash_{\text{PA}} S \implies \vdash_{\text{PA}} \square(\ulcorner S \urcorner)$  (II)  $\vdash_{\text{PA}} \square(\ulcorner (S \rightarrow S') \urcorner) \rightarrow (\square(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow \square(\ulcorner S' \urcorner))$  (III)  $\vdash_{\text{PA}} \square(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow \square(\ulcorner \square(\ulcorner S \urcorner) \urcorner)$  となり、様相論理の公理に類似したものが得られる。この類似性に注目して  $\square$  を  $\text{Bew}$  で解釈したら、証明可能性のメタ構造が明瞭になるのではないか、という予想が当然生れてくる。一方、C. I. Lewis 以来の様相論理は様相に関する混乱した把握が整理されないままに種々の体系が作られてきた。(この混乱は Lewis から既に始まっている。) さらに、様相をメタ述語として解釈しようとする試みに対しては、R. Montague が次の条件を満たすような述語  $N(x)$  は PA では存在しないことを示した。<sup>(1)</sup>

- (1)  $\vdash_{\text{PA}} N(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow S$
- (2)  $\vdash_{\text{PA}} N(\ulcorner (N(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow S) \urcorner)$
- (3)  $\vdash_{\text{PA}} N(\ulcorner (S \rightarrow S') \urcorner) \rightarrow (N(\ulcorner S \urcorner) \rightarrow N(\ulcorner S' \urcorner))$
- (4)  $S$  が論理的公理ならば、 $\vdash_{\text{PA}} N(\ulcorner S \urcorner)$ 。

## 様相の証明可能性解釈

Montague の結果は  $\Box$  の syntactical な扱いを絶望視させるかにみえるが、成程 S-系についてはその通りである。 $\Box A \rightarrow A$  を公理とし、前の導出条件を満たすようにすると、Montague の結果によって  $\Box$  を Bew と解釈することは不可能になるからである。そこで  $\Box A \rightarrow A$  を公理としない K-系について解釈の可能性を探った結果、Solovay による次の（翻訳に関する）完全性が得られた。<sup>(2)</sup>  $\phi$  を文記号から PA の文への関数とし、様相文  $A$  の翻訳  $A^\phi$  を次のように定義する。

- (1)  $\perp^\phi = \perp$
- (2)  $P^\phi = \phi(P)$
- (3)  $(A \rightarrow B)^\phi = (A^\phi \rightarrow B^\phi)$
- (4)  $(\Box A)^\phi = \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil)$

そして、G を K に  $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$  を加えた様相系とすると、(Solovay の完全性定理) 任意の様相文  $A$  について、 $\vdash_G A \Leftrightarrow \forall \phi (\vdash_{PA} A^\phi)$ 。

こうして G の定理を詳しく調べることで Bew の構造を遠隔的に把握することが可能となった訳であるが、このような方向は Solovay 以前の A. Macintyre, H. Simmons に既に現われており、そこでは 1. 1, 1. 2 の補題が成立しない理論（彼らは suitable theory と呼ぶ）を基礎にして考察されている。<sup>(3)</sup>

又、応用として反影原理 (reflexion principle), 不動点 (fixed point) の一意的存在がイタリアの普遍代数学者のグループ (R. Magari, Bernardi, Sambin ら), de Jongh, C. Smorynski 等によって研究されている。<sup>(4)</sup>

以上が簡単な経緯であるが、本稿では、G. Boolos の ‘The Unprovability of Consistency’ を参考にしながら、Macintyre と Simmons が考察した suitable theories についての様相的関係を明らかにし、そのモデルの持つ位相的性質の幾つかを証明したい。さらに、他の様相系との関係をも明らかにしてみたい。

## 2. K4, S4 と Suitable Theory.

Macintyre と Simmons は導出条件 (I), (II) と,

$$(IV) \text{ Bew}(\lceil S \rceil) \implies \vdash_{\mathbf{T}} S \rightarrow \text{Bew}(\lceil S \rceil)$$

を満たす理論  $T$  を suitable theory と呼んだ (Macintyre & Simmons, 以後 S—理論と呼ぶ). どのような様相系の翻訳が S—理論に対して完全か, という問い合わせ Solovay の結果から出てくるが, Solovay の証明方法をみると  $\vdash_{\mathbf{PA}} A^\phi \implies \vdash_{\mathbf{G}} A$  の証明に於て, Kripke モデルの算術的形式化が核心となっている. そこでは PA の対角線の補題が本質的には用いられており, それが成立していない S—理論の場合には Solovay の証明を応用することはできない. そこで, Löb の定理の様相的対応のない様相系 K4 を考え, 次のことと仮定する.<sup>(5)</sup>

$$(*) \quad \vdash_{\mathbf{T}} S^\phi \implies \vdash_{\mathbf{K}_4} S$$

(ここで  $\phi$  は 1 での翻訳.) 以後, この条件を満たす  $T$  を suitable theory と呼ぶことにする. ここで K4 は次の公理を満たし, 代入, Modus Ponens, Necessitation の規則を持つ系である.

(1) Tautology

(2)  $\Box(A \rightarrow A') \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box A')$

(3)  $\Box A \rightarrow \Box \Box A$

K4 に (4)  $\Box A \rightarrow A$  を加えた系が S4 である. ここで証明したいことは Boolos [1] の p. 161 の内容が S—理論と K4 の間にも成立することである. すなわち,

(定理 2. 1)

(1)  $\vdash_{\mathbf{S}_4} A$

(2)  $A$  はあらゆる反射的かつ推移的なモデルで妥当である.

(3)  $\vdash_{\mathbf{K}_4} {}^t A$

(4)  $A$  のあらゆる真理翻訳は S—理論  $T$  の定理である.

## 様相の証明可能性解釈

上の(1)～(4)は互いに同等である。

定理 2. 1 の証明のために幾つかの定義と補題が必要である。<sup>(7)</sup>

(定義 2. 2)

真理翻訳  ${}^\phi A$  は様相文  $A$  から  $S$ —理論  $T$  の文への関数で次の条件を満たすものである。

$${}^\phi \perp = \perp$$

$${}^\phi p = \phi(p)$$

$${}^\phi(A \rightarrow B) = ({}^\phi A \rightarrow {}^\phi B)$$

$${}^\phi(\Box A) = (\text{Bew}(\Gamma {}^\phi A)) \wedge {}^\phi A$$

(ここで Bew は  $S$ —理論  $T$  での述語である。)

(定義 2. 3)

様相文  $A$  から様相文  ${}^t A$  への関数で次の条件を満たすものを  $t$  とする。

$${}^t \perp = \perp$$

$${}^t p = p$$

$${}^t(A \rightarrow B) = ({}^t A \rightarrow {}^t B)$$

$${}^t(\Box A) = (\Box {}^t A \wedge {}^t A)$$

(補題 2. 4) 任意の様相文  $A$  について,

$${}^\phi A = ({}^t A)^\phi$$

証明.  $A$  の複雑さに関する帰納法を用いるが,  $A$  が  $p$ ,  $\perp$ ,  $B \rightarrow C$  の場合は明らか.  $A = \Box D$  の場合,

$$\begin{aligned} {}^\phi A &= (\text{Bew}(\Gamma {}^\phi D)) \wedge {}^\phi D \\ &= (\text{Bew}(\Gamma ({}^t D)^\phi)) \wedge ({}^t D)^\phi \quad (\text{I.H. より}) \\ &= ((\Box {}^t D)^\phi \wedge ({}^t D)^\phi) \\ &= (\Box {}^t D \wedge {}^t D)^\phi \\ &= ({}^t A)^\phi \end{aligned}$$

