Title	Booleの論理学
Sub Title	On Boole's logic
Author	西脇, 与作(Nishiwaki, Yosaku)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1976
Jtitle	哲學 No.64 (1976. 1) ,p.21- 38
JaLC DOI	
Abstract	The symbolic logic has been developed rapidly from the later half of 19th century. It is G. Boole who first founded the basis of this logic. His significant contribution was the consistent introduction of mathematical operations to the representation of logic. And these were performed by his nominalistic uses of symbols and by the principle of extensionality. His success, unlike all of his predecessors, depends on this two points. But as Boole's logic was theoretically refined and became to be called boolean algebra or algebra of logic, it's meaning changed gradually and it was investigated only as one of abstract algebras. Moreover as a result of Frege's inovative logical system, insufficiency of Boole's logic came to be clear, especially about quantification. Surely Frege's logical system is superior to Boole's in many respects. But we can't discard Boole's results, because of following two points. Frege's view about logic, that logic must be the universal logic, can't bring forth meta-logical results. Conversely Boole's relative logics become useful for them. Secondly in the studies of model theories we can't succeed without the knowledge of boolean algebraic structure of model's universe. This shows Boole's logic is not only an incomplete part of Frege's logic, but it supplies semantical parts to Frege's. Therefore we can conclude that modern logic is the union of Frege's system and Boole's relativistic view of logic.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000064-0021

Booleの論理学

西　脇　与　作

0.

論理学はこの一世紀の間に急速な進歩を遂げた．これは論理学が他の学問の場合と同様に哲学から離れて数学と結びついた為である．この離別には二つの行程が考えられる．一つは論理学を数学の一部門，つまり一種の代数として考えようとするものであり，他は論理学自身を厳密化することで数学で用いられる推論，さらには数学理論の明確化の基礎にしようとする意図である．これらは衆知のごとく，それぞれ Boole, Frege によってその第一歩が踏み出されたのである．

本稿ではまず Boole を中心にその前後の論理学の発展を明らかにし，次に Boole の論理学の性格を Frege, Russell のそれとの比較で両者の差異を示し，以上のことから歴史的にも理論的にも Boole 的論理と Frege 的論理の融合が現代論理学を形成しているという結論を出してみたい．又, Boole の確率についての考察も類似したことが言えるが，紙面の都合上省く．

1.

論理学の歴史は形式化の歴史であり，その第一形式化はアリストテレスによって，第二形式化は Frege によってなされたと言われるが，Frege に至るまでに幾多の努力がなされている．それらの中でまずライプニッツをあげねばならない．彼の形式化の第一の特徴は論理学を論理の諸法則の正しく反映される哲学的言語の構築として研究するという観点に立ったことである．彼の Ars Combinatoria (Lingua Philosophica) は彼の哲学的主

張と密着することで ‘Substitutio Salva Veritate’, ‘Praedicatum inest subjecto’ の二原理に基づいて試案されている．従って彼の論理学は理想的言語の構築という漸新な方法を用いながらも，その言語の枠組は彼の存在論の中でなされることになったのである．(1) が，論理法則と存在論の関係は Kant に於て切り離され，純粋に思考の形式として規定される．(2) こうして Frege までの論理学の発展は思考形式という範囲内でのライプニッツ計画の具体化と見ることができる．implicit に考えられたものを explