Title	Frege的論理と非Frege的論理
Sub Title	Fregean logics and non-Fregean logics
Author	西脇, 与作(Nishiwaki, Yosaku) 藁谷, 敏晴(Waragai, Toshiharu)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1977
Jtitle	哲學 No.65 (1977. 1) ,p.23- 49
JaLC DOI	
Abstract	In this paper, " non-Fregean logics " proposed by R. Suszko are studied ; 1. from a philosophical point of view concerning the necessity of introducing the identity-connective, and 2. from technical point of view concerning logical structure of non-Fregean logics. Analysing the Frege's ambiguity in treating the logical constants 1,0 (in Frege), we were led to the conclusion ; 1) A distinction between valuational two valuedness and ontological (referential) two-valuedness should be made, 2) keeping the valuational two-valuedness (the principle of bivalence), the abolition of ontological one is possible (ontological many-valuedness), 3) in order to express logical systems based on valuational two-valuedness and ontological many-valuedness, the introduction of identity-connective is unavoidable. Such logics have been studied among others by R. Suszko as theories of kind W, and its sentential part is called SCI (sentential calculus with identity). In this paper, our interest was directed esp. on 1) logical relations between SCI, SC (sentential calculus) and there intermediate variaties, 2) A possibility of introducing some meta-notions into object languages, 3) some valuations of non-Fregean languages.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000065-0023

Frege 的論理と非 Frege 的論理

Fregean Logics and Non-Fregean Logics

西　脇　与　作*
Yosaku Nishiwaki
藁　谷　敏　晴**
Toshiharu Waragai

In this paper, "non-Fregean logics" proposed by R. Suszko are studied;
1. from a philosophical point of view concerning the necessity of introducing the identity-connective, and
2. from technical point of view concerning logical structure of non-Fregean logics.

Analysing the Frege's ambiguity in treating the logical constants 1,0 (in Frege), we were led to the conclusion;
1) A distinction between valuational two valuedness and ontological (referential) two-valuedness should be made,
2) keeping the valuational two-valuedness (the principle of bivalence), the abolition of ontological one is possible (ontological many-valuedness),
3) in order to express logical systems based on valuational two-valuedness and ontological many-valuedness, the introduction of identity-connective is unavoidable.

Such logics have been studied among others by R. Suszko as theories of kind *W*, and its sentential part is called SCI (sentential calculus with identity).

In this paper, our interest was directed esp. on
1) logical relations between SCI, SC (sentential calculus) and there intermediate variaties,

* 慶大非常勤講師
** 慶大大学院

2) A possibility of introducing some meta-notions into object languages,
3) some valuations of non-Fregean languages.

現代論理学は Frege の構想に基づき幾多の努力を重ね発展したものである．これとは異なり R. Suszko を中心に展開された非 Frege 的論理は Frege の基本的考えと深くかかわり合いながらも独自の特性を有している．それらの特性のうちの主なものを以下で述べてみたい．

1. logical value の論理-存在論的位置

1.1. 文，真理値，存在の相互関係

表現，意味，指示の関係は論理的思考の展開に不可欠のものであるが，この関係を最初に明確に規定したのは Frege である．彼はこれを次のように述べている．「記号とその意味，指示間の正規の関係は記号に対して確定的な意味が対応し，与えられた指示（対象）に対しては唯一つの記号がつけられるということはない．」(Frege, p. 58) これは意味，指示の関数的性格を明言している．Frege はこの主張に基づき，表現を名辞と文の二種に分類し，次のように提言している．

(F. I) 名辞はその意味を表現し，その指示（対象）を表わすか，指し示すかする．記号という手段で我々は意味を表現し，指示（対象）を指し示す．(Frege, p. 61)

(F. II) 名辞の指示は対象自体で (Frege, p. 60)，すべての平叙文はその語の指示に関連している故に名辞とみなされる．そしてその指示はそれがある限りで，真又は偽である．(Frege, p. 63) 従って，真，偽はそれ自身対象である．

この提言を Suszko は次のように図式化している．(Suszko, [5] p. 171) Frege の主張は図の実線部分に対応している．

$$\begin{tikzcd}
s(\varphi) \arrow[dr, "f"'] & \varphi \arrow[l] \arrow[r, dashed] \arrow[d] & t(\varphi)=1 \text{ or } t(\varphi)=0 \\
 & r(\varphi) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

（φ が文の場合）

φ は名辞又は文であり，$s(\varphi)$ は φ の意味（φ が名辞ならその意味，文ならその thought（=proposition））であり，$r(\varphi)$ は φ の指示（φ が名辞の場合は対象，文の場合は真又は偽という特別な対象）である．

(1.1)　　$s(\varphi)=s(\psi) \Rightarrow r(\varphi)=r(\psi)$

(1.2)　　$f(s(\varphi))=r(\varphi)$

上式は φ の意味がその指示を関数的に決定することを示している．図で注意してほしいのは破線部分である．(F. II) によれば真，偽は r の値であり，共に指示の一部となっている点である．Frege は名辞についてはそれぞれの指示（対象）を考えているが，文についてはそうではない．ところが文の指示は名辞との類比で考えるならば，それが指し示している事態になるのが自然であり，真，偽は指示ではなく論理的な評価とみるべきである．Suszko はこのように考えて非 Frege 的論理を構成するが，その際問題となるのは真理値と指示の間に生ずる混乱である．この混乱は他の文脈でもよく起るので反省的に考察しておきたい．

1.2.　真理値と 2 値性

通常真理値と我々が呼んでいるものは (F. II) を考慮に入れるならば2つの側面から検討されねばならない．通常用いられる真理値は文に関しての論理評価なのであり，Frege におけるような存在論的な指示対象ではない．このことを一層明確にするために2値性の原理を中心に真理値概念を復習しておこう．

真理値は (F. I), (F. II) を認めるとき，論理評価のそれと，存在論的なそれとに区別できる．論理評価としての真理値に関するテーゼとして2値性の原理，つまり，

どんな文 φ についても，φ は真であるか，偽であるかである，

と非2値性の原理，つまり，

真でも偽でもない文 φ がある，

に分けることができる[(1)]．非2値性の原理に基づいた論理システムは2つの形をとって発展した．1つは Łukasiwicz, Post 等による多値論理であり，真でも偽でもない文（非決定の文）には真，偽以外の何らかの論理値を付与するという立場である[(2)]．他方は真でも偽でもない文には全く論理評価を与えない（不決定の文）という立場であって，Strawson, v. Fraassen に代表されるものである[(3)]．

言語 L とそれで記述される世界 U を考えてみよう．この際 U は L の U に関し真となる様な文のクラス T を決定する．又，U で偽とみなされる文 φ はその否定 $\neg\varphi$ が $\neg\varphi\in T$ のときのみであるから，L で U において偽である文のクラス F も $\{\varphi|\neg\varphi\in T\}$ として決定される．つまり，$\varphi\in T\Longleftrightarrow\neg\varphi\in F$．今，$L$ のすべての文のクラスを F_m とすると，明らかに $T\subsetneqq F_m$（T は F_m の真部分集合），$F\subsetneqq F_m$．よって，$T\cup F\subseteqq F_m$ かつ $T\cap F=\phi$．従って，前述の2値性の原理は $T\cup F=F_m$ かつ $T\cap F=\phi$ と表現される．ここで $T\cup F=F_m$ は論理的に自明ではなく，$F_m-(T\cup F)\neq\phi$ の場合を排除するには真偽概念以外の仮定が必要である点に注意してほしい．2値性の原理は要請なのである[(4)]．一方，$F_m-(T\cup F)\neq\phi$ を認め，2値性の要請を排除するのが非2値性の原理であり，これは $F_m-(T\cup F)\neq\phi$ かつ $T\cap F=\phi$ と表現される．非空クラス $F_m-(T\cup F)$ の存在を認めた上で，このクラスの各文に真理値を付与するか，又は不定のままにしておくかで上述の2つの立場がでてくる．前者の立場では中間部分の細分化の如何によって種々の多値論理が形成されることになり，中間部分に一様の値を与えるとき，例えば Łukasiewicz の3値論理のシステムになり，どんな文も真理値として 1，1/2，0 のいずれかをとる．後者の立場（非多値性）は論理評価としては 1，0 以外は認めないが，1 とも 0 とも評価され

ない文のクラスを認め，このクラスには真理値を全く付与しない．

次に（F. II）の真理値の扱いを考えてみると，真理値は文の指示として存在論的レベルにある対象である．真理値を文の論理評価としてではなく，指示として考える場合でも上述の分類に対応して存在論的２値性の原理，

どんな文 φ も，$r(\varphi)=1_0$ 又は $r(\varphi)=0_0$.

と，存在論的非２値性の原理，

$r(\varphi)\neq 1_0$ かつ $r(\varphi)\neq 0_0$ となる文 φ がある．

に区別できる．（1_0, 0_0 は評価の 1, 0 ではなく，指示対象として存在する 1_0, 0_0 である．）存在論的非２値性の原理とは文の指示を真・偽以外にも認めることに外ならない．さらにこれは存在論的多値性と存在論的非多値性の部分に分類できる．存在論的多値性とは指示（対象）が 1_0 でも 0_0 でもない文も必ずその指示を持つということであり，r が全域関数であることを主張している．一方，非多値性はある文が 1_0, 0_0 以外のときは指示がない，つまり r が定義されないとする立場である．

$$
\begin{cases}
\text{論理評価的}\begin{cases}\text{2 値性}\\ \text{非 2 値性}\begin{cases}\text{多値的}\\ \text{非多値的}\end{cases}\end{cases}\\
\text{存在論的}\begin{cases}\text{2 値性}\\ \text{非 2 値性}\begin{cases}\text{多値的}\\ \text{非多値的}\end{cases}\end{cases}
\end{cases}
$$

上図，並びに上述の説明からわかるように論理評価的分類と存在論的分類は独立に与えられている．よって，両者の組合せが考えられ，Frege の論理に対する立場は論理評価的にも，存在論的にも２値性の原理に立っていると言える．こうして Frege の立場は組合せの１つにすぎなくなり何ら特権的立場ではないということになる．さて以後に述べる非 Frege 的論理（特に SCI）はそのメタの立場として論理評価的には２値性の原理に

立ち，存在論的には多値性の原理を採用する．従って，本稿の SCI は，

どんな文 φ も必ず指示（対象）$r(\varphi)$ をもつ．

という要請のもとでの論理評価的２値の論理である．これを図示しておこう．

$$
\begin{tikzcd}
\varphi(\text{文}) \arrow[rr] \arrow[d] & & t(\varphi) \\
r(\varphi) \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

t; truth valuation

(Frege 的)

$r(\varphi)=1_0$　又は　$r(\varphi)=0_0$

g;　$\{1_0,\ 0_0\} \to \{1,\ 0\}$

$g(r(\varphi))=t(\varphi)$

(非 Frege 的)

$r(\varphi)=$事態（上の 1_0, 0_0 も事態の１つにすぎない）

g;　事態の全体 $\to \{1,\ 0\}$

$g(r(\varphi))=t(\varphi)$

1.3. 結合子としての同一性記号

我々は 1.2. で言語の構成要素として文と名辞を導入し，それぞれの指示として事態，個物を考えた．古典論理では $=$ 記号は「同一である」という意味の２項述語として用いられるが，これは $\varphi=\phi$ の φ, ϕ が共に個物を指示する場合である．φ, ϕ が事態を指示する場合，つまり文の時，$\varphi=\phi$ という表現での $=$ 記号はどのように考えたらよいのであろうか．

φ, ϕ が文の場合，$\varphi=\phi$ の $=$ は述語ではない．述語とはいくつかの個体変項，定項から１つの文を構成する functor であるが，上の場合 φ, ϕ はそれのみで文である．この場合，$=$ 記号は文 φ, ϕ から文 $\varphi=\phi$ を作る働きをしているのである．つまり，連言や選言と同じ働きをする結合子なのである．[(5)]

結合子としての $=$ が何故必要なのかを述語としての $=$ と類比的に考えてみよう．ある個物を指示する名辞は一般には１つとは限らない．今，１つの個物が与えられ，それを指示する異なった名辞 φ, ϕ があるとしよう．この場合 $r(\varphi)$, $r(\phi)$ が共に，その１つの個物の指示であることを示

すために $\varphi=\phi$ が使われる．これを事態について考えてみよう．名辞—個物関係と同様，ある事態を指示する異なった言語表現はやはり一般に1つとは限らない．例えば「ラッセルが Principia Mathematica を書いた」，「Principia Mathematica はラッセルが書いた」は文としては異なっているがどちらも1つの事態を指示している．従って，同一の事態を指示する異なる文 φ, ϕ が与えられた時，その指示する事態が同一であるという関係を示すために $\varphi=\phi$ という表現が必要となってくる．ここで $\varphi=\phi$ は文 φ, ϕ の同義性の表現ではない点に注意してほしい．指示に関する同一性であって，その指示様式（＝意味）に関する同一性ではない．結合子としての $=$ を述語のそれと類比的に導入したが，両者は次の点で異なっている．結合子の場合，φ, $\varphi=\phi$ という前提から ϕ を帰結できるが，述語の場合，このような推論はできない．

結合子として $=$ を導入すると $\leftrightarrow$(material equivalence) とどこが異なっているのかという疑問がでてくる．これには次のような例で考えてみよう．

今日は5月1日である $\leftrightarrow$ 明日は5月2日である．

沖縄県には海がある $\leftrightarrow$ 山梨県には山がある．

上の2例では明らかに $\leftrightarrow$ が成立しているが，$\leftrightarrow$ の左辺，右辺はそれぞれ異なった事態を指示している．つまり，

沖縄県には海がある $\neq$ 山梨県には山がある．

である．従って，$=$ と $\leftrightarrow$ とは指示という観点からは厳密に区別されねばならない．これは同時に結合子としての $=$ の導入が存在論的に必要であることを示している．こうして結合子としての $=$ は論理結合子の1つとなる．

2. W-言語と理論

文の指示に関し多値をとり，論理評価は2値をとる非 Frege 的論理を

展開するために W-言語と理論のシンタックスを説明しよう．前章の意図を具体化したシンタックスは第1階の言語と理論のそれを部分的に拡張したものと考えることができる．その拡張は次に示す点にある．

（1） 変項には文変項と個体変項があり，個体変項ばかりでなく文変項についても量化が許される．（例； $\forall p(\varphi(p) \rightarrow \phi(p))$ 等） この量化の妥当性は次の理由による． Frege では文の指示は 1_0, 0_0 のみであり，r の値域は有限であった．我々は r の値域を存在論的多値性の立場から拡張し，r の値域を事態の総体と考える．これは事態を個体とは別の意味での対象として扱うことを認めることに外ならない．従って，事態全体のクラスを個体全体のクラスを認めると同じ意味で認めることが許される．かくして文変項の対象領域が個体の領域と共に容認されたことになり，個体変項の量化の妥当性を認めると同じ意味で，文変項への量化が可能となる.(6)
$\forall p(\varphi(p) \rightarrow \phi(p))$ は論理整式 (well formed formula) なのである．

（2） 結合子 $=$ は論理記号の1つであり，他の結合子（$\neg$, $\rightarrow$ 等）と同じ統語論的役割を持つ．一方，述語としての $=$ は W-言語が個体の扱いに関しては第1階の言語と同じであるから，全くそれと同様に考えてよい．従って，W-言語の $=$ は結合子としての場合が独自の扱いを受け，述語の場合は第1階の言語と同じである．こうして W-言語の $=$ の分析は結合子としての $=$ に限ってよいということになる．

(W-言語と論理的公理の定義)

使われる記号は文変項 (p, q, p_1, q_1, $\cdots$)，個体変項 (x, y, x_1, y_1, $\cdots$)，(n, m) 型の述語記号，(n, m) 型の関数記号，それに他の論理記号 ($\rightarrow$, $\neg$, $=$, $\forall$) とそれで定義される記号 ($\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\exists$) である．又，term (項)，formula (式) の定義は次のようである．