(補題 2. 5) 様相枠  $\langle W, R \rangle$ , それに基づくモデル  $\langle W, R, P \rangle$  について,  $R$  が反射的かつ推移的で,  $I(R) = R - \{\langle x, x \rangle | xRx\}$  とすると, 任

意の様相文  $A$  について,

$$\langle W, R, P \rangle \vDash_w A \iff \langle W, I(R), P \rangle \vDash_w {}^t A.$$

証明.  $A$  の複雑さに関する帰納法. 自明でないのは  $A = \Box D$  の場合である. この場合,

$$\begin{aligned} & \langle W, R, P \rangle \vDash_w A \\ & \iff \forall x(wRx \rightarrow \langle W, R, P \rangle \vDash_x D) \\ & \iff \forall x(wI(R)x \vee w=x \rightarrow \langle W, R, P \rangle \vDash_x D) \\ & \iff \forall x(wI(R)x \vee w=x \rightarrow \langle W, R, P \rangle \vDash_x {}^t D) \text{ (I.H. より)} \\ & \iff \langle W, I(R), P \rangle \vDash_w \Box {}^t D \wedge \langle W, I(R), P \rangle \vDash_w {}^t D \\ & \iff \langle W, I(R), P \rangle \vDash_w {}^t A. \end{aligned}$$

(補題 2. 6)

$$\vdash_{K_4} A \iff A \text{ はあらゆる推移的モデルで妥当.}$$

$$\vdash_{S_4} A \iff A \text{ はあらゆる反射的かつ推移的モデルで妥当.}$$

証明. 様相論理の適当な教科書参照.

〈定理 2. 1 の証明〉

① (4)→(3)の証明. (4)を仮定すると, 任意の  $\phi$  について,  $\vdash_T \phi A$ . 補題 2. 4 より,  $\vdash_T ({}^t A)^\phi$ . (\*) より,  $\vdash_{K_4} {}^t A$ .

② (1)→(4)の証明.  $\exists \phi (\vdash_T \phi A)$  と仮定. 補題 2. 4 より,  $\vdash_T ({}^t A)^\phi$ . (\*) より  $\vdash_{K_4} {}^t A$ . よって, 補題 2. 6 よりある推移的モデルがあって,  $\exists w \in W (\langle W, I, P \rangle \vDash_w {}^t A)$ .  $R = I \cup \{(x, x) | x \in W\}$  とすると,  $\langle W, R \rangle$  は反射的かつ推移的となり, 補題 2. 5 より,  $\exists w \in W (\langle W, R, P \rangle \vDash_w A)$ .

補題 2. 6 より  $\vdash_{S_4} A$ .

③ (3)→(2)の証明.  $\vdash_{K_4} {}^t A$  とする. 補題 2. 6 より, 推移的モデル  $\langle W, I, P \rangle$  について,

$$\langle W, I, P \rangle \vDash_w {}^t A.$$

よって, 補題 2. 5 より,  $\langle W, R, P \rangle \vDash_w A$ . (ここで  $R = I \cup \{(x, x) | x \in W\}$ ) 補題 2. 6 より (2)→(1)も得られる. 以上で (4)→(3)→(2)→(1)→(4).

## 様相の証明可能性解釈

$G$  は PA の証明可能性に対応しているが, PA の標準モデルで真になる命題について考えられたのが  $G^*$  である.  $G^*$  は  $G$  の公理に  $\Box A \rightarrow A$  を加え, Necessitation の規則を除いた様相系であり,  $\vdash_G A^* \iff \vdash_{G^*} A$  が成立する (ここで  $A^*$  は  $\wedge \{\Box C \rightarrow C \mid \Box C \text{ は } A \text{ の部分論理式}\} \rightarrow A$  を表わす.). この関係とモデルについての結果を合わせた Boolos の結果は K4, K4\* についても成立する.

(定義 2. 7)  $M = \langle W, R, P \rangle$  とし,  $w \in W, i$  を自然数とする. 次のように  $M \vDash_w^{(i)} A$  を定義する ( $M \vDash$  は  $\models$  と略す.).

$$\vDash_w^{(i)} \perp$$

$$\vDash_w^{(i)} p \iff \vDash_w p$$

$$\vDash_w^{(i)} (A \rightarrow B) \iff \vDash_w^{(i)} A \text{ 又は } \vDash_w^{(i)} B$$

$$\vDash_w^{(i)} \Box A \iff \forall x (w R x \rightarrow \vDash_x A) \wedge \forall j < i (\vDash_w^{(j)} A)$$

(定義 2. 8) 様相文  $A$  について,  $n(A)$  を次のように定義する.

$$n(\perp) = n(p) = 0$$

$$n(A \rightarrow B) = \max(n(A), n(B))$$

$$n(\Box A) = n(A) + 1$$

(定義 2. 9) (1)  $\vDash_w^* A \iff \exists i \forall j \geq i (\vDash_w^{(j)} A)$

$\vDash_w^* A$  は ‘ $A$  は  $w$  で結局真になる’ と読める.

(2)  $A$  は  $M$  で結局妥当  $\iff \forall w \in W (\vDash_w^* A)$

(定理 2. 10) 任意の様相文  $A$  について, 次のこととは同等である.

(1)  $\vdash_{K4^*} A$

(2)  $A$  はすべての推移的モデルで結局妥当

(3)  $\vdash_{K4} A^*$

証明. (3)  $\rightarrow$  (1) は明らか. 何故なら  $\vdash_{K4^*} \Box C \rightarrow C$ . (1)  $\rightarrow$  (2) を証明しよう.

$\vdash_{K4^*} A$  と仮定する.  $G^*$  の証明に関する帰納法による.  $A$  が tautology 又は  $\Box(B \rightarrow C) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box C)$  の場合は定義から明らか.  $A$  が  $\Box B \rightarrow B$  のとき,  $\forall j \geq n(A) (\vDash_w^{(j)} A)$  又は  $\forall j \geq n(A) (\vDash_w^{(j)} A)$ . しかし, もし後者の場

合が成立するなら、 $j=n(A)$  に対して  $\vDash_w^{(j)} \Box B \rightarrow B$  で、 $\vDash_w^{(j)} B$ ,  $\vDash_w^{(j+1)} \Box B$  よって、 $\vDash_w^{(j+1)} \Box B \rightarrow B$ 、つまり、 $\vDash_w^{(j+1)} A$ 。従って、K4\* の公理はすべて推移的モデルで結局妥当になる。又、 $A$  と  $A \rightarrow B$  が推移的モデルで結局妥当になるならば、明らかに  $B$  も結局妥当になる。よって、K4\* の定理はすべて結局妥当。 $(1) \rightarrow (2)$  が証明できた。

次に $(2) \rightarrow (3)$ を証明しよう。 $\vdash_{\text{K4}} A^*$  と仮定する。補題 2.6 より、ある推移的モデルがあって、ある  $w \in W$  について、 $\vDash_w A$ 。示さねばならないのは  $\vDash_w^* A$  である。ここで  $\vDash_w A^*$  より、 $\vDash_w A$  で  $A$  のどんな部分論理式  $\Box C$  についても  $\vDash_w \Box C \rightarrow C$  であるから、

(a)  $A$  のすべての部分論理式  $B$  について、

$$\vDash_w^{(i)} B \Leftrightarrow \vDash_w^{(o)} B \quad (\text{任意の } i)$$

(b)  $A$  のすべての部分論理式  $\Box C$  について、

$$\vDash_w^{(i)} \Box C \rightarrow C$$

が示されれば、 $\vDash_w A \Leftrightarrow \vDash_w^{(o)} A$  と (a) より  $\forall i (\vDash_w^{(i)} A)$  で定義 2.9 より  $\vDash_w^* A$ 。 $i$  に関する帰納法で (a), (b) を証明しよう。 $i=0$  のとき、(a) は明らか。 $\Box C$  が  $A$  の部分論理式なら、 $\vDash_w \Box C \rightarrow C$  であるから、 $\vDash_w^{(o)} \Box C \rightarrow C$ 、従って (b) も成立。そこで (a), (b) を  $i$  について成立すると仮定。 $B$  の複雑さについての帰納法で (a) が  $(i+1)$  について成立することを示そう。明らかでない場合は  $B = \Box C$  のときである。 $\vDash_w^{(i)} \Box C$  と仮定。すると  $\forall j < i$  ( $\vDash_w^{(j)} C$ ),  $wRx$  なるすべての  $x$  について  $\vDash_x C$ 。又 (b) より  $\vDash_w^{(i)} C$ 。よって、 $\vDash_w^{(i+1)} \Box C$ 。逆に、もし  $\vDash_w^{(i+1)} \Box C$  なら、 $\vDash_w^{(i)} \Box C$ 。従って、 $\vDash_w^{(i+1)} \Box C \Leftrightarrow \vDash_w^{(i)} \Box C$ 。(a) について帰納法の仮定より  $i$  について成立しているから、 $(i+1)$  についても (a) は成立。又、(b) については  $\Box C$  が  $A$  の部分論理式であれば、 $C$  もそうであり、従って (a) から、 $(i+1)$  に対して  $\vDash_w^{(i+1)} \Box C \Leftrightarrow \vDash_w^{(o)} \Box C$ かつ  $\vDash_w^{(i+1)} C \Leftrightarrow \vDash_w^{(o)} C$ 。 $\vDash_w^{(o)} \Box C \rightarrow C$  であったから、 $\vDash_w^{(i+1)} \Box C \rightarrow C$ 。これは  $(i+1)$  に対して (b) が成立することを示している。これで (a), (b) の成立することが示され、従って、 $(2) \rightarrow (3)$  が示された。以上

で(1), (2), (3)の同等性の証明が完成した.

ここで  $K4^*$  と  ${}^tA$  の関係については次の定理が成立する.<sup>(10)</sup>

(定理 2. 11) 任意の様相文  $A$  について,

$$\vdash_{K4} {}^t A \Leftrightarrow \vdash_{K4^*} {}^t A$$

証明.  $\Rightarrow$  は明らか. 何故なら  $\vdash_{K4} {}^t A \Leftrightarrow {}^t A$  は任意の  $\phi$  について  $T$  で証明可能 (定理 2. 1),  $\vdash_{K4^*} {}^t A \Leftrightarrow {}^t A$  は任意の  $\phi$  について  $T$  で真 ((\*) の仮定のもとに Solovay 流に証明可能), であり, 証明可能ならば真であるから  $\Rightarrow$  が得られる.  $\Leftarrow$  を示す.  $\vdash_{K4^*} {}^t A$  と仮定.  $M = \langle W, R, P \rangle$  を反射的かつ推移的モデルとすると定理 2. 10 より,  ${}^t A$  は  $M$  で結局妥当. すなわち,  $\forall w \in W (\vDash_w^* A)$ . 示さねばならないのは,  $\forall w \in W (\vDash_w {}^t A)$ . このためには, 任意の文  $B$  について,

$$\vDash_w^{(i+1)t} B \Leftrightarrow \vDash_w^{(i)t} B$$

を示せばよい.  $\vDash_w^* A$  より, 充分大きな  $i$  について,  $\vDash_w^{(i)t} A$ . 前の定理の証明中の(a)より,  $\vDash_w^{(o)t} A$ , つまり,  $\vDash_w {}^t A$  となって定理は証明される.

さて, 上の  $\Leftrightarrow$  の証明は  $B$  の複雑さに関する帰納法による. ここでも自明でないのは  $B = \Box C$  の場合だけである. この場合, 帰納法の仮定から,  $\vDash_w^{(i+1)t} C \Leftrightarrow \vDash_w^{(i)t} C$ . 定義 2. 7 より  $\vDash_w^{(i+1)} \Box^t C \Leftrightarrow \vDash_w^{(i)} \Box^t C \wedge {}^t C$ .  $t$  の定義より  $\vDash_w^{(i+1)} \Box^t C \wedge {}^t C \Leftrightarrow \vDash_w^{(i+1)t} (\Box C)$ . 又,  $\vDash_w^{(i+1)} \Box^t C \wedge {}^t C \Leftrightarrow \vDash_w^{(i+1)} \Box^t C \wedge \vDash_w^{(i+1)t} C \Leftrightarrow (\vDash_w^{(i)} \Box^t C \wedge {}^t C) \wedge \vDash_w^{(i)t} C \Leftrightarrow \vDash_w^{(i)t} (\Box C)$ . よって上の  $\Leftrightarrow$  は証明できる.

以上のことから  $G$  と PA の関係が, K4 と S-理論の間にも成立することがわかった. 翻訳に関しては, 自己言及命題が Gödel 化からほとんど必然的に構成できることを考えれば S-理論の持つ意味は余り重要とは思われない. が, Bew の位相的構造を考える際には G であっても K4 であっても本質的な変りはない. むしろ位相構造の決定は K4 においてなされといつてよいであろう.

### 3. Bew, $\square$ , と位相

$S4$  の  $\square$  と開核作用子  $I$  そして  $I$  と双対な閉包作用子  $C$  の間には共通の構造があり、それに着目したのが McKinsey と Tarski であった (McKinsey & Tarski). 又、定理 2.1 は PA の場合  $\vdash_{S4\text{Grz}} A \Leftrightarrow \vdash_{\mathfrak{A}^t} A$  (Boolos [3]) となるが、 $S4\text{Grz}$  の位相構造は Grzegorezyk によって研究された (Grzegorezyk). いずれの場合も  $\square A \rightarrow A$  が成立する故に、いわば直接位相を導入することが可能であった。K4 に直接位相を導入する代りに  $S4$  の位相構造を手がかりに K4 の構造を探ってみることにする。

様相枠  $\langle W, R \rangle$  ( $W$  を  $R$  の field とする.) とその代数,

$$\mathcal{A}(W, R) = \langle \mathcal{P}(W), \cup, \cap, -, C \rangle$$

(ここで  $\mathcal{P}(W)$  は  $W$  の巾集合、 $\langle \mathcal{P}(W), \cup, \cap, - \rangle$  は  $W$  の部分集合のブール代数) を考える。 $CX = \{y \mid \exists x \in X (yRx)\}$  とする。 $R$  が反射的かつ推移的ならば、

$$(1) \quad X \subseteq CX, \quad (2) \quad C(X \cup Y) = CX \cup CY,$$

$$(3) \quad CCX = CX, \quad (4) \quad CO = O \quad (O \text{ は空集合}),$$

を満たすことは  $C$  の定義から明らかであろう。すなわち、 $C$  は閉包作用子となる。このことから  $S4$  の位相的モデルが作られるることはよく知られている。が、 $R$  が推移的ではあるが反射的でない場合、つまり K4 の様相枠の場合には上述のようにはいかない。例えば、反射的でない故、 $X \subseteq CX$  が成立しないのである。

(定義 3.1) 任意の様相文に対して  $\mathcal{A}(W, R)$  への関数  $e$  を次のように定義する。

$$e(\perp) = O$$

$$e(p) = X \quad (X \in \mathcal{P}(W))$$

$$e(A \rightarrow B) = -e(A) \cup e(B)$$

## 様相の証明可能性解釈

$$e(\square A) = \tau(e(A))$$

\*  $e$  は 2 節のモデル  $\langle W, R, P \rangle$  の  $P$  に対応している。

ここで,  $\models_w A \iff w \in e(A)$  と定義すれば強制関係 (forcing relation) が得られるが,

$$\models_w \square A \iff \forall x(wRx \rightarrow \models_x A)$$

を考慮するなら, 定義 3. 1 の  $e(\square A) = \tau(e(A))$  は,

$$w \in \tau(e(A)) \iff \forall x(wRx \rightarrow x \in e(A))$$

となる。  $R$  の推移性から次の補題が得られる。

(補題 3. 2)

$$(1) \quad \tau W = W$$

$$(2) \quad \tau(X \cap Y) = \tau X \cap \tau Y$$

$$(3) \quad \tau X \subseteq \tau \tau X$$

証明. (1)  $W$  は  $R$  の field であるから  $w \in W \wedge wRx \rightarrow x \in W$ , つまり,  $w \in \tau W$ . (2)  $w \in \tau(X \cap Y) \iff \forall x(wRx \rightarrow x \in X \cap Y) \iff \forall x(wRx \rightarrow x \in X) \wedge \forall x(wRx \rightarrow x \in Y) \iff w \in \tau X \cap \tau Y$ . (3)  $w \in \tau X \wedge wRx \wedge xRy \implies wRy \wedge y \in X$ . よって,  $wRx \wedge xRy \rightarrow y \in X$ , つまり,  $w \in \tau \tau X$ .

ここで注意しておきたいのは,  $\tau O = O$ ,  $\tau(X \cup Y) = \tau X \cup \tau Y$ ,  $\tau X = \tau \tau X$  が成立しない点である。  $R$  が反射的であれば,  $\tau O = O$ ,  $\tau X = \tau \tau X$  が成立し,  $\tau$  が開核作用子の条件を満たすことになる。

補題 3. 2 の(1), (2), (3)の双対的な関係,

$$(1)' \quad \sigma O = O$$

$$(2)' \quad \sigma(X \cup Y) = \sigma X \cup \sigma Y$$

$$(3)' \quad \sigma \sigma X \subseteq \sigma X$$

を満たす  $\sigma$  が考えられる。このような作用子を定義するには定義 3. 1 の関数  $e$  の定義を  $\square A$  の部分についてのみ違えればよい。上,  $p$ ,  $A \rightarrow B$  については  $e$  と同じ  $e'$  で,

$$e'(\square A) = -\tau(-e(A))$$

とし,  $\sigma X = -\tau - X$  とする. 補題 3. 2 から (1)', (2)', (3)' は容易に得られる.

(補題 3. 3)  $\mathcal{A}(W, R)$  において,  $\mathbf{C}, \mathbf{I}$  をそれぞれ閉包, 開核作用子とすると,

$$\mathbf{I}X = \tau X \cap X$$

$$\mathbf{C}X = \sigma X \cup X$$

となる.

証明. 双対的であるので  $\mathbf{I}X$  の場合についてのみ証明する. 開核作用子の条件 (前述の閉包作用子の条件(1)~(4)の双対) を満たすかどうか調べればよい.  $\mathbf{I}X \subseteq X$  は明らか.  $\mathbf{I}W = \tau W \cap W = W \cap W = W$  より,  $\mathbf{I}W = W$ .  $\mathbf{I}(X \cap Y) = \tau(X \cap Y) \cap (X \cap Y) = \tau X \cap \tau Y \cap X \cap Y = \mathbf{I}X \cap \mathbf{I}Y$ .  $\mathbf{I}IX = \tau(\tau X \cap X) \cap \tau X \cap X = \tau\tau X \cap \tau X \cap \tau X \cap X = \tau X \cap X = \mathbf{I}X$ . よって,  $\mathbf{I}$  は開核作用子となる.

これで  $R$  が推移的な場合の  $\mathcal{A}(W, R)$  への位相の導入が可能となるが, 様相枠での  $\mathbf{I}X$  は,

$$x \in \mathbf{I}X \iff \forall y(x \in X \wedge (xRy \rightarrow y \in X))$$

である. ここで  $R$  が反射的であれば,  $xRx$  より  $x \in X$  が得られるので,

$$x \in \mathbf{I}X \iff \forall y(xRy \rightarrow y \in X) \quad (\text{A})$$

となり, 通常の  $\mathbf{I}X$  と同じになる.

逆に  $R$  が既に反射的かつ推移的な  $\mathcal{A}(W, R)$ , つまり S4 のモデルとなっている場合,  $\tau, \sigma$  はどのように定義されるのであろうか.  $\tau$  については次の補題が成立する.

(補題 3. 4)  $\mathcal{A}(W, R)$  で  $\mathbf{I}$  が開核作用子の時,

$$x \in \tau' X \iff x \in \mathbf{I}(X \cup \{x\})$$

と定義すると,  $\tau'$  は補題 3. 2 の(1), (2), (3)を満たし,  $\mathbf{I}X = \tau' X \cap X$  となる.

証明. 任意の  $x \in W$  について,  $W = W \cup \{x\}$  かつ  $\mathbf{I}W = W$  より,

## 様相の証明可能性解釈

$W \cup \{x\} = \mathbf{I}(W \cup \{x\})$ . よって  $x \in \mathbf{I}(W \cup \{x\})$  となり(1)が成立. (2)は

$$\begin{aligned} & x \in \tau'(X \cap Y) \\ \iff & x \in \mathbf{I}((X \cap Y) \cup \{x\}) \\ \iff & x \in \mathbf{I}(X \cup \{x\}) \cap \mathbf{I}(Y \cup \{x\}) \\ \iff & x \in \tau' X \cap \tau' Y \end{aligned}$$

で、成立.  $x \in \mathbf{I}(X \cup \{x\})$  ならば、 $x \in \mathbf{II}(X \cup \{x\})$ .  $\mathbf{II}(X \cup \{x\}) \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{I}(X \cup \{x\}) \cup \{x\})$  より、 $x \in \tau' \tau' X$ . よって(3)も成立.

$x \in \mathbf{I}X$  ならば、 $x \in X$ .  $\mathbf{I}X \cup \mathbf{I}\{x\} \subseteq \mathbf{I}(X \cup \{x\})$ . よって  $x \in \mathbf{I}X$  ならば、 $x \in \mathbf{I}(X \cup \{x\})$ . まとめて、 $x \in \mathbf{I}X \rightarrow x \in \tau' X \cap X$ . つまり、 $\mathbf{I}X \subseteq \tau' X \cap X$ . 逆に  $x \in \tau' X \cap X$  とすると、 $X = X \cup \{x\}$  より  $\tau' X = \mathbf{I}(X \cup \{x\}) = \mathbf{I}X$ . よって、 $x \in \mathbf{I}X$ . 故に  $\mathbf{I}X = \tau' X \cap X$ .

この補題での  $\tau'$  を  $\mathcal{A}(W, R)$  で考えてみると、 $R$  が反射的であるから (A) より、

$$x \in \mathbf{I}(X \cup \{x\}) \iff \forall y(xRy \rightarrow y=x \vee y \in X)$$

が得られる. すなわち、

$$x \in \tau' X \iff \forall y(xRy \wedge x \neq y \rightarrow y \in X)$$

となり、この右辺は補題 2. 5 での  $I(R) = R - \{(x, x) | xRx\}$  を用いると、 $\forall y(xI(R)y \rightarrow y \in X)$  となる.  $I(R)$  は反射的ではないから、定義 3. 1 の  $e(\square A)$  の定義と一致する.

