Title	様相命題論理の立体化
Sub Title	The propositional calculus of ML-C
Author	田中, 見太郎(Tanaka, Kentaro)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1979
Jtitle	哲學 No.70 (1979. 10) ,p.23- 39
JaLC DOI	
Abstract	ML-C is, as it were, a modal logic with chronology. In a ML-C model there is a time pervading all possible worlds. A world w′ is accessible not only from a world w but also from a time t at w. (In this case we say that w′ derives from w at t.) Thus we can discriminate w′ from w″ deriving from w at another time t′. In every world we associate a time point to every wff and define the necessity of A as A being true in all w′ derivative from w at A's point. In ML-C we shall have some merits. First, we'll be able to define the so called strict implication without inviting any paradoxes. Second, we'll be able to treat such a case that B becomes necessary because of A. For this means that B is true in every world derivative at A's point. However these are not treated here. I hope this treatise to be the first step to these or other objectives.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000070-0023

様相命題論理の立体化

田中　見太郎*

The Propositional Calculus of *ML–C*

Kentaro Tanaka

ML–C is, as it were, a modal logic with chronology. In a *ML–C* model there is a time pervading all possible worlds.

A world w' is accessible not only from a world w but also from a time t at w. (In this case we say that w' derives from w at t.) Thus we can discriminate w' from w'' deriving from w at another time t'.

In every world we associate a time point to every wff and define the necessity of A as A being true in all w' derivative from w at A's point.

In *ML–C* we shall have some merits. First, we'll be able to define the so called strict implication without inviting any paradoxes. Second, we'll be able to treat such a case that B becomes necessary because of A. For this means that B is true in every world derivative at A's point. However these are not treated here. I hope this treatise to be the first step to these or other objectives.

* 文学研究科哲学専攻博士課程

1. *ML-C*

通常の様相命題論理 *ML* を特徴づけるのは，定理 $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$ と推論規則ネセシテーション *NC* である．(もちろんこの時古典二値命題論理 *CL* の任意の公理系と推論規則モードゥス・ポネンス *MP* が仮定されている.) しかしまさにこの式が定理であるが故に厳密含意の定義にさいして不愉快なパラドクスが生じることとなる．厳密含意 $A\prec B$ は一般に $\Box(A\to B)$ によって定義される．これは〝A であるならば必然的に B である〟を意味する．一方 *ML* においては $\Box B\to\Box(A\to B)$ が定理である．従って必然的な B は前件がどのようなものであっても厳密含意される．他方 $\Box\neg A\to\Box(A\to B)$ もまた *ML* の定理である．従って不可能な A はすべてのものを必然的に含意する.[1]

本論文ではひとつの実験な体系及びモデルを構成するにとどめるが *ML* を立体化することの最終的な目的はこのような不快な事態を避けることにある．厳密含意は〝A であれば必然的に B〟と同時に〝A であるからこそ B〟を意味しなくてはならない．だが，不幸なことに〝A であるからこそ〟を *ML* の中で表現することは出来ない．これを表現する新しい記号を *ML* にとりこんで拡張することが必要である．

〝A であるからこそ〟のひとつの解釈は，〝A が生起しているが故に〟である．この解釈は時間的様相を伴っている．〝A が生起すれば必然的に B が生起する〟は A が生起した後必ず B が生起することを意味する．従って *ML* の立体化は，*ML* の時間化を暗に意味している．個々の事象の生起時点を各可能世界の中で表現することが中心的なアイデアである．

しかし，生起時点を表現するということは種々の困難をともなっている．事象に対して単一の時点でなくて時点の集合を対応づけることが必要となるかもしれないし，あるいは非古典二値論理的な可能世界を考えなくてはならないかも知れない.[2]

本論文ではそのような地点にまで到達することはできない．古典二値論理にとどまって，その範囲の中で，立体された体系 (ML-C) を構成することにしよう．(しかしこの体系の中でも先に述べたようなパラドクスを解消して厳密含意を定義することは可能だろう.)