（i） すべての個体変項は term であり，文変項は，すべて formula である．

（ii） $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が formula で，$\mu_1, \cdots, \mu_m$ が term なら，$R(\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \mu_1,$

$\cdots, \mu_m)$ は formula であり，$f(\varphi_1, \cdots \varphi_n, \mu_1, \cdots, \mu_m)$ は term である．

(iii)　φ, ϕ が formula なら，$\forall \xi \varphi$（ξ は個体変項又は文変項）$\neg \varphi$, $\varphi \rightarrow \phi$, $\varphi = \phi$ は formula である．

次に論理的公理であるが，それは同一性を含んだ第1階の述語論理の公理系の拡張となっている．命題論理の部分では通常の公理系（以後これを SC と呼ぶ）の他に次のものを加える．

A1 (1)　$\alpha = \alpha$

(2)　$(\alpha = \beta) \rightarrow (\neg \alpha = \neg \beta)$

(3)　$(\alpha = \beta) \wedge (\varphi = \phi) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \varphi) = (\beta \rightarrow \phi))$

(4)　$(\alpha = \beta) \wedge (\varphi = \phi) \rightarrow ((\alpha = \varphi) = (\beta = \phi))$

(5)　$\alpha = \beta \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$

さらに次の ＝ に関する特殊公理を加える．

A2 (1)　$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \rightarrow ((x_1 = x_2) = (y_1 = y_2))$

(2)　$\forall \xi (\varphi = \phi) \rightarrow (\forall \xi \varphi = \forall \xi \phi)$　（ξ は任意の変項）

A2 (1) の ＝ の意味のちがいに注意してほしい．又，推論規則は Modus Ponens (M. P.) のみである．以後 SC に A1 (1)～(5) を加えた論理システムを SCI (Sentential Calculus with Identity) と呼ぶ．

次に C_n 操作子の定義を与えておく[(7)]．C_n (Consequence Operation) は formula のクラスのクラスからそれ自身への関数で，$\varphi \in C_n(\Phi) \Longleftrightarrow \phi_n$ が φ である証明の系列 $\phi_1, \cdots, \phi_n$ で $1 \leqslant i \leqslant n$ なる ϕ_i はすべて論理的公理か，Φ の要素か，推論規則使用の結果かのいずれかである，と定義される．この定義から，$\varphi \in C_n(\phi) \Longleftrightarrow \varphi$ が論理的定理．$\varphi \in C_n(\Phi \cup \{\phi\}) \Longleftrightarrow \phi \rightarrow \varphi \in C_n(\Phi)$ が成立する[(8)]．さらに，$\varphi \in C_n(\phi) \Longleftrightarrow \vdash \varphi$, $\varphi \in C_n(\Phi) \Longleftrightarrow \Phi \vdash \varphi$ と定義しておく．

上述のことからW-言語による理論の定義が可能となる．T が理論であるとは T が組 $\langle L, C_n, \Phi \rangle$ で，L はW-言語の1つ，Φ は L の文のクラスである[(9)]．

3. SCI の 諸 性 質

2章で定義した SCI の特徴は結合子 $=$ を有する点にあった．この点を中心に考察してみるが，SCI は‘$\varphi=\phi$’に関して事態 $r(\varphi)$, $r(\phi)$ の同一性の条件を与えるものではなく，事態の同一性をある条件で認めた上での論理であることに留意してほしい．この条件の最も厳しいものは $\alpha=\alpha$ (A1 (1)) という無内容の公理のみの条件である．(無内容という点では $\alpha=\alpha$ は論理的公理の資格を充分備えている．)

3.1. SCI の基本的定理

SCI の公理系は SC に A1 を加えたものであるから，SCI は SC の conservative extension である．つまり‘$=$’を含まないどんな formula φ についても，$\vdash_{SC}\varphi \Longleftrightarrow \vdash_{SCI}\varphi$ が成立する．従って，考慮せねばならないのは‘$=$’を含む formula であり，A1 の性質が問題となる．A1 のみから定理となる等式を自明等式 (trivial equation) と呼ぶことにすると，自明等式は $\varphi=\varphi$ の形の formula のみであることがわかる．(証明は truth valuation の節参照) 従って，例えば $\nvdash_{SCI}(p\vee q)=(\neg p\rightarrow q)$ 又，$1=p\vee\neg p$, $0=p\wedge\neg p$ として 1, 0 を定義すると，$1=q\wedge\neg q$, $0=\neg p\wedge p$ は左辺，右辺が違う形をしているという理由で自明等式ではない．

SC では $\longleftrightarrow$ が formula に関しての外延性を満たしている．つまり，

$$\vdash_{SC}(\alpha\longleftrightarrow\beta)\rightarrow(\varphi(\alpha))\longleftrightarrow\varphi(\alpha/\beta)).$$

(ここで $\varphi(\alpha/\beta)$ は $\varphi(\alpha)$ の α に β を代入して得られる formula を表わす.)

これが SCI では一般に成立しない．‘$=$’を含まなければ成立するが含む場合には次のような反例がある．上例の $p\vee q=(\neg p\rightarrow q)$ を用いると，$\nvdash_{SCI}((p\vee q)\longleftrightarrow(\neg p\rightarrow q))\rightarrow((p\vee q)=(\neg p\rightarrow q))$ となる．しかし，SCI では次の2つの事が成立している.[10]

(a)　(salva identitate)

$$\vdash_{\mathrm{SCI}} \alpha = \beta \rightarrow (\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha/\beta))$$

A1 (2)～(5) から任意の式 φ についてその中の部分式を同一の別の式で置換できることは容易にわかる.

(b)　(salva veritate)

$$\vdash_{\mathrm{SCI}} \alpha = \beta \rightarrow (\varphi(\alpha) \leftrightarrow \varphi(\alpha/\beta))$$

この関係は上の (a) と A1 (5) によって成立する.[11] (a), (b) 共に $\leftrightarrow$ に関しては成立していない. これは SCI の中で α を β で定義する際にメタ記号 (例えば '$=df$') でなく定理の1つとして導入しようとするなら, 定義の置換可能性によって $\alpha = \beta$ で定義せねばならないことを示している.

上で $\leftrightarrow$ と $=$ の相異を述べたが, SCI では,

$$\nvdash_{\mathrm{SCI}} (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p = q)$$

である. 今, この形の formula を公理として付加すると,

(F)　$$\vdash_{\mathrm{SCI}} (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p = q)$$[11]

となり, $p/q = q$, $q/p \leftrightarrow q$ の代入の下で,

$$\vdash_{\mathrm{SCI}} ((p = q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow (p = q) = (p \leftrightarrow q))$$

となる. 左辺が (F) そのものであるから,

$$\vdash_{\mathrm{SCI}} (p = q) = (p \leftrightarrow q)$$

を得る. 従って, (F) を公理として認めると SCI の formula の中の $=$ を $\leftrightarrow$ で置換してもよいことになり, SCI は SC に還元されることになる. (F) は Suszko が Fregean Axiom と呼ぶもので, その意味は (F) を SCI に付加することで, SCI は Frege の Begriffsschrift の体系, つまり SC と等しくなるからである.

(F) が SCI の定理でないことから $\leftrightarrow$ と $=$ の真理値表も当然同じではない. 2値論理のシステムで定義可能の2項結合子は 2^4 個しかないが, その中で (a), (b) の条件を満足する結合子は $\leftrightarrow$ のみであり, $=$ は (a), (b) を満足し, かつ $\leftrightarrow$ とは異なるから, $=$ は真理関数的でない結合子

であるという結論に達する.

3.2. 論理評価と指示

$=$ が真理関数的でないことを既に導入した r, t を用いて考え直してみよう. t の正確な定義と説明は次の節にゆずる. 非 Frege 的論理の立場は論理評価的 2 値, 存在論的多値であった. 従って, どんな文 φ についても, ある評価 t について $t(\varphi)$ は 0 または 1 と確定する. よって $=$ を含まない場合には $t(\varphi)$ の値は通常の真理値表から簡単に決定できる. ところで $=$ を含む場合, その評価は公理と整合的であればよいから次の条件を満たしていればよいことになる.

(1) $t(\alpha=\alpha)=1$

(2) $t(\alpha=\beta)=1 \Rightarrow t(\neg\alpha=\neg\beta)=1$

(3) $t(\alpha=\beta)=t(\gamma=\delta)=1 \Rightarrow t((\alpha*\gamma)=(\beta*\delta))=1$

($*$ は $\wedge$, $\vee$, $=$, $\leftrightarrow$ のすべて)

(4) $t(\alpha=\beta)=1 \Longleftrightarrow r(\alpha)=r(\beta)$

(条件 (4) は次節で改良される)

上の (1)～(4) の条件をみたす評価 t で $=$ を含んだ formula の評価を考えてみよう. そのためには $\alpha=\beta$ を考えれば充分である. t の値が 1, 0 より, $t(\alpha)\neq t(\beta)$, $t(\alpha)=t(\beta)=1$, $t(\alpha)=t(\beta)=0$ の場合が考えられる. 条件 (4) より $t(\alpha)\neq t(\beta)$ の場合 $r(\alpha)\neq r(\beta)$ より $t(\alpha=\beta)=0$ (1. 2. 参照) 他の場合は上の条件からのみでは決定できない. この決定不能性が $=$ の非真理関数性を示すと同時に値の決定に際し r が関与していることを暗示している.

$t(\alpha)$ \ $t(\beta)$	1	0
1	?	0
0	0	?

$t(\alpha=\beta)$ の決定を $r(\alpha)$, $r(\beta)$ を考慮した上で考えるために次の要請から出発する. この要請は SCI の成立基盤の 1 つである.

(要請) 事態は文の指示であり, それ以外ではない.

これを仮定することで次の事が帰結する.

事態の総数は文の総数を超えない．

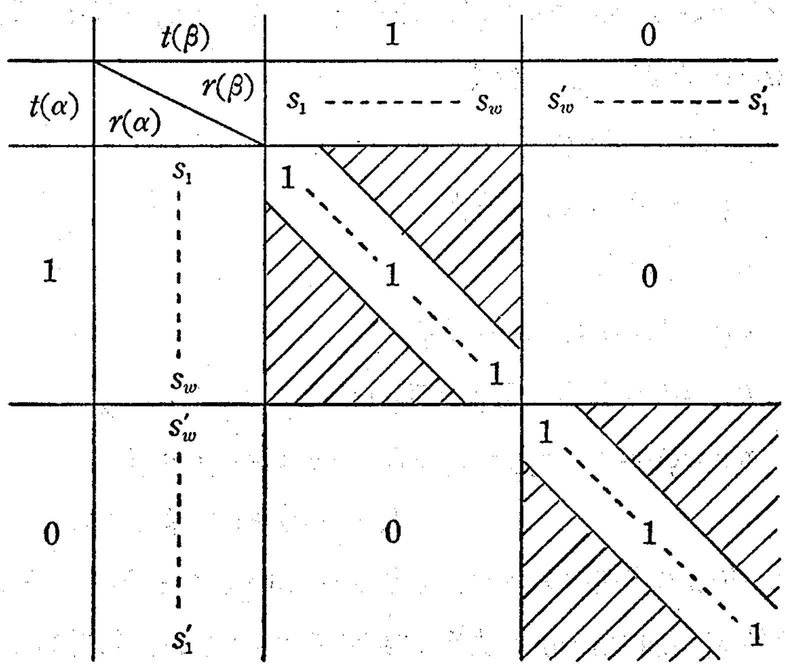
よって，文の総数を $\aleph_0$ 以下と仮定するならば，事態の総数も $\aleph_0$ 以下となり，文と事態の間の指示関数 r が多対1であることを考えると次の事が成立する．事態全体を R, SCI の文全体を F_m とすると，$r: F_m \to R$ であり，r の全体 B は，$B \subseteq P(F_m \times R)$. よって，

$$\mathrm{Card}\,(B) \leq \mathrm{Card}\,(P(F_m \times R)) = \mathrm{Card}\,P(\omega) = 2^{\omega}$$

(Card は Cardinality の略)

今，指示関数 r を1つ定めた上で $\alpha=\beta$ の真理値を考えてみよう．$r(\alpha)$, $r(\beta)$ はそのとり得る可能性として事態全体が考えられるが論理評価的2値性を認めている以上 $r(\alpha)$ は $t(\alpha)=1$ のクラスと $t(\alpha)=0$ のクラスに二分される．これは β についても同様である．

さて，$t(\alpha)=t(\beta)$ の場合であるが，まず $r(\alpha)$ のとりうる事態を $s_1, \cdots, s_w$, 各 s_i の反事態（s_i でないという事態）を s_i' とし，$s_w', \cdots, s_1'$ で反事態の列をあらわすと，列 $s_1, \cdots, s_w$, $s_w', \cdots, s_1'$ は $r(\alpha)$ の値の列となる．$r(\beta)$ についても同様．これから $r(\alpha)$, $r(\beta)$ のすべての組合せが得られる．



$r(\alpha)=r(\beta)$ という対角線上の組合せを考えてみよう．条件 (4) より，$r(\alpha)=r(\beta) \Rightarrow t(\alpha=\beta)=1$. よって，対角線上の値は 1 と決定する．以上のことを存在－真理値表にすると図のようになる．図の 1, 0 は評価の 1, 0 で指示の 1_0, 0_0 ではない．$1_0, 0_0$ は s_i のどれかである．又，斜線の部分は t の条件のみでは不明の部分で，t についての条件が定まらないと決定できない．ただ，どのような t を考えても斜線部分以外は図のように決っている．図はすべての評価 t が満たさねばならない必要最低限の評価の図である．すべての評価で 1 をとらないということは非自明等式 $\alpha=\beta$ が SCI の定理でないことを示している．

存在－真理値表の 1, 0 はすべて評価としての 1, 0 であることから純粋の存在表，つまり表の内部に指示としての 1_0, 0_0 を与える表が考えられる．この表は SCI では全く決定できない．

3.3. 論理評価の種類

次の定義で形式化された論理評価を truth valuation と呼ぶことにする．

＜定義＞　$t: F_m \to \{0, 1\}$ は次の条件を満たすとき，truth valuation と呼ばれる．F_m=SCI の formula の全体，$(\dot{\neg} 1)=0$, $(\dot{\neg} 0)=1$, $x \dot{\to} y=0 \Longleftrightarrow x=1 \wedge y=0$ と定義しておく．

(a)　$t(\neg\varphi)=\dot{\neg}\, t(\varphi)$

(b)　$t(\varphi \to \phi)=t(\varphi) \dot{\to} t(\phi)$

(c)　$t(\varphi=\varphi)=1$

(d)　$t(\varphi=\phi)=1 \Rightarrow t(\varphi)=t(\phi)$

(e)　$t(\varphi=\phi)=1 \Rightarrow t(\neg\varphi=\neg\phi)=1$

(f)　$t(\varphi=\phi)=t(\alpha=\beta)=1 \Rightarrow t((\varphi \to \alpha)=(\phi \to \beta))$
$$=t((\varphi=\alpha)=(\phi=\beta))=1.$$

この定義で前節の条件 (4) が形式化されていることがわかる．が，これで存在－真理値表の斜線部分が決定される訳ではない．斜線部分の決定を t

の与え方から考えてみよう．話を簡単にするため $\alpha=\beta$ の α, β が共に文変項である場合を考えよう．そのため等式 $p_i=p_j$ の評価 t が既述の定義を満足しているとする．存在-真理値表の不定の部分を任意に0又は1とする t の与え方がすぐに考えられるであろう．我々は対角線上の値は1でなければならないことを既に示したが，この部分のみを1にして他はすべてに0する評価がこれに対応する．これは，

$$t(p_i=p_j)=1 \Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{SCI}} p_i=p_j$$

を満たすものであり，$\{p_j|t(p_i=p_j)=1\}=\{p_i\}$. t がある同値関係の特徴数になっているとみるならば，その同値関係は，

$$p_i \mid\!\!\text{——}\!\!\mid p_j \Longleftrightarrow t(p_i=p_j)=1$$

で与えられる．するとこの場合の同値類は最も密なもの，つまりそれぞれ自分自身のみの集合となる．

これとは逆に最も粗い同値関係を考えてみよう．それは，

$$p_i \mid\!\!\text{——}\!\!\mid p_j \Longleftrightarrow t(p_i)=t(p_j)$$

で与えられるものであり，従って，

$$t(p_i=p_j)=1 \Longleftrightarrow t(p_i)=t(p_j)$$

となる．既述の表で不定の部分は $t(p_i)=t(p_j)$ の部分であり，これは上の同値関係から，$t(p_i=p_j)=1$ となり，$\leftrightarrow$ の真理値付与と一致する，$\mid\!\!\text{——}\!\!\mid$ の導入は $\{p_i|t(p_i)=0\}$, $\{p_i|t(p_i)=1\}$ それぞれのクラスを $\mid\!\!\text{——}\!\!\mid$ で同値類に分類することであり，この時どのような同値関係をとるかで評価が変ってくるのである．上で両極端の同値関係を与えたが，この間には種々の同値関係を評価の定義に矛盾しない限りで任意に設定できるのである．

さて，今までは話を文変項に限ってきたが，formula がそれの含む結合子の数に応じて帰納的に定義されていることから評価の定義もその定義に応じてなされるであろうことはほとんど明らかである．結合子の数に応じて部分評価が定義され，それの和集合をとることで評価が得られる.(12) こう

して SCI の論理評価は同値類のとり方に依存して無数にあることになる．(2^{ω} 以上である！) 既述の最も細かい同値類をとった評価を t^0 とすると，SC での評価の性質に類似した次の関係が得られる．

どんな評価 t についても，

$$t^0(\varphi)=1 \Rightarrow t(\varphi)=1.$$

よって，今すべての評価 t で，$t(\alpha=\beta)=1$ となることを，$\vdash_t(\alpha=\beta)$ とすれば，

$$\vdash_t(\alpha=\beta) \Longleftrightarrow t^0(\alpha=\beta)=1.$$

さらに SCI が評価に関して完全であることを考えれば，[13]

$$\vdash_{\mathrm{SCI}}(\alpha=\beta) \Longleftrightarrow t^0(\alpha=\beta)=1.$$

又，t^0 が自明等式のみを1にする評価であることを考慮すれば，非自明等式 $\alpha=\beta$ がは，$t^0(\alpha=\beta)=0$ となり $\nvdash_{\mathrm{SCI}}\alpha=\beta$ となる．(これが 3.1 の自明等式のみか定理であることの証明である．)

以上が SCI の評価の種類であるが，これは SCI と SC の相異をも示している．SC では各 formula を構成する atomic formula の評価が与えられればその評価からの評価を決定することは一意的である．この意味では評価には種類はないのであり，各結合子の評価方法は一通りに定っている．が，SCI では atomic formula の評価が定っていても，それから構成される formula の評価は決まらないのである．= 以外の結合子は一意的に決まるが，真理関数的でない結合子 = があるため，その評価決定のためには実質的には r の値を考慮せねばならないのである．我々は両極端の評価を r を使わずに決定したが，SCI を実際に用いてある事柄を考える場合には，適用しようとしている事柄に応じて適切な同値類を決定せねばならなくなる．その際，指示関数 r が不可欠となってくるのである．そして r による同値類の決定が論理的にではなく，経験的になされねばならないところに同一性記号 = が種々の問題を提起する原因があるのである．

又，どのような評価についても，

$$t(\alpha=\beta)=1 \Rightarrow t(\alpha \longleftrightarrow \beta)=1$$

であり，最も粗い評価では $=$ と $\longleftrightarrow$ が同じ値をとるということは，$\longleftrightarrow$ が同一性関係の限界であることを示している．我々が事態について「同一である」という時，論理的同値性はその必要条件ではあるが，十分条件ではなく，最も粗い同一性なのである．

4. SCI の拡張

この章では SCI と SC の関係を別の面から明らかにしたい．SCI に公理を漸次加えることで中間的な論理システムを提示し，SCI と SC の間隙をうめることで，両者の比較を具体化してみたい．

4.1. 中間的諸システム

SCI に次の形の formula を加え，それを TA と呼ぼう．

(1.1.)　$\alpha=\beta$　　for $\vdash_{\mathrm{SCI}}\alpha$, $\vdash_{\mathrm{SCI}}\beta$.

これは SCI-tautology はすべて同一であるという意味で，これによって，1 が単に特定の formula $p\vee\neg p$ の省略形ではなくなる．任意の α について，$\vdash_{\mathrm{SCI}}\alpha$ ならば $\vdash_{\mathrm{TA}}\alpha=1$ となり，1 は次のように定義してもよくなる．

(1.2.)　$$1=(\alpha\vee\neg\alpha)$$

又，$\vdash_{\mathrm{TA}}(\varphi=\psi)=1$ なら，$\vdash_{\mathrm{TA}}1$ より M.P. によって，$\vdash_{\mathrm{TA}}(\varphi=\psi)$．逆も明らかに成立するから，

(1.3.)　$$\vdash_{\mathrm{TA}}(\varphi=\psi)=1 \Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{TA}}(\varphi=\psi)$$

TA は SCI-tautology がすべて 1 と同一であるという公理を加えたものであるから，SCI では全く不定であった存在表は SCI-tautology の部分については 1_0 となる．(表を参照)

さらに TA に次の formula を加えてそれを IM と呼ぶことにする．

(1.4.)　$$((\alpha\rightarrow\beta)=(\beta\rightarrow\alpha))\rightarrow(\alpha=\beta)$$

この公理の付加で二重否定が可能となる．

(1.5.) $$\vdash_{\mathrm{IM}} \neg\neg\alpha=\alpha.$$

$\vdash_{\mathrm{SCI}} \neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$ より，$\vdash_{\mathrm{SCI}} \alpha \to \neg\neg\alpha$，$\vdash_{\mathrm{SCI}} \neg\neg\alpha \to \alpha$.

よって，(1.1.) より $\vdash_{\mathrm{TA}} (\neg\neg\alpha \to \alpha)=(\alpha \to \neg\neg\alpha)$.

(1.4.) から $\vdash_{\mathrm{IM}} \neg\neg\alpha=\alpha$. この証明と同じようにして，

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathrm{SCI}} \alpha \leftrightarrow \beta &\Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{SCI}} \alpha \to \beta \;\&\; \vdash_{\mathrm{SCI}} \beta \to \alpha \\ &\Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{TA}} (\alpha \to \beta)=(\beta \to \alpha) \\ &\Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{IM}} \alpha=\beta \end{aligned}$$

又，二重否定が IM で定理となることから，$\vdash_{\mathrm{SCI}} \neg(p \wedge \neg p)$ より，どんな SCI の formula φ についても，$\vdash_{\mathrm{SCI}} \neg\varphi$ なら $\vdash_{\mathrm{IM}} (p \wedge \neg p)=\varphi$. これは IM で 0 が一意的に矛盾式の定義となれることを示している.

(1.6.) $$0=\alpha \wedge \neg\alpha.$$

既述の $\vdash_{\mathrm{SCI}} \alpha \leftrightarrow \beta \Longleftrightarrow \vdash_{\mathrm{IM}} \alpha=\beta$ から IM では通常のブール等式がすべて定理となる．つまり IM はブール代数の 1 つの表現となっているのであり，SCI と較べると定理となる等式が非常にふえていることがわかる．又，明らかに IM の存在表は矛盾式の部分がすべて 0_0 と決定される．これは TA での結果も含めて，

$$s \text{ が恒真事態} \Longleftrightarrow s \text{ が } 1_0$$
$$s \text{ が矛盾事態} \Longleftrightarrow s \text{ が } 0_0$$

が成立することを示している.

次に IM に下の formula を加え，ZE と呼ぼう.

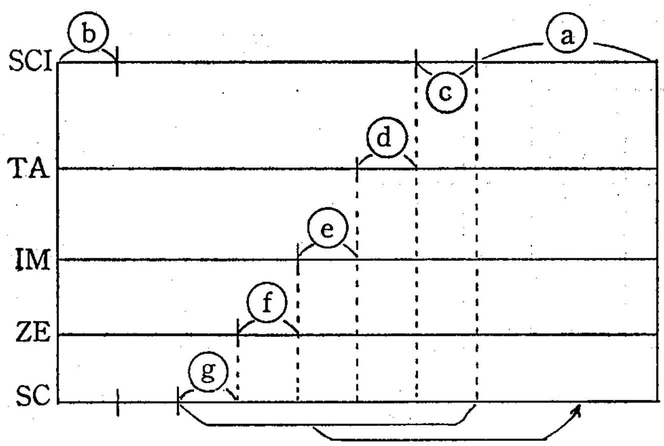
(1.7.) $$((\alpha=\beta)=1) \vee ((\alpha=\beta)=0)$$

これから $\vdash_{\mathrm{ZE}} ((\alpha=\beta)=0) \leftrightarrow \neg(\alpha=\beta)$ が得られるが IM でブール等式はすべて定理であることから，ブール等式はすべて 1 で，その否定が 0 であることがわかる．(1.7.) は等式についての排中律なのである.(14) これを等式に限らず任意の formula について拡張した formula,

(1.8.) $$(\alpha=1) \vee (\alpha=0)$$

を (1.7.) の代わりに IM に加えると SC になる.

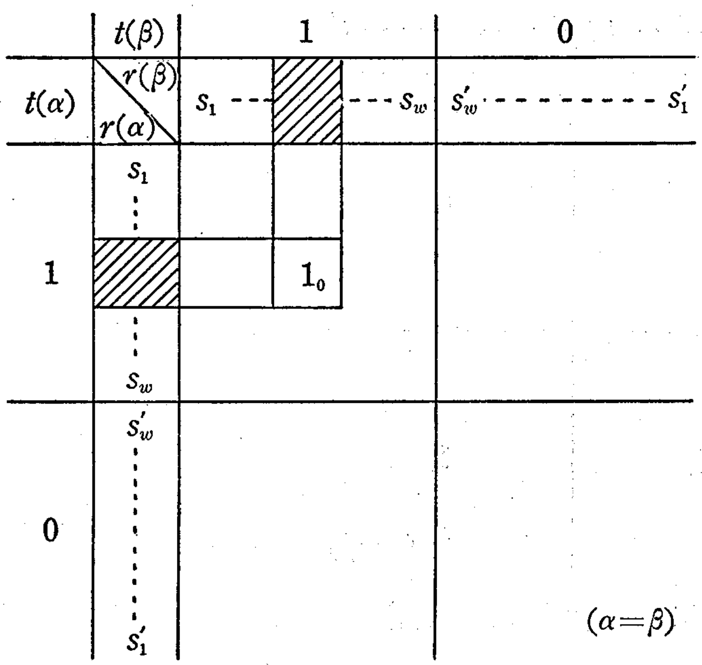
今，代表的な拡張システムを 3 つ考えたが，これらの関係を図にしてまとめておこう．又，存在-真理値表，存在表の変化もあげておこう．読者はこれらの図，表で SCI と SC の間のシステムの関係を理解していただきたい．



ⓐ: SC—恒真式
ⓑ: SC—矛盾式
ⓒ: trivial equations
ⓓ: $\alpha=1$ for $\vdash_{\mathrm{SCI}}\alpha$
ⓔ: valid Boolean equations
ⓕ: $\alpha=\beta$ for $\vdash_{\mathrm{SCI}}\alpha\leftrightarrow\beta$
　(α, β は Boolean equations)
ⓖ: $\alpha=\beta$ for $\vdash_{\mathrm{SCI}}\alpha\leftrightarrow\beta$
　(α, β は任意の formula)

※　SC のラインの ⤴ は ⓒ～ⓖ の部分の formula がすべて ⓐ に還元されることを示している．勿論，上の図は代表的な拡張システムを示しただけで各ラインの間には無数のシステムがあるのである．

(TA の存在表)



※　SCI では全く不定の存在表は TA では，左のように決定される．斜線の部分は

$$r(\alpha)=r(\beta)=1_0$$

であり，その部分については

$$r(\alpha=\beta)=1_0.$$

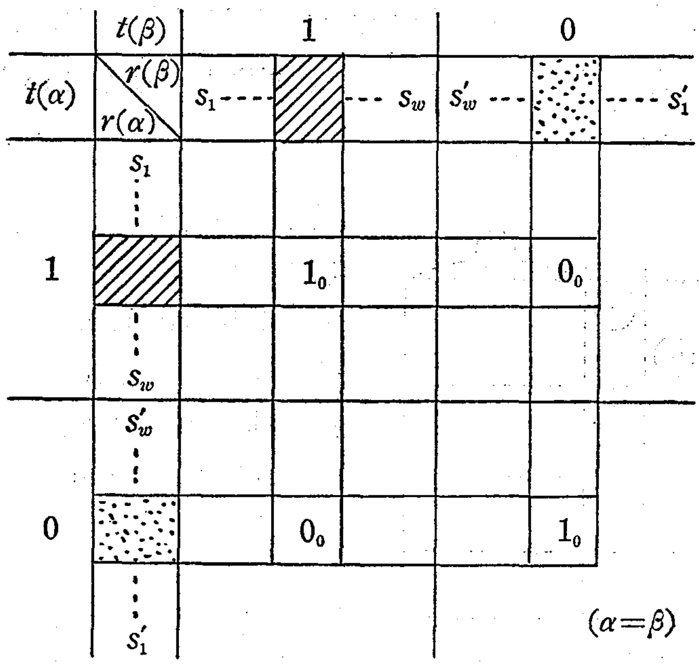
IM の存在表で点線部分は

$$r(\alpha)=r(\beta)=0_0$$

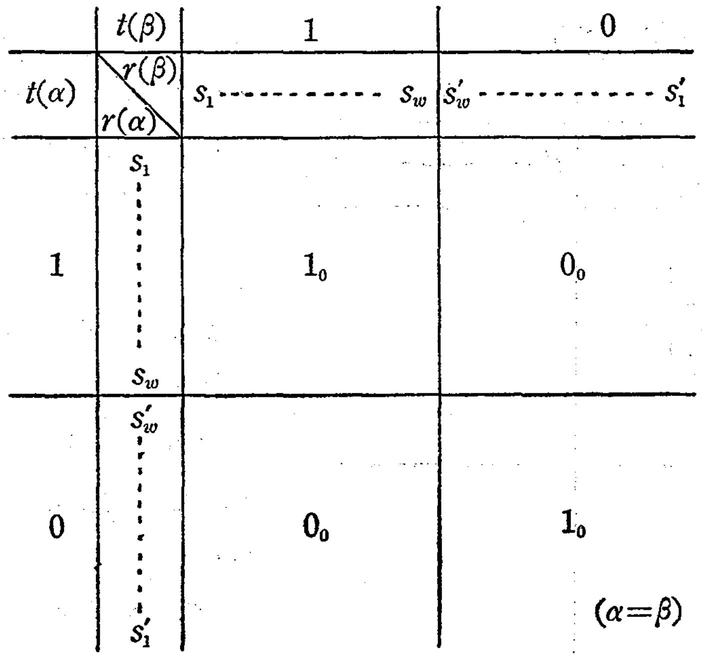
を示す．IM では，

$$r(1)=1_0,$$

(IM の存在表)



(ZE の存在表)



(α, β が共にブール等式の場合)

$r(0)=0_0$

となっている．

ZE の存在表は $\alpha=\beta$ の α, β が共にブール等式の場合を示してある．等式についての排中律から，

$$r(\alpha)=1_0 \vee r(\alpha)=0_0,$$

$$r(\beta)=1_0 \vee r(\beta)=0_0.$$

α, β の指示は 1_0 か 0_0 で，通常の真理値表と同じになる．しかし，α, β の少なくとも一方がブール等式でない場合には表は IM の存在表と同じままである．

存在–真理値表については，SCI の表を今示した各存在表に重ね合せれば，各システムでの表が得られる．SCI の存在–真理値表に各システムの存在表の値を加えたものがそれぞれの存在–真理値表なのである．こうして SCI では不定部分をもつ存在–真理値表と存在表は拡張によって $=$ と $\longleftrightarrow$ の相互置換の部分がふえるに従い次第に確定してゆき SC に至ると両者の表は真理値表として一致するのである．通常我々が考える真理値表は，存在–真理値表と存在表が SCI からの拡張の極限で合致したものなのである．

4.2. 拡張の過程

我々は $\vdash_{\mathrm{SCI}}\alpha \Longleftrightarrow \alpha\in C_{\mathrm{n}}(\phi)$ で $\vdash_{\mathrm{SCI}}$ を導入した．4.1. で考えた拡張例はいずれも SCI に特定の公理を加えたものであり，例えば IM の公理を α とすれば $\vdash_{\mathrm{IM}}\beta \Longleftrightarrow \beta\in C_{\mathrm{n}}(\{\alpha\})$ となる．ここで $\vdash_{\Phi}=<L(\mathrm{SCI}), C_{\mathrm{n}}, \Phi>$ で，$L(\mathrm{SCI})$ は SCI の言語，Φ は formula のクラスとして拡張の過程をまとめてみよう．

＜定義＞　次の条件を満たす列 $<\vdash_{Bi}|i\in I>$ を SCI の拡張列と呼ぶ．各 Bi は $=$ を含んだ SCI の公理とは独立の formula のクラスとする．

(1)　$\vdash_{B0}=\vdash_{\mathrm{SCI}}=<L(\mathrm{SCI}), C_{\mathrm{n}}, \phi>$

(2)　$\vdash_{Bi}=<L(\mathrm{SCI}), C_{\mathrm{n}}, Bi>$ で，どんな φ についても，

$$\vdash_{Bi-1}\varphi \Rightarrow \vdash_{Bi}\varphi.$$

(3)　$\vdash_{\mathrm{SC}}=<L(\mathrm{SCI}), C_{\mathrm{n}}, \{\varphi\}>$　ここで φ は $\forall\alpha(\alpha=1\vee\alpha=0)$

(4)　$\forall i\in \mathrm{I}$ (Bi は SC の conservative extension)

前節から明らかなように SCI の拡張列は定理としてふえるのが $=$ を含む formula であり，自明等式から始って $=$ を次第に $\longleftrightarrow$ に代えてゆき，最後には $=$ と $\longleftrightarrow$ が同じになるような列である．ここで問題となるのは拡張列の濃度，つまり I の濃度である．これを truth valuation を用いて考えてみる．

我々は既に SCI の評価に下限 (t^0) と上限 (t^+ とする) があることを述

べた．そしてこの間に無数の評価があり得るとも言った．

＜定義＞　評価 t_i, t_j について，

$t_i<t_j \iff \forall\alpha,\ \beta\in F_m(t_i(\alpha=\beta)=1 \Rightarrow t_j(\alpha=\beta)=1)$ すると，$\{t\mid t^0<t<t_+\}$ が SCI での評価の総体となる．我々は1つの評価を formula の結合子の数に応じて部分的に定め，その和集合として定めたが，その各段階毎に下限をとる評価と上限をとる評価の選択があることになり，t^0 と t^+ の間には少なくとも 2^ω 個の評価が考えられる，よって，

$$\mathrm{Card}\,(\{t\mid t^0<t<t^+\})=2^\omega.$$

$t^0<t^j<t^+$ なる t^j について，$T_j=\{t\mid t^j<t<t^+\}$ とすると，$T_0=\{t\mid t^0<t<t^+\}$，$T_+=\{t^+\}$ であり，$T_+\subseteq\cdots\subseteq T_j\subseteq T_{j-1}\subseteq\cdots\subseteq T_0$．各 T_j はそれぞれ1つの理論 Bj に対応するから，列 $(T)_j$ から拡張列 $\langle Bi\mid i\in I\rangle$ への 1:1 の写像 g が存在し，

$$g\,((T)_j)\subseteq\{Bi\mid i\in I\}.$$

故に，

$$2^\omega\leq \mathrm{Card}\ (\langle Bi\mid i\in I\rangle)$$

これは SCI から SC までの拡張過程には少なくとも 2^ω 個の理論のあることを示している．I は少なくとも連続体の濃度を持っているのである．上の説明では具体的な過程が不明であるが，1例として次のような過程を考えよう．SC では $(p\longleftrightarrow p)$ が成立するが，これを SC から取り除き，次の公理を SCI に加え，S_1 とする．

$$S(1):((p\longleftrightarrow q)\longleftrightarrow q)=((p\longleftrightarrow q)=q)$$

$S(n)$ まで定義されたとき，$S_{\mathrm{n+1}}$ は S_{n} から $S(n)$ を取り除き，次の公理を SCI に加えたものである．

$$S(n+1):\overbrace{((\cdots(p\longleftrightarrow q)\cdots)}^{※}\longleftrightarrow q)=\overbrace{((\cdots(p\longleftrightarrow q)\cdots)}^{※}=q)$$

ここで ※ は同じ形の formula でそこでの $\longleftrightarrow$ の数は $(n+1)$ 個である．又，$S(n)$ の否定を加えたものを S_n' とする。明らかに SCI から始まって各々について，$S(n)$，$\neg S(n)$ のどちらかを公理に持つシステム S_n, S_n' が

得られる．そして

$$\forall n \forall m (n \leq m \Rightarrow (\vdash s_m \alpha \Rightarrow \vdash s_n \alpha))$$

$$\forall n \forall m (n \leq m \Rightarrow (\vdash s'_n \alpha \Rightarrow \vdash s'_m \alpha)).$$

ここで列 $S_1, \cdots, S_n, \cdots, S_w, S_1', \cdots S_n', \cdots$ ‘S_w' は共に SCI と SC の間のシステムとなっている．

以上が SCI と SC の関係についての概略である．本稿では SCI の哲学的位置についての考察が中心になり技術的な面を紙面の都合上省くことになったが，結合子＝の哲学的意味は読者に理解いただけたことと思う．SCI は論理評価的に2値でありながら存在論的多値性を持つ．そのため結合子＝が $\longleftrightarrow$ の役割を担い，その特色は述語＝と類似しながらも独特な非真理関数的振舞をする点にある．この非真理関数性が論理評価を複雑化し存在-真理値表と存在表という，真理値表の基礎となるものを産み出すのである．真理値表は存在論的2値性の帰結の1つなのであり，SC は最も粗い ＝ 解釈（＝と $\longleftrightarrow$ を同じものとする解釈）であるとも言えよう．文の同一性ということが問題となる局面では SC では論理的同値性からしか問題と出来ず，やはり SCI が必要となってくるのである．

我々は SCI の拡張理論をいくつか考えた．TA では α が L(SC) の formula なら $\vdash_{SC}\alpha \Longleftrightarrow \vdash_{TA}\alpha=1$ が成立した．これは $\vdash_{SC}\alpha$ という SC のメタ表現が TA で $\alpha=1$ という形で表現できることを示している．さらに IM では α が L(SC) の formula なら $\vdash_{sc} \neg\alpha \Longleftrightarrow \vdash_{IM}\alpha=0$ が成立する．これらのことは SC のメタ表現 $\vdash_{SC}$ が ＝ 記号の導入によって W-言語で対象表現が可能なことを暗示している．$(\vdash_{SC}\alpha)=(\alpha=1)$ と定義すれば例えば次のことが証明できる．

ブール等式について，　$\vdash_S \vdash_{SC}\alpha \vee \vdash_{SC} \neg\alpha.$

（ここで S は ZE に定義式を加え拡張した理論）これは W-言語が第1階の言語の拡張（特に＝記号）になっていることの直接的結果である[15]．又，我々は SCI に関心を集中し W-言語の解釈を議論しなかった．W-言語に

よる理論のモデルを考えるとより一層第1階の理論の拡張になっていることが鮮明になる．近年ブール値モデルが通常のモデルの形式的拡張として展開されたが，このブール値モデルに極めて類似したモデルが W-言語について構成できるのである．丁度2値モデルがブール値モデルの特別なものであると同様に，2値モデルが特別なものとなるモデルが W-言語について構成されるのである.(16)

(注)

(1) Fraassen [1] p. 493 参照．排中律は論理的概念であり，2値性の原理は意味論的概念である．我々はここで排中律を扱っているのではない．

(2) このような立場は Łukasiewicz により初めて形成化された．(Łukasiewicz [1], [2])

(3) この立場を Strawson は presupposition との関係で “On Referring” で論じ，その延長線上で Fraassen は supervaluation という概念を用いて論じている．(Fraassen [1], [2], [3])

(4) 2値性の原理が要請であるという主張のこととは異なる説明については Łukasiewicz [1].

(5) 論理学における基本的な文法カテゴリーは Leśniewski に依れば，名辞 (n) と文 (s) のカテゴリーであり，それ以外のカテゴリーに属する記号はすべて functor と呼ばれる．Ajdukiewicz の書法に従うと，例えば ‘∧’ は s/s, s (2つの文から1つの文をつくる functor) のカテゴリーに属し，述語としての ‘=’ は，s/n, n (2つの名辞から1つの文をつくる functor)，結合子としての ‘=’ は s/s, s のカテゴリーに属する．

(6) ある理論が前提とする存在論と，その理論における量化との関係については Quine [1], [2], [3] 参照.

(7) Cn-operator は Tarski によって一般的に導入され詳細に研究された．(Tarski [1], [2])

(8) $p \to (q \to p)$, $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (q \to r))$ が成立し，Modus Ponens のみを推論規則として持つ体系ではこの定理が成立する．

(9) 論理とは Cn-operator で制限された言語であるという主張が D. Scott によってなされている．(D. Scott [1])

(10) (a), (b) の区別は Suszko [2] による．

(11) (F) は Fregean axiom と呼ばれるもので, (F) に同値なものとして以下のものがある.

(i) $\forall p\,(p=1 \vee p=0)$

(ii) $(p_1=p_2) \vee (p_1=p_3) \vee (p_2=p_3)$

(iii) $\exists p\, \exists q\, \forall r\,((r=p) \vee (r=q))$

(iv) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p=q)$

(12) ここでの主題は変項への valuation の与え方ではなく, それが定った時の formula への valuation の与え方にあることに注意してほしい. 又, SCI の valuation は formula の rank に応じて正確に定義出来ることも本文の叙述から予想できるであろう.

(13) SCI の完全性の証明は Bloom & Suszko [2] を参照. そこでの証明は Matrix の概念を用いている. 又, SCI が有限モデル性を持つことから決定可能性もいえる. (Lemmon [1])

(14) (1.7.) が排中律であるのは, $(\alpha=\beta)=1 \vee (\alpha=\beta) \neq 1$ と同値であることによる.

(15) $(\vdash_{sc}\alpha)=(\alpha=1)$ の定義のもとに ZE の拡張系 S で次のことがいえる.

(1) $\vdash_{s} ((\vdash sc\alpha \rightarrow \beta) \vee \vdash sc\alpha) \rightarrow \vdash sc\beta$

(2) $\vdash s \vdash sc\varphi\,(p) \rightarrow \vdash sc\varphi\,(p/\alpha)$

さらに, $\vdash sc\alpha \Longleftrightarrow \vdash s\vdash sc\alpha$ も成立する.

(16) W-言語の解釈のための構造は個体の Universe の外に事態の Universe (A) を持っている. A がブール代数的構造を持つことからブール値モデルとの類似性がでてくる. すぐに証明できることに次のものがある. 解釈 I が = を'同一である'と解釈するものならば, そこでは I が (F) を満足する解釈であること, I が 2 値解釈であることは同値である. (証明はブール値モデルのそれとほとんど同様)

REFERENCES

Bloom, S. L. "A completenss theorem for "theories of Kind W," *Studia Logica*, Tom XXVII, 1971, pp. 43-54.

Bloom, S. L. and R. Suszko. [1]. "Semantics for the sentensial calculus with identity." *Studia Logica*, Tom XXVII, 1971, pp. 43-45.
[2]. "Investigation into the sentensial calculus with identity." *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol XIII, No. 3. 1972.

Bloom. S. L. and D. J. Brown "Classical logics," Dissertationes Matimathecae Cll Rozprawy matymatyczne, Warsz. 1973. pp. 43–52.

Brown, D. J. and R. Suszko. "Abstruct logics," Dissertationes Matimathecae Cll Rozprawy mathmatyczne, Warszawa, 1973. pp. 9–41.

Church, A. C. *Introduction to Mathematical logic*, vol. 1, Princeton, N. J., 1968.

Cresswell, M. J. "Functions of propositions," *the Journal of Symbolic Logic*, vol. 31, No. 4, 1966, pp. 545–559.

van Fraassen, B. C. [1]. "Singular Terms, Truth-Value Gaps, and Free Logic", *the Journal of Philosophy*, LXIII, 17, 1966, pp. 481–495.

[2]. *Formal Semantic and Logic*, Macmillan Co., N. Y., 1971.

[3]. "Presuppositions, Implication, and Self-Reference," *the Journal of Philosophy*, vol. 70, 1973, pp. 136–152.

Frege, G. "On sense and reference," in *Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege*, eds., P. Geach, M. Black, Basil Blackwell, Oxford, 1960.

Lemmon. E. J. [1] "Algebraic Semanties for Modal Logics", *the Journal of Symbolic Logic*, vol. 31, No. 1, 1966, pp. 46–65.

"Algebraic Semantics of Modal Logics, II," *the Journal of Symbolic Logic*, vol. 31, No. 2, 1966, pp. 161–211.

Łukasiewicz. J., [1]. "On determinism," *selected works*, ed. L. Borkowski, N. Holland, 1970, pp. 70–130.

[2]. "Philosophical Remarks on Many-valued System" pp. 153–178.

Łukasiewicz, J. and A. Tarski. "Untersuchungen über den Aussagenkalkül," *Comptes rendus des séances de la Société de Science et des Letters de Varsovie*, Cl. III, 23. 1930. pp. 30–50.

Omyła, M. "Translatability in non-Fregean theories.", *Studia Logica*, vol. XXXV, No. 2, 1976, pp. 127–138.

van Quine. O. W. [1] "Designation and Existence, *the Journal of Philosophy* vol. 36, 1939, pp. 701–709.

[2] *From a logical point of view*, Harvard Univ. press., Cambridge, Mass., 1953.

[3] "Existence and Quantification" Ontological relativities and other essays, Columbia Univ. Press., N.Y. 1969, pp. 91–113.

Suszko, R. [1] "Ontology in the Tractatus of L. Wittgenstein", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. IX, No. 1, 1968.

[2] "Identity connective and Modality." *Studia Logica.* vol. XXVX, 1971, pp. 7–14.

[3] "Quasi-completeness in non-Fregean logic," *Studia Logica*, vol. XXIX, 1971, pp. 7–14.

[4] "Adequate models for the non-Fregean sentential calculus (SCl)", in, *Logic, Language, and Probability* eds., S. J. Bogdan and J. Niiniluoto, D. Reidel Pub., 1973, pp. 49–54.

[5] "Abolition of the Fregean axiom." *Logic colloquium*, Lecture notes in mathematics, 453, 1975, pp. 169–239;

Scott, D. [1] "On engendering an illusion of understanding." *the Journal of Philosophy*, vol. 68, 1971, pp. 787–807.

[2] "Advice on modal logic", *Philosophical Problems in Logic*, ed., K. Lambert, D. Reidel Pub. Co. 1970, pp. 143–173.

Tarski, A. [1] "Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, I; *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 1970, pp. 361–404.

[2] *Logic, Semantics, Metamathematics.*, Oxford, 1956.