今までのことをまとめると、

(定理 3. 5)

$\langle W, R, P \rangle$  について、 $e(p) = \{p | P(p) \text{ が真}\}$ ,  $X, Y \in \mathcal{P}(W)$  について、 $XR'Y$  を  $e^{-1}(X)Re^{-1}(Y)$  とすると、

$$A \text{ が } \langle W, R, P \rangle \text{ で真} \iff e(A) = W$$

となり、

(1)  $R$  が推移的ならば、 $e(\square A) = \tau(e(A))$

(2)  $R$  が反射的かつ推移的ならば、 $e(\square A) = \mathbf{I}(e(A))$

(ここで  $\mathbf{I}X = \tau X \cap X$ )

以上の関係を  $S$ —理論での  $\text{Bew}$  と結びつけるとどうなるであろうか。  
 $\phi$  を  $K4$  から  $S$ —理論  $T$  の文への翻訳とすると,  $\vdash_{K4} A \leftrightarrow \vdash_T A^\phi$  であつた. そこで様相文  $A$  について,

$$\tau(e(A)) = e(\text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil)^{\phi-1}) \quad (\text{B})$$

とおくと,  $\text{Bew}$  の位相的性質が得られるであろう.

(補題 3.6)  $\tau$  を (B) で定義すると  $\tau$  は補題 3.2 の(1), (2), (3) の性質を満たし,

$$\mathbf{I}(e(A)) = e((\text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil)^{\phi-1}) \wedge A)$$

$$\mathbf{C}(e(A)) = e((\text{Bew}(\lceil \neg A^\phi \rceil)^{\phi-1}) \rightarrow A)$$

となる.

証明. 等式 (B) からほどんど明らかであるが, 証明可能性の導出条件と結びつけて考えてみよう.  $\vdash_T \top$  より  $\vdash_T \text{Bew}(\lceil \top \rceil)$ . よって,  $\vdash_T \tau(e(\top)) = e(\text{Bew}(\lceil \top \rceil)^{\phi-1}) = W$ . つまり,  $\tau W = W$ .  $\tau(e(A \wedge B)) = e(\text{Bew}(\lceil A^\phi \wedge B^\phi \rceil)^{\phi-1}) = e(\text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil)^{\phi-1} \wedge \text{Bew}(\lceil B^\phi \rceil)^{\phi-1}) = e(\text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil)^{\phi-1}) \cap e(\text{Bew}(\lceil B^\phi \rceil)^{\phi-1}) = \tau(e(A)) \cap \tau(e(B))$ . 又, 導出条件 (IV) より,  $\vdash_T \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil) \rightarrow \text{Bew}(\lceil \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil) \rceil)$ .  $-e(\text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil)^{\phi-1}) \cup e(\text{Bew}(\lceil \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil) \rceil)^{\phi-1}) = W$ . 従って,  $\tau(e(A)) \subseteq \tau\tau(e(A))$ .  $\mathbf{I}(e(A))$  は定義から明らか. 又,  $C(e(A)) = -\mathbf{I}-(e(A))$  より,  $C(e(A)) = e((\neg \text{Bew}(\lceil \neg A^\phi \rceil)^{\phi-1}) \cup e(A) = e(\text{Bew}(\lceil \neg A^\phi \rceil)^{\phi-1} \rightarrow A)$ .

さて  $\sigma$  については (B) に対応する等式をどのように決められるであろうか.  $\sigma X = -\tau - X$  であるから,

$$\sigma(e(A)) = e((\neg \text{Bew}(\lceil \neg A^\phi \rceil))^{\phi-1}) \quad (\text{C})$$

となる. (B) と (C) は双対的であるから補題 3.6 に双対的な性質が成立し,  $\mathbf{I}(e(A))$  と  $\mathbf{C}(e(A))$  は補題 3.6 と一致する. Simmons は (C) を用いて  $\mathbf{C}X$  を定義した (Simmons) が,  $\langle W, R \rangle$ ,  $\mathcal{A}\langle W, R \rangle$  をもとにして位相を導入する際は本稿の結果と全く双対的な結果が成立する. ところ

## 様相の証明可能性解釈

で、補題 3. 4 で  $\tau X = \{x | x \in I(X \cup \{x\})\}$  としたが、 $\sigma$  の場合はどのような定義となるだろうか。 $\tau X$  の定義の双対を考えると、

$$\begin{aligned} x \in \sigma X &\iff x \in -\tau - X \\ &\iff x \in -I(-X \cup \{x\}) \\ &\iff x \in C(-X \cup \{x\}) \\ &\iff x \in C(X - \{x\}) \end{aligned}$$

であるから、 $\sigma X = \{x | x \in C(X - \{x\})\}$  となる。すなわち、 $\sigma X$  は  $X$  の導集合であり、 $x \in \sigma X$  は  $X$  の集積点なのである。従って、系として、 $\mathcal{A}(W, R)$ において、 $\sigma X$  は  $X$  の導集合であり、 $\tau X$  はそれと双対的な集合である。

こうして  $\tau$ 、 $\sigma$  いずれを用いても位相が導入でき、そこで  $I$ 、 $C$  は同じものとなることがわかった。これらのことと非形式的に表現するならば、次のように要約できるであろう。

(I)  $K4$  に位相を導入しようとすれば、その様相枠  $\langle W, R \rangle$ 、又は  $\mathcal{A}\langle W, R \rangle$  を考え、

$$x \in \tau X \iff \forall y(xRy \rightarrow y \in X)$$

で  $\tau X$  を定義し、 $IX = \tau X \cap X$  とすればよい。あるいは双対的に、

$$x \in \sigma X \iff \exists y(xRy \wedge y \in X)$$

で  $\sigma X$  を定義し、 $CX = \sigma X \cup X$  とすればよい。

(II)  $S4$  に導入されている位相構造の中での  $K4$  の  $\square$  の解釈は、定義 2. 3 での  ${}^t(\square A) = (\square {}^t A \wedge {}^t A)$  とはいわば逆に、

$$x \in \tau X \iff x \in I(X \cup \{x\})$$

$$x \in \sigma X \iff x \in C(X - \{x\})$$

として与えられる。 $S4$  の  $\diamond$  を位相空間での閉集合とすると、 $K4$  の  $\diamond$ <sup>(11)</sup> は導集合に対応することになる。

(III)  $S$ -理論での  $Bew$  という述語は  $K4$  での  $\square$  に対応し、従って、 $\mathcal{A}(W, R)$  での  $\tau$  に対応する。 $PA$  での  $Bew$  も同様に  $\tau$  に対応する。これは  $G$  の公理  $\square(\square A \rightarrow A) \rightarrow \square A$  が位相の導入には用いられない

からである。一方  $\sigma$  は K4, G でそれぞれ  $\neg \text{Bew}(\neg \perp)$  に対応することになる。

#### 4. 位相的諸性質

$\tau O=O$  とすると、 $-\tau O=W$  となり、これを PA で考えると、 $\vdash_{\text{PA}} \neg \text{Bew}(\neg \perp)$  となる。 $\vdash_{\text{PA}} \neg \text{Bew}(\neg \perp) \leftrightarrow \text{Con}$  であり、 $\vdash_{\text{PA}} (\text{Bew}(\neg \perp) \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg \text{Bew}(\neg \perp)$  であったから、第二不完全性定理 ( $\not \vdash_{\text{PA}} \text{Con}$ ) より、 $\not \vdash_{\text{PA}} \neg \text{Bew}(\neg \perp)$ 、又は Löb の定理から  $\not \vdash_{\text{PA}} \neg \text{Bew}(\neg \perp)$  を得る。すなわち PA に対応する  $\mathcal{A}(W, R)$  では  $\tau O \neq O$ 、双対的に  $\sigma W \neq W$ 。従って、 $W - \sigma W \neq O$ 。 $x \in W - \sigma W$  は  $W$  の孤立点であったから、不完全性定理又は Löb の定理が成立すれば、 $\mathcal{A}(W, R)$  は孤立点を持つことになる。この例からみてもわかるように、S-理論と PA, K4 と G, それとの間には幾つかの興味ある位相的対応がある。それらのうちの幾つかをここで調べてみることにする。