ML-C のアルファベットは ML のアルファベットに新しい結分子 e を付加することで得られる．即ちそれは命題変項の集合 P，結合子の集合 $\{\neg, \rightarrow, \Box, e\}$ からなっている．

e は二項の結合子である．従って ML の形成規則に

"A, B が式ならば AeB は式である"

を加えることで ML-C のすべての式が得られる．例えば

$$p \rightarrow q\,,\quad peq\,,\quad (p \rightarrow q)e(qe\neg p)$$

等はすべて ML-C の式である．

直観的にいって，e はふたつの文が与えられる時それらの文に対応づけれる時点の早晩を表現する．従って e はひとつの順序関係を表わし

$$AeA \qquad \text{——①}$$

$$AeB \wedge BeC \rightarrow AeC \qquad \text{——②}$$

$$AeB \vee BeA \qquad \text{——③}$$

が ML-C の定理でなくてはならない[(3)]．次に

$$A=e\neg A \qquad \text{——④}$$

$$AeB \rightarrow A=e(A \rightarrow B) \qquad \text{——⑤}$$

$$BeA \rightarrow B=e(A \rightarrow B) \qquad \text{——⑥}$$

$$A=e\Box A \qquad \text{——⑦}$$

$$A=e(AeB) \qquad \text{——⑧}$$

(但し，$A=eB \longleftrightarrow def,\ AeB \wedge BeA$)

が後に構成する ML-C モデルからの要請として ML-C の定理である.

さらに，先に述べたように，$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ が通常の ML を特徴づけるが，これに対応する ML-C の式は

$$A = eB \to (\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)) \text{——⑨}$$

である. ⑨が定理であることが ML-C を特徴づける.

最後に ML-C の推論規則は ML と同じく，MP と NC を仮定する.（もちろん CL の任意の公理系をも仮定している.）

2. ML-C モデル

ML-C モデルは ML モデルに $F \times W$ (F は ML-C のすべての式の集合，W はすべての可能世界の集合）から ω への関数 g を加え，可能世界間の関係 R を自然数 $g(A, w)$ (A は任意の式，w は可能世界）で添数することによって複数に増やすことで得られる.

$$S = (V, w, W, \{Rn\}, g)$$

（但し V は付値関数，w は任意の可能世界）

関数 g は以下のような帰納的な定義によって性格づけられる.

g を $P \times W$ から ω への任意の関数とし，式 A, B については $g(A, w)$, $g(B, w)$ が定義されているとする. この時,

$$g(\neg A, w) = g(A, w) \text{——}(a)$$

$$g(A \to B, w) = \begin{cases} g(A, w) & \text{if} \quad g(A, w) \leq g(B, w) \\ g(B, w) & \text{if} \quad g(A, w) > g(B, w) \end{cases} \text{——}(b)$$

$$g(\Box A, w) = g(A, w) \text{——}(c)$$

$$g(AeB, w) = g(A, w) \text{——}(d)$$

さて，A, B を任意の式，w, w' を任意の可能世界とする時，上に定義さ

れた g の (A, w) の値 (B, w) の値によってそれぞれ添数された $Rg(A, w)$, $Rg(B, w)$ は

$$g(A, w)=g(B, w) \wedge wRg(A, w)w' \rightarrow wRg(B, w)w' \text{——}(e)$$

を満たさなくてはならない.（これによって式⑨が ML-C モデルにおいて妥当となる.）

付値関数 V は次の定義で与えられる. V を $P \times W$ から $\{T, F\}$ への任意の関数とする.

$$V(\neg A, w)=T \quad \text{iff} \quad V(A, w)=F \qquad \text{——}(f)$$
$$V(A \rightarrow B, w)=T \quad \text{iff} \quad V(A, w)=F \quad \text{or} \quad V(B, w)=T \qquad \text{——}(g)$$
$$V(\Box A, w)=T \text{ iff for all } w' \text{ such that, } wRg(A, w)w', V(A, w')=T \text{——}(h)$$
$$V(AeB, w)=T \quad \text{iff} \quad g(A, w) \leq g(B, w) \qquad \text{——}(i)$$

直観的にいえば, g は各式にそれに固有の時点を対応づけている. そして, 式 A 世界 w, w' について, $wRg(A, w)w'$ は, 世界 w において式 A に対応づけられた時点を目安にして, w' が w の相対的可能世界であることを表わしている. ML モデルにおけるように単純に w' が w の相対的可能世界であるということはできない. w' が w の相対的可能世界であるとすれば, 必ずある式 A に関して w の相対的可能世界でなくてはならない.

このことに関連して, 事象 A が世界 w において必然的であるという意味も異なる. w のすべての相対的可能世界において A が真となるのではない. A に与えられた時点から派生するすべての相対的可能世界において A が真となる時, A は必然的に真である（(h) を参照). A が必然的に真であっても, A の時点とは異なる時点を目安にした相対的可能世界で A が真である必要はないのである.

従って ML-C モデルにおいては, B が必然的であっても, $A \rightarrow B$ が必

然的であるとはかぎらない．B が必然的であるというのは B の時点からみての相対的可能世界で B が真であることを意味するのであり，$A\to B$ のそれにおいて B が真となっているとはかぎらないからである．[4]

3． T–C

本論文の以下の部分は ML–C のひとつの例として ML の T に対応する体系（T–C）を考え，これの健全性と完全性を証明することにあてられる．[5]

体系 T は $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$ の他に $\Box A\to A$ を公理とする．前者の式は関係 R に特に条件を付さなくとも，妥当性が証明できるが，後者はそうではない．後者を妥当な式とするために T–モデルでは R に反射性が要求される．従ってこれに対応して T–C モデルにおいても，以下のような反射性を要請する．

A を任意の式，w を任意の可能世界とする時，

$$wRg(A, w)w \qquad\qquad ——(j)$$

もちろん，g については $P\times W$ から ω への任意の関数を (a)—(d) によって帰納的に拡張したものとし，V についても同様に (f)—(i) の帰納的な定義を満たすものとする．（この時（j）によって式 $\Box A\to A$ は T–C 妥当となる．）

T–C の公理系は次のものである．

A1. CL の公理

A2. AeA

A3. $AeB\wedge BeC\to AeC$

A4. $AeB\vee BeA$

A5. $A=e\neg A$

A6. $AeB\to A=e(A\to B)$

$BeA\to B=e(A\to B)$

$A7.$　$A=e\Box A$

$A8.$　$A=e(AeB)$

$A9.$　$A=eB\rightarrow(\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B))$

$A10.$　$\Box A\rightarrow A$

$R1.$　MP

$R2.$　NC

実際 T-C は ①—⑨ を公理とし，MP, NC を推理規則とする ML-C のひとつである．T-C が T-C モデルで健全かつ完全であることを次の節で示す．

4．T-C の健全性と完全性

$A1$—$A8$ が T-C 妥当であることは関数 g の定義から明らかであり，MP と NC が妥当な式から妥当な式を導くことも容易に証明可能である．ここでは $A9$ と $A10$ の T-C 妥当のみを証明する．

〈$A9$ の妥当性〉

$V(A=eB, w)=V(\Box(A\rightarrow B), w)=V(\Box A, w)=T$ 及び $wRg(B, w)w_0$ を仮定する．$g(A, w)=g(B, w)$ であり (e) によって $wRg(A, w)w_0$．さらに (b) から $g(A\rightarrow B, w)=g(A, w)$ あるいは $g(A\rightarrow B, w)=g(B, w)$．ところが，$g(A, w)=g(B, w)$ だから $g(A\rightarrow B, w)=g(A, w)=g(B, w)$．故に (e) によって，$wRg(A\rightarrow B, w)w'$ ならば $wRg(A, w)w'$．しかし，すべての $wRg(A\rightarrow B, w)w'$ なる w' について $V(A\rightarrow B, w')=T$．即ちすべての $wRg(A, w)w'$ なる w' について $V(A\rightarrow B, w')=T$．また仮定からすべての $wRg(A, w)w'$ なる w' について $V(A, w')=T$．今，特に $wRg(A, w)w_0$．従って $V(A\rightarrow B, w_0)=T$ かつ $V(A, w_0)=T$．つまり $V(B, w_0)=T$．以上から $V(\Box B, w)=T$.

$V(A=eB\rightarrow(\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)), w)=T.$

〈A10 の妥当性〉

$V(\Box A, w)=T$ とする．ところが（j）によって．$wRg(A, w)w$．従って $V(A, w)=T$．

以上で T-C の健全性の証明を終える．

補題1[(6)]

α）$A=eB\to(\Box(A\wedge B)\longleftrightarrow\Box A\wedge\Box B)$

〈証明〉

1.	$A\to(B\to A\wedge B)$	by	CL
2.	$\Box(A\to(B\to A\wedge B))$	by	NC, 1
3.	$A=eB\to\Box(A\to(B\to A\wedge B))$	by	CL, 2
4.	$A=eB\to(\Box A\to(\Box B\to\Box(A\wedge B)))$	by	CL, $A9$, 3
5.	$A=eB\to(\Box A\wedge\Box B\to\Box(A\wedge B))$	by	CL, 4
6.	$A\wedge B\to A$	by	CL
7.	$\Box(A\wedge B\to A)$	by	NC, 6
8.	$A=eB\to\Box(A\wedge B\to A)$	by	CL, 7
9.	$A=eB\to(\Box(A\wedge B)\to\Box A)$	by	CL, $A9$, 8
10.	$A=eB\to(\Box(A\wedge B)\to\Box B)$	同	様
11.	$A=eB\to(\Box(A\wedge B)\to\Box A\wedge\Box B)$	by	CL, 9, 10
12.	$A=eB\to(\Box(A\wedge B)\longleftrightarrow\Box A\wedge\Box B)$	by	CL, 5, 11

証明終り．

β）$A=eB\to(\Box A\wedge\Diamond B\to\Diamond(A\wedge B))$

（但し，$\Diamond A\longleftrightarrow def\neg\Box\neg A$）

〈証明〉

1.	$A\to(\neg(A\wedge B)\to\neg B)$	by	CL
2.	$\Box(A\to(\neg(A\wedge B)\to\neg B))$	by	NC, 1
3.	$A=eB\to\Box(A\to(\neg(A\wedge B)\to\neg B))$	by	CL, 2

4. $A=eB\to(\Box A\to(\Box\urcorner(A\wedge B)\to\Box\urcorner B))$　by　$CL, A9, 3$

5. $A=eB\to(\Box A\to(\urcorner\Box\urcorner B\to\urcorner\Box\urcorner(A\wedge B))$　by　$CL, 4$

6. $A=eB\to(\Box A\to(\Diamond B\to\Diamond(A\wedge B))$　by　$def, 5$

7. $A=eB\to(\Box A\wedge\Diamond B\to\Diamond(A\wedge B))$　by　$CL, 6$

補題 2.　演繹定理

〈証明〉

推論規則は MP と NC である．証明は通常の ML のそれと同じであるので省略する．

補題 3.　置換定理[7]

A の任意の部分式 D を任意の場所で D' によって置きかえて得られる式を A' とする．この時，$\vdash D=eD'$ かつ $\vdash D\leftrightarrow D'$ ならば $\vdash A\leftrightarrow A'$.

〈証明〉

A の長さに関する帰納法で証明する．

i）A が命題変項の p の時．$p=D, \vdash D\leftrightarrow D'$ だから $\vdash p\leftrightarrow p'$.

ii）B, C について $\vdash B\leftrightarrow B'$, $\vdash C\leftrightarrow C'$ とする．

iii）$A=\urcorner B$ の時，$A=B\to C$ の時は容易に証明可能．

$A=\Box B$ の時及び $A=BeC$ の時には補題として $\vdash B=eB'$ ($\vdash C=eC'$) が必要とされる．先ずこれを次の帰納法で示す．

$B=p$ の時は明らか．

$B=\urcorner E$ の時．$\vdash E=e\urcorner E, \vdash E'=e\urcorner E'$ かつ $\vdash E=eE'$．故に．$\vdash\urcorner E=e\urcorner E'$.

$B=E\to F$ の時．$\vdash E=e(E\to F)\vee F=e(E\to F)$ だから $E=e(E\to F)$ を仮定する．さらに $\vdash E'=e(E'\to F')\vee E'\neq e(E'\to F')$ だが，$E'=e(E'\to F')$ なら明らかに，$(E\to F)=e(E'\to F')$．　$E'\neq e(E'\to F')$ とする．$A6$ から $\urcorner(E'eF')$．$A4$ から $F'eE'$．帰納法の仮定として $\vdash E=eE'$, $\vdash F=eF'$. 明らかに FeE．$A6$ から $F=e(E\to F)$．また $\vdash E'=e(E'\to F')\vee F'=e(E'\to F')$ だから $F'=e(E'\to F')$．従って，$\vdash F=eF'$ より，$\vdash(E\to F)=e(E'\to$

$F')$. 以上から $\vdash E=e(E\to F)\to(E\to F)=e(E'\to F')$. 同様にして $\vdash F=e(E\to F)\to(E\to F)=e(E'\to F')$. 即ち $\vdash(E\to F)=e(E'\to F')$.

$B=\Box E$ の時. $\vdash E=e\Box E$, $\vdash E'=e\Box E'$ かつ帰納法の仮定から $\vdash E=eE'$. 故に $\vdash\Box E=e\Box E'$.

$B=EeF$ の時. $\vdash E=e(EeF)$, $\vdash E'=e(E'eF')$, かつ帰納法の仮定から $\vdash E=eE'$. 故に $\vdash(EeF)=e(E'eF')$.

さて $A=\Box B$ とする. 仮定から $\vdash B\to B'$. 故に NC によって $\vdash\Box(B\to B')$. しかし今 $\vdash B=eB'$. $A9$ によって $\vdash\Box B\to\Box B'$. 同様に $\vdash\Box B'\to\Box B$ だから, $\vdash\Box B\longleftrightarrow\Box B'$.

$A=BeC$ とする. $\vdash B=eB'$ かつ $\vdash C=eC'$. BeC を仮定すれば $B'eC'$. $B'eC'$ を仮定すれば BeC. 即ち $\vdash Bec\longleftrightarrow B'eC'$.

補題 4.[8] α) $\{\Box A_1,\cdots,\Box An,\Diamond B, A_1=eB,\cdots,An=eB\}$ が無矛盾ならば $\{A_1,\cdots,An,B\}$ が無矛盾.

β) $\{An=eB\}n\in\omega\cup\{\Box An\}n\in\omega\cup\{\Diamond B\}$ が無矛盾ならば $\{An\}n\in\omega\cup\{\beta\}$ が無矛盾.

☆ 式 A が無矛盾 $\Longleftrightarrow$ not $\vdash\neg A$

$\{A_1,\cdots,An\}$ が無矛盾 $\Longleftrightarrow$ not $\vdash\neg(A_1\wedge\cdots\wedge An)$

$\{An\}n\in\omega$ が無矛盾 $\Longleftrightarrow$ 任意の有限部分集合が無矛盾.[9]

〈α) の証明〉

$\{A_1,\cdots,An,B\}$ が矛盾とする. $\vdash\neg(A_1\wedge\cdots\wedge An\wedge B)$. NC によって $\vdash\Box\neg(A_1\wedge\cdots\wedge An\wedge B)$. 定義から, $\vdash\neg\Diamond(A_1\wedge\cdots\wedge An\wedge B)$. 故に $\vdash(A_1\wedge\cdots\wedge An)=eB\to\neg\Diamond(A_1\wedge\cdots\wedge An\wedge B)$. 補題 1. β) から $\vdash(A_1\wedge\cdots\wedge An)=eB\to\neg(\Box(A_1\wedge\cdots\wedge An)\wedge\Diamond B)$. ところが $\vdash(A_1\wedge\cdots\wedge An-1)=eAn\wedge An=eB\to(A_1\wedge\cdots\wedge An)=eB$. 故に $\vdash(A_1\wedge\cdots\wedge An-1)=eAn\wedge An=eB\to\neg(\Box(A_1\wedge\cdots\wedge An)\wedge\Diamond B)$. 補題 1. α) と置換定理から, $\vdash(A_1\wedge\cdots\wedge An-1)=eAn\wedge An=eB\to\neg(\Box(A_1\wedge\cdots\wedge An-1)\wedge\Box An\wedge\Diamond B)$. この手

続きを n 回くりかえして，$\vdash A_1=eA_2\wedge\cdots\wedge An-1=eAn\wedge An=eB\to$ $\neg(\Box A_1\wedge\cdots\wedge\Box An\wedge\Diamond B)$．ところが $\vdash A_1=eB\wedge\cdots\wedge An=eB\leftrightarrow A_1=eA_2\wedge\cdots\wedge An=eB$．したがって $\vdash A_1=eB\wedge\cdots\wedge An=eB\to\neg(\Box A_1\wedge\cdots\wedge\Box An\wedge\Diamond B)$．$CL$ のトートロジーを用いて $\vdash\neg(A_1=eB\wedge\cdots\wedge An=eB\wedge\Box A_1\wedge\cdots\wedge\Box An\wedge\Diamond B)$．即ち $\{\Box A_1,\cdots,\Box An,\Diamond B,A_1=eB_1\cdots,An=eB\}$ が矛盾．

〈β) の証明〉

$\{An\}n\in\omega\cup\{B\}$ の任意の有限部分集合が無矛盾であることとは α) より明らか．

さて，$T\text{-}C$ の任意の無矛盾な式について，それを真とするような $T\text{-}C$ モデルが存在することを示せば，$T\text{-}C$ の完全性が証明できる．今 A をそのような式とせよ．

$\Gamma^0=\{A\}$ とする．Γ^n が定義されているとして，$\Gamma^n\cup\{An+1\}$ が無矛盾であれば $\Gamma^{n+1}=\Gamma^n\cup\{An+1\}$，$\Gamma^n\cup\{An+1\}$ が矛盾であれば $\Gamma^{n+1}=\Gamma^n$ と定義しよう（ただし，式の集合 F がゲーデル・ナンバーその他によってナンバリングされているとして，$An+1$ は $n+1$ 番目の式である)．さらにここで $\Gamma_0=\cup n\in\omega\Gamma^n$ とおけば Γ_0 は最大無矛盾集合 m.c.s. となっている．

さて次に

$$\Diamond_{\Gamma_0}=\{B|\Diamond B\in\Gamma_0\}$$

とする時，$\Diamond_{\Gamma_0}$ は空集合ではない．実際 $\vdash B\to\Diamond B$ であり，特に $A\to\Diamond A\in\Gamma_0$ となる．$A\in\Gamma_0$ だから $\Diamond A\in\Gamma_0$．即ち $A\in\Diamond\Gamma_0$．

さらに $\Diamond B\in\Gamma_0$ (B は $\Diamond\Gamma_0$ の i 番目の式とする) について

$$\Delta=\{B'|B'=eB\in\Gamma_0,\Box B'\in\Gamma_0\}\cup\{B\}$$

とすると，補題 4. β) によって無矛盾．従って A の時と同じ仕方で Δ か

らも m.c.s. Γi を得ることができる．この時 Γi を Γ_0 の B に派生するという．

またCを $\Diamond_{\Gamma i}$ の j 番目の式として，$\Diamond C\in\Gamma i$ だから，$\Gamma i, j$ を得，さらに D を $\Diamond_{\Gamma i, j}$ の k 番目の式として，これから $\Gamma i, j, k$ を得ることができる etc.

こういった手続きをへて得られる m.c.s. すべての集合を Ω で表わす.(10)

無論，任意の $\Gamma\in\Omega$ について，Γ が通常の m.c.s. の特性，即ち，任意の式 B, C について

(1) $\neg B\in\Gamma \Longleftrightarrow B\notin\Gamma$

(2) $B\to C\in\Gamma \Longleftrightarrow B\notin\Gamma$ あるいは $C\in\Gamma$

(3) $B\in\Gamma$ かつ $B\to C\in\Gamma$ ならば $C\in\Gamma$

(4) $\vdash B$ ならば $B\in\Gamma$

をすべて満たしていることは容易に証明可能である．

ここで $\Gamma\in\Omega$ なる Γ を可能世界と考えて，この中で R, g, V を適切に定義することで

$$S=(V, \Gamma, \Omega, \{Rn\}, g)$$

をひとつの T-C モデルとすることができる．特に

$$S_0=\{V, \Gamma_0, \Omega, \{Rn\}, g\}$$

は A を真とするモデルとなるであろう．

まず g については，$F\times\Omega$ から ω への任意の関数であって，$B, C\in F$, $\Gamma\in\Omega$ について，

$$g(B, \Gamma)\leq g(C, \Gamma) \Longleftrightarrow BeC\in\Gamma$$

を満たすものとする．

この g は T-C モデルの g の条件を満たす．実際一例として否定のケースを考えると，$\vdash B =_e \neg B$ だから，$B =_e \neg B \in \Gamma$．$\therefore g(B, \Gamma) = g(\neg B, \Gamma)$.

次に $g(B, \Gamma)$ によって添数された $Rg(B, \Gamma)$ について

$$\Gamma Rg(B, \Gamma)\Gamma' \Longleftrightarrow \Gamma = \Gamma' \text{ あるいは，} B =_e C \in \Gamma$$
$$\text{なる式 } C \text{ があって } \Gamma' \text{ が } \Gamma \text{ の } C \text{ に派生.}$$

と定義する．

$\Gamma Rg(B, \Gamma)\Gamma$ は明らか．一般化して $\Gamma \neq \Gamma'$ のケースのみを考えて，$g(B, \Gamma) = g(C, \Gamma)$, $\Gamma Rg(B, \Gamma)\Gamma'$ を仮定する．定義から $B =_e C \in \Gamma$．さらに $B =_e D \in \Gamma$ なる式 D があって，Γ' は Γ の D に派生．$=_e$ の推移性から $C =_e D \in \Gamma$．従って $\Gamma Rg(C, \Gamma)\Gamma'$.

以上から，R は T-C モデルのための条件 (e) と (j) を満たす．

付値関数 V については，$P \times \Omega$ から $\{T, F\}$ への任意の関数で，$p \in P$, $\Gamma \in \Omega$ について，

$$p \in \Gamma \Longleftrightarrow V(p, \Gamma) = T$$

を満たすものをベースとして (f)—(i) の帰納的な定義を行ったものとする．

以上の定義から任意の $\Gamma \in \Omega$ について，

$$S = (V, \Gamma, \Omega, \{Rn\}, g)$$

は T-C モデルである．

補題 5.[11] 任意の式 B，任意の m.c.s. $\Gamma \in \Omega$ について，

$$B \in \Gamma \Longleftrightarrow V(B, \Gamma) = T$$

〈証明〉

B の長さに関する帰納法で示す．

i) $B=p$ の時，V の定義から明らか．

ii) C, D について $C\in\Gamma \Longleftrightarrow V(C,\Gamma)=T$, $D\in\Gamma \Longleftrightarrow V(D,\Gamma)=T$ を仮定する．

iii) $B=\neg C$ の時，$B=C\to D$ の時は容易に証明可能．

$B=CeD$ の時．定義から

$$\begin{aligned} CeD\in\Gamma &\Longleftrightarrow g(C,\Gamma)\leq g(D,\Gamma) \\ &\Longleftrightarrow V(CeD,\Gamma)=T \end{aligned}$$

$B=\Box C$ の時．最初に $\Box C\in\Gamma$ を仮定する．さらに $\Gamma Rg(C,\Gamma)\Gamma'$ を仮定する．この時，$C\in\Gamma'$ がいえる．

実際 $\Gamma=\Gamma'$ ならば $\Box C\in\Gamma'$．ところが $\vdash\Box C\to C$ だから $\Box C\to C\in\Gamma'$．故に $C\in\Gamma'$．

$\Gamma\neq\Gamma'$ として，$C=eE\in\Gamma$ なる式 E があって Γ' が Γ の E に派生するとする．

$$\Delta=\{E'|E'=eE\in\Gamma, \Box E'\in\Gamma\}\cup\{E\}\subseteq\Gamma'$$

ところが，$C=eE\in\Gamma$ かつ $\Box C\in\Gamma$．故に $C\in\Delta$．即ち $C\in\Gamma'$．

帰納法の仮定から $V(C,\Gamma')=T$ であり，従って $V(\Box C,\Gamma)=T$.

逆に $\Box C\notin\Gamma$ とする．$\Diamond\neg C\in\Gamma$．Γ の $\neg C$ に派生する Γ' を考えると，まず $C=e\neg C\in\Gamma$ だから $\Gamma Rg(C,\Gamma)\Gamma'$．さらに明らかに $\neg C\in\Gamma'$．つまり $C\notin\Gamma'$．帰納法の仮定から $V(C,\Gamma')=F$．$\therefore$ $V(\Box C,\Gamma)=F$.

定理，T-C の完全性.

〈証明〉

補題5 において $A\in\Gamma_0$ だから $V(A,\Gamma_0)=T$．即ち，任意の無矛盾な式 A について，

$$S_0=(V,\Gamma_0,\Omega,\{Rn\},g)$$

は A を真にするモデルである．

注

(1)　Lemmon [2] pp. 1—12 参照.

Lewis & Langford [3] p. 124, 11.02 では，厳密含意は $A ⥽ B \leftrightarrow_{def} \neg\Diamond(A \wedge \neg B)$ で定義される．しかし $\neg\Diamond A \leftrightarrow_{def} \Box\neg A$, $A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ からこれは $\Box(A \rightarrow B)$ と同値である．

Lewis & Langford [3] p. 175 は上記のパラドクスを不可避の結果であると断定し，通常見すごしてよいような無害のものという．しかし，厳密含意の有する力を減することなく，パラドクスが解消されるなら，それは望ましいことに違いない．

(2)　例えば〝カーターは大統領である〟のような文は時点によって真であったり偽であったりする．従って単一の時点ではなくて，時点の集合を対応づけなくてはならない．

あるいはむしろ Prior [4] pp. 15-17 に見るような多値論理を各可能世界において展開することが必要かも知れない．

実際，時間の流れを有する各可能世界において，上の例文は単一の真理値を有せず，真理値の ordered tuple を有するのである．

(3)　e が①と②とを満たすことから，明らかに少くとも quasi order である．従って，$A{=}eB \leftrightarrow_{def} AeB \wedge BeA$ と定義すれば，$=e$ は equivalence relation となる．$=e$ は時点の等しさを表わすのだが，かりにこれを equality の記号と考えると，①,②,③及び上の定義から e は linear order と考えることができる．

(4)　*ML-C* は Tense Logic (TL) とは異なる．Rescher & Urquhalt [5] の Operator R (可能世界モデルでの関係 R とは異なる)．が TL にとって特徴的なものである．RtA は〝時点 t において A〟を表現する．

Operator R は *ML-C* に翻訳不能である．逆にまた *ML-C* に特徴的な e も R その他で翻訳不能である．

ことに Rescher & Urquhalt [5] に現れる体系 Kt——これの中で本論文中の *ML* の体系 T に相当する様相概念が定義される——における R の意味を考察することで *ML-C* と TL との相異がより明確となる．

Kt モデルでは，命題 A と時点 t について真理値 T あるいは F をふりわける関数 R が Operator R に対応づけられる．$RtA{=}T$ は〝時点 t において A が真〟を意味する．

そこで Diodorus の定義に従って

$$\Diamond A \leftrightarrow_{def} \exists t(t>n \wedge RtA) \vee RnA$$

(n は現在を表わす)

で可能が定義される（これは体系 T での可能概念に相当する).

従って〝$\Diamond A$ が真である〞とは〝A が現在真であるか，あるいは将来の時点 t があって A が時点 t において真である〞にほかならない.

Kt モデルを可能世界モデルで置きかえれば，明らかに個々の時点が個々の可能世界に対応している．そして R は ML の結合子 $(\neg, \rightarrow, \Box)$ については，ちょうど本論文の付値関数 V の役割を果たしている.

TL の様相概念が ML の中でとり扱うことのできるものであれば，それは上の理由によっている．ところが ML-C の様相概念は ML の中で処理される類のものではない．ML-C では時点と可能世界とが同一視されない．各可能世界の上を時間が流れている．そして世界 w' は単に世界 w だけではなく，時点 t とも関連して相対的可能世界といわれるのである.

Prior [4] (pp. 8—17) で $S4$ と対応づけられる体系も Kt と同じような構造をしている．各時点が可能世界として考えられている．しかし ML-C を基盤にして $S4$ に対応する体系を構成しても，Prior の体系とは相異するはずである.

(5) 神野・内井 [1] によって T と呼ばれる体系だが，Rescher & Urquhalt [5] では von Wright と Feys の体系 M と呼ばれている.

(6) 神野・内井 [1] p. 100, MT. 1, MT. 2 参照．補題 1 の証明は MT. 1, MT. 2 の証明を基礎にしている.

(7) 同上 p. 101, 定理 17 参照.

(8) 同上 p. 102, 補助定理 7 参照.

(9) 同上 p. 28, D9 参照.

(10) 同上 pp. 103—104 参照.

(11) 同上 p. 104, 補助定理 8 参照.

〈参　考　文　献〉

[1] 神野慧一郎，内井惣七著「論理学——モデル理論と歴史的背景——」ミネルヴァ書房 (1976).

[2] Lemmon, E. J. *An Introduction To Modal Logic.* American Philosophical Quarterly Monograph Series, Oxford (1977).

[3] Lewis, C. I. & Langford, C. H. *Symbol Logic.* Dover, New York, (1932).

[4] Prior, A. N. *Time and Modality.* The Clarendon press, Oxford, (1957).

[5] Rescher, N. & Urguhart, A. *Temporal Logic.* Springer-Verlag, Wien New York, (1971).