(定義 4. 1)

- (1)  $x \in \text{Is}(X) \iff x \in \tau X - X$   
 $x \in \text{Is}'(X) \iff x \in X - \sigma X$
- (2)  $L = \{x | x \in \mathbf{I}(X \cup \{x\})\}$   
 $L' = \{x | x \in \mathbf{C}(W - \{x\})\}$
- (3)  $\mathcal{A}(W, R)$  は双離散  $\iff \tau W = O$   
 $\mathcal{A}(W, R)$  は離散  $\iff \sigma W = O$
- (4)  $X$  が双自己稠密  $\iff \tau X - X = O$   
 $X$  が自己稠密  $\iff X - \sigma X = O$
- (5)  $X$  が双完全  $\iff X = \tau X$   
 $X$  が完全  $\iff X = \sigma X$
- (6)  $X$  が双分散  $\iff \neg \exists Y(Y \neq O \wedge Y \subset X \wedge \tau Y \subseteq Y)$   
 $X$  が分散  $\iff \neg \exists Y(Y \neq O \wedge Y \subset X \wedge Y \subseteq \sigma Y)$

## 様相の証明可能性解釈

(補題 4.2)  $S$ —理論  $T$  の文  $A^\phi$  について,

$$(1) \vdash_T A^\phi \rightarrow \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil)$$

$\Leftrightarrow e(A)$  が開集合

$$(2) \vdash_T \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil) \rightarrow A^\phi$$

$\Leftrightarrow e(A)$  が双自己稠密.

証明. (1)  $e(A)$  が開集合

$$\Leftrightarrow e(A) = \tau(e(A)) \cap e(A)$$

$$\Leftrightarrow e(A) \subseteq \tau(e(A))$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{K_4} A \rightarrow \Box A$$

$$\Leftrightarrow \vdash_T A^\phi \rightarrow \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil)$$

(2)  $e(A)$  が双自己稠密

$$\Leftrightarrow \tau(e(A)) \subseteq e(A)$$

$$\Leftrightarrow \vdash_{K_4} \Box A \rightarrow A$$

$$\Leftrightarrow \vdash_T \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil) \rightarrow A^\phi$$

この補題の(1)は  $T$  で  $\text{Bew}(\lceil \cdot \rceil)$  が  $\vdash_T \text{Bew}(\lceil A \rceil) \rightarrow \text{Bew}(\lceil \text{Bew}(\lceil A \rceil) \rceil)$  となるとすれば、 $\text{Bew}(\lceil \cdot \rceil)$  は  $\mathcal{A}(W, R)$  で開集合となることを意味している。PA では  $\Sigma_1$ —文について (1) の性質が満たされているから、 $\Sigma_1$ —文は  $\mathcal{A}(W, R)$  で開集合となっている（任意の文  $A$  について  $\text{Bew}(\lceil A \rceil)$  は  $\Sigma_1$ —文であるが、(1) の性質を満たすが  $\Sigma_1$ —文でないものは存在する。<sup>(12)</sup>）。

(2) は  $A^\phi$  についての反影原理が証明できることを示しており、それが双自己稠密に対応していることを述べている。Löb の定理によれば、 $\vdash_{PA} \text{Bew}(\lceil A^\phi \rceil) \rightarrow A^\phi$  と  $\vdash_{PA} A^\phi$  は同等であるから、 $e(A)$  が開集合であり、これが任意の集合について成立することを述べている。従って反影原理が証明可能であれば、 $\mathcal{A}(W, R)$  は離散空間となり、その逆も成立する。このことを別の言い方で表現すれば、上の  $A^\phi$  に  $\perp$  を考えて、 $\vdash_{PA} \perp \Leftrightarrow e(\perp) = O = \text{IO} = \tau O$  となる。又、(1), (2)をまとめると、

$\vdash_T A^\phi \leftrightarrow \text{Bew}(\Gamma A^\phi)$   
 $\Leftrightarrow e(A)$  が開集合かつ双自己稠密  
 となり, Henkin一文の位相的表現となる.

(補題 4. 3)  $S$ -理論  $T$  の文  $A^\phi$  について,  
 $\vdash_T \text{Bew}(\Gamma A^\phi) \rightarrow A^\phi$  ならば  $\vdash_T A^\phi$

$\Leftrightarrow W$  が双分散

証明.  $W$  が双分散

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall Y(Y \neq O \wedge Y \subset W \rightarrow \tau Y \not\subseteq Y) \\ &\Leftrightarrow \forall Y(Y \neq O \rightarrow \tau Y = Y \neq O) \\ &\Leftrightarrow \forall Y(Y \neq O \rightarrow \text{Is}(Y) \neq O) \end{aligned}$$

ここで  $e(\neg A) = Y$  とすると,

$$\begin{aligned} &e(\neg A) \neq O \rightarrow \text{Is}(e(\neg A)) \neq O \\ &\Leftrightarrow e(A) \neq W \rightarrow \text{Is}(e(A)) \neq W \\ &\Leftrightarrow (\vdash_T A^\phi \Rightarrow \vdash_T \text{Bew}(\Gamma A^\phi) \rightarrow A^\phi) \\ &\Leftrightarrow (\vdash_T \text{Bew}(\Gamma A^\phi) \rightarrow A^\phi \Rightarrow \vdash_T A^\phi) \end{aligned}$$

(補題 4. 4)

$$\vdash_{PA} \text{Con} \Leftrightarrow O = \tau O$$

証明.  $\Leftarrow$  はこの節の例で証明した.  $\vdash_{PA} \text{Con}$ , つまり,  $\vdash_{PA} \neg \text{Bew}(\Gamma \perp)$  とする. これは  $\neg \tau O = W$ . すなわち,  $\tau O = O$ .

補題 4. 2 から Henkin一文の位相的表現が得られたが, 他の類似文についてはどうであろうか. それらの文をあげてみると,

(1) Gödel一文

$$\vdash_{PA} A \leftrightarrow \neg \text{Bew}(\Gamma A)$$

(2) Rogers一文

$$\vdash_{PA} A \leftrightarrow \neg \text{Bew}(\Gamma \neg A)$$

(3) Jeroslow一文

$$\vdash_{PA} A \leftrightarrow \text{Bew}(\Gamma \neg A)$$

## 様相の証明可能性解釈

である。これらはそれぞれ、算術の矛盾性、矛盾性の証明可能性、算術の矛盾性を意味している。(1), (2), (3)の位相的表現はそれぞれ、

- (1)  $e(A) \cup \tau(e(A)) = W$
- (2)  $e(A) \cup \tau(\neg e(A)) = W$
- (3)  $e(A) \cup \neg \tau(\neg e(A)) = W$

となり、Henkin一文は、

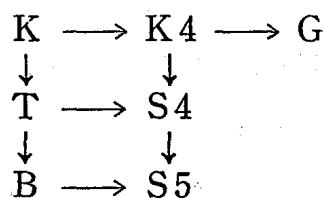
$$(4) \quad e(A) \cup \neg \tau(e(A)) = W$$

となる。この表現から、それぞれの文は  $W$  の分割の仕方の種類であることがわかる。又、(1)～(4)の様相的表現は次のようにになっている。

- (1)  $\vdash_{\text{g}} \square(p \leftrightarrow \top \square p) \rightarrow \square(p \leftrightarrow \top \square \perp)$
- (2)  $\vdash_{\text{g}} \square(p \leftrightarrow \top \square \top p) \rightarrow \square(p \leftrightarrow \square \perp)$
- (3)  $\vdash_{\text{g}} \square(p \leftrightarrow \square \top p) \rightarrow \square(p \leftrightarrow \perp)$
- (4)  $\vdash_{\text{g}} \square(p \leftrightarrow \square p) \rightarrow \square(p \leftrightarrow \top)$

## 5. K4, G と他の様相系の関係

Boolos ([1], p. 23) の図によれば、



となっている。S—理論、PA、直観主義論理、Dummett の LC (直観主義論理に  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$  を公理として加えた系) の関係を K4, S4, K4.3, S4.3, G 等の様相論理系の関係を通してみるとどのようになるのであろうか。

(1) McKinsey と Tarski ([1]) の翻訳  $T$  は  $\vdash_{\text{IC}} A \iff \vdash_{\text{S4}} T(A)$  (IC は直観主義論理) を成立させるものであった。又、様相文  $A$  について、 $\vdash_{\text{K4}} A \iff \vdash_{\text{T}} A^\#$ ,  $\vdash_{\text{K4}^\#} A \iff \vdash_{\text{S4}} A$  であったから、 $\vdash_{\text{T}} A^\# \implies \vdash_{\text{IC}} T^{-1}$

(A),  $\vdash_{\text{Tr}^{\phi}} A \Leftrightarrow \vdash_{\text{Lc}} T^{-1}(tA)$ .

(2) (1)と同じ翻訳  $T$  を用いると,  $\vdash_{\text{Lc}} A \Leftrightarrow \vdash_{S4.3} T(A)$  がわかっている (Dummett & Lemmon, p. 253, 系4).  $\vdash_{S4.3} A \Rightarrow \vdash_{S4\text{-Grz}} A$  ( $S4\text{-Grz}$  は  $S4$  に  $\Box(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A) \rightarrow A$  を加えたもので,  $\vdash_{S4\text{-Grz}} A \Leftrightarrow \vdash_G tA \Leftrightarrow A$  のすべての真理翻訳が PA の定理となる (Boolos [1])<sup>(14)</sup>) がいえれば,  $\vdash_{\text{Lc}} A \Rightarrow \vdash_{PA^{\phi}} T(A)$  が得られる. そこで  $\vdash_{S4.3} A \Rightarrow \vdash_{S4\text{-Grz}} A$  が成立するか否か考えてみよう.  $\vdash_{S4\text{-Grz}} A \Leftrightarrow \vdash_G tA$  を用いて,  $\vdash_{S4.3} A \Rightarrow \vdash_G tA$  が成立するかどうかを  $G$  についての Tree (Boolos [1] の8) で調べることができる. すなわち,  $\vdash_{S4} A \Rightarrow \vdash_G tA$  が成立しているから  $S4$  に付加される  $S4.3$  の公理,

$$\Box(\Box p \rightarrow \Box q) \vee \Box(\Box q \rightarrow \Box p) \quad (C)$$

に  $t$  を作用させた式が  $G$  で定理となるか否かを調べればよい. ただ上の公理がシェーマで書かれている場合には Tree をそのまま使う訳にはいかない. 何故なら  $t$  の作用結果がどのような式になるか具体的にわからないからである (勿論 Tree が閉じず, 従って含意しないことがシェーマに文記号を代入して得られた式について成立すれば, 結論を出すことはできる).  $\vdash_{S4.3} A \Rightarrow \vdash_G tA$  か否かは Tree を用いないでも次の(3)の結果からわかるので, それまで答を留保しよう.

(3)  $G$  は  $\Box A \rightarrow A$  の代りに Löb の定理に対応した公理  $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$  を持っているために, そして  $\Box A \rightarrow A$  を公理とすると PA との翻訳の完全性に反するために,  $G$  と  $T$  との両方の拡張となるような整合的な様相系は存在しない (Boolos [1], p. 30). このことは  $G$  について特徴的であるのではなく,  $S4\text{-Grz}$  についてもいえる.  $S4\text{-Grz}$  は  $S4$  よりは強いが  $S5$  には含まれないし, (1)の翻訳  $T$  を使うならば,  $\vdash_{\text{Lc}} A \Leftrightarrow \vdash_{S4\text{-Grz}} T(A)$  が成立する (Grzegorezyk, p. 230, 系2). さらに次の結果が得られている (Sobociński).  $A \prec B$  を  $B$  が  $A$  の真の拡張であるとするとき,

$$S4 \prec S4+Grz \prec S4.2+Grz \prec S4.3+Grz.$$

従って、 $S4$  から  $S5$  までの系に  $Grz$  を加えた系は  $S5$  に含まれないことがわかる。

(2)で留保した点を考えてみよう。今、 $\vdash_{S4.3} A \implies \vdash_{S4 Grz} A$  としてみる。(C)は  $S4 Grz$  で定理となる。すなわち、 $\vdash_{S4} Grz \leftrightarrow (C) \wedge Grz$  が成立している。従って、 $\vdash_{S4.3 Grz} A \implies \vdash_{S4 Grz} A$ 。一方、上の Sobociński の結果から  $S4 Grz \prec S4.3 Grz$ 。これは矛盾。故に、 $\vdash_{S4.3} A \not\implies \vdash_{S4 Grz} A$ 。これらの間の関係は次のように図示できるであろう。 $\longrightarrow$  で  $\prec$  を表わすと、

$$\begin{array}{ccc} S4 & \longrightarrow & S4 Grz \\ \downarrow & & \downarrow \\ S4.3 & \longrightarrow & S4.3 Grz \end{array}$$

(4) (3)で得られた結果は  $K4.3$  と  $G$  の場合には成立するであろうか。これは(3)の説明と2節での変換  $t$  を結びつけると次のようになる。今、任意の様相文  $A$  について  ${}^t A$  を考え、 $\vdash_{K4.3} {}^t A \implies \vdash_G {}^t A$  と仮定してみる。定理 2. 1 と Boolos ([1], p. 161) の結果から、 $K4.3$  についても類似の結果、つまり  $\vdash_{K4.3} {}^t A \iff \vdash_{S4.3} A$  が成立することは容易に証明できる。この結果を用いると、上の仮定から、 $\vdash_{S4.3} A \implies \vdash_{S4.3 Grz} A$  が成立する。(3)で得られた結果、 $\vdash_{S4.3} A \not\implies \vdash_{S4.3 Grz} A$  に反するから、 $\vdash_{K4.3} {}^t A \not\implies \vdash_G {}^t A$ 。従って、 $K4.3 \prec G$  ではないことがわかる。

以上の事実をみると、今まで様相系のいわば主役であると考えられていた（現在もそうである） $S$ 一系と、Bew で解釈可能な  $K$ 一系とではかなり異なった振舞をすることがわかった。又、真理解釈が可能な  $S4 Grz$  も  $S4-S5$  の間からはみ出したところに位置している。これらのことから、証明可能性とか真理性が、形式化された限りでの必然性や偶然性とは必ずしも一致した概念ではないことが結論できるであろう。

## 6. 結 論

今まで Bew による  $\square$  の解釈を中心に幾つかの点をみてきた。現在まだ多くの結果が生み出されている途中であり、早急な結論は出すべきではないであろう。ただ Solovay の結果を基礎にして Bew の持つメタ論理的構造が様相論理を用いてかなり明瞭になった、とは言える。とはいえる、様相論理を用いることでメタ論理的構造のすべてが解明される、という結論を出すこともできない。と言うのは、翻訳  $A^\phi$ ,  ${}^\phi A$  はいずれも様相系の文の翻訳であり、Bew による  $\square$  の解釈は可能であるが、その逆、すなわち、 $\square$  による Bew の解釈は部分的にしか可能でないからである。様相文  $A$  の翻訳となる S—理論又は PA の文しか対象として扱えないからである。

### — $I(X \cup \{x\})$ について —

3 節で導集合の双対概念として  $I(X \cup \{x\})$  を定義したが、その基本的性質の幾つかを証明しておこう。

(命題 1)

- (1)  $\tau(X - Y) \subseteq \tau X - \tau Y$
- (2)  $\bigcup_i \tau X_i \subseteq \tau (\bigcup_i X_i)$
- (3)  $\tau(\bigcap_i X_i) \subseteq \bigcap_i \tau X_i$
- (4)  $I\tau X = \tau X = \tau IX$
- (5)  $X \subseteq Y \rightarrow \tau X \subseteq \tau Y$

証明。いずれも導集合についての基本性質の双対的な命題である。

(命題 2)  $X$  が双自己稠密ならば、 $IX$  は双完全である。

証明。 $\tau X \subseteq X$  とする。 $IX = \tau X \cap X = \tau X$ 。よって  $\tau X \subseteq \tau \tau X$  より、 $\tau IX = \tau \tau X \cap \tau X = \tau X = IX$ 。よって  $IX = \tau IX$ 。

(命題 3)  $\tau O \subseteq O$  ならば、閉集合、境界集合はいずれも双自己稠密であ

る。

証明. もし  $X$  が閉集合ならば,  $X=W-Y$  で  $Y\subseteq\tau Y$ . 従って,  $\tau X=\tau(W-Y)\subseteq\tau W-\tau Y$  (命題 1(1)).  $\tau W=W$  より  $\tau X\subseteq W-\tau Y$ .  $W-\tau Y\subseteq W-Y=X$ . 故に  $\tau X\subseteq X$ .

$\text{IX}=O$  とする.  $\tau X\cap X=O$  となる. よって  $\tau X\cap\tau\tau X=\tau O$ .  $\tau X\subseteq\tau\tau X$  で  $\tau O\subseteq O$  であるから,  $\tau X\subseteq O$ . よって  $\tau X\subseteq X$ .

基本的性質の解明は既成の位相空間論での結果を双対化することで続行できるが,  $\tau X$  の位相空間論内で占める役割については今後の研究課題である.

なお, 上の諸命題の導出には Kuratowski (§9), Zarycki を参考にした.

### 注

- (1) ここでの表現は Boolos ([1], p. 16) を用いた.
- (2) Solovay 参照. Solovay の完全性定理の証明は Kripke モデルを PA に埋蔵させる点にある. Solovay の証明方法と多少異なる証明については, Boolos ([1], 12) を参照.
- (3) 彼らの研究に関しては, Macintyre & Simmons, Simmons を参照. 彼らが suitable theories と呼ぶ理論に関しては 3 節を見よ.
- (4) イタリアの普遍代数学者のグループの研究は 1975 年頃から *Studia Logica*を中心発表されている. 文献はここでは掲げないが,  $\square$  を  $\tau$  という作用子で表わし,  $\tau$  を持つようなブール代数 (diagonalizable algebra と呼ばれる) をもとにして, 不動点の存在, 計算の仕方を中心で研究がなされてきている. 一方, 彼らとは独立に de Jongh, Smorynski によっても同様な結果が得られている (Smorynski [3] 参照). 又, 反影原理については Smorynski [1] を参照. 不完全性定理の一般的説明は Smorynski [2] を参照.
- (5) この証明は Solovay (§4) 参照.
- (6) この仮定 (\*) が Simmons において open problem であった.
- (7) 以後の記号, 概念等は Boolos [1] に従う. 補題 2.4, 2.5 は Boolos [1] の lemma 6, 5 (p. 165) に対応している.

- (8) この証明については Boolos ([2], pp. 4-6) を参照。以後の本文での定義は Boolos [2] と同じである。従って、証明しようとしている定理 2.10 は Boolos の結果の一般化である。
- (9) この理由については Boolos ([2], 定理 1) による。
- (10)  $G$  と  $\mathcal{A}$  の関係についても成立していることは Boolos [2] 参照。
- (11) Simmons が  $\sigma$  を基本にして考えたのは位相空間論での概念（集積点、導集合、分散集合等）を援用するために、 $\sigma$  と Bew の直接の対応を犠牲にした、と考えられないこともない。 $I(X \cup \{x\})$  を位相空間論内でどのように呼び、どのような役割を果たすかについては私は充分な知識を持っていない。 $I(X \cup \{x\})$  の基本的性質については付録を参照。
- (12) 補題 4.2(1) の性質を満たす集合、つまり  $T = \{A \mid \vdash_{PA} A \rightarrow \text{Bew}(\Gamma A)\}$  と  $\Sigma_1$  一文の関係については、 $\Sigma_1$  を  $\Sigma_1$  一文の集合とすると、 $\Sigma_1 \subseteq T$  の成立することが Kent によって証明されている (Kent)。
- (13) Henkin 一文とは  $\vdash_{PA} A \leftrightarrow \text{Bew}(\Gamma A)$  なる文  $A$  のことで、Löb は Löb の定理と呼ばれている定理を用いて、 $\vdash_{PA} A$ 、つまり、Henkin 一文は定理となることを示した (Löb)。
- (14) S4 Grz は Grzegorczyk に由来する。又、これと同様の系は Sobociński によっても研究されている (Grzegorczyk, Sobociński)。

### Bibliography

1. Boolos, G., [1] *The Unprovability of Consistency*, Cambridge Univ. Press, 1979.  
[2] Provability, Truth, and Modal Logic, *J. of Phil. Logic*, 9 (1980) 1-7.
2. Dummett, M.A.E. & Lemmon, E.J., Modal Logics between S4 and S5, *Zeitschr. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 5 (1959) 250-264.
3. Grzegorczyk, A., Some Relational Systems and the Associated Topological Spaces, *Fund. Math.*, LX (1967) 223-231.
4. Kent, C.F., The Relation of A to Prov  $\Gamma A$  in the Lindenbaum Sentence Algebra, *J.S.L.*, 38 (1973) 295-298.
5. Kuratowski, K., *Topology*, vol 1, Academic Press, 1966.
6. Löb, M.H., Solution of a Problem of Leon Henkin, *J.S.L.*, 20 (1955) 115-118.

様相の証明可能性解釈

7. Macintyre, A. & Simmons, H., Gödel's Diagonalization Technique and Related Properties of Theories, *Colloq. Math.*, **28** (1973) 165-180.
8. Mckinsey, J.C.C. & Tarski, A., Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting, *J.S.L.*, **13** (1948) 1-15.
9. Simmons, H., Topological Aspects of Suitable Theories, *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.*, **19** (1974/1975) 383-391.
10. Smorynski, C., [1] Consistency and Related Metamathematical Properties, Univ. of Amsterdam, *Mathematics Institute Technical Report*, (1975) 75-102.  
[2] The Incompleteness Theorems, in Barwise, K.J., ed., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977.  
[3] Calculating Self-Referential Statements, I, *Studia Logica*, **XXXVIII** (1979) 17-36.
11. Sobociński, B., Family K of the Non-Lewis Modal Systems, *Notre Dame J. of Formal Logic*, **V** (1964) 313-318.
12. Solovay, R.M., Provability Interpretations of Modal Logic, *Israel J. of Math.*, **25** (1976) 287-304.
13. Zarycki, M., Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30** (1928) 498-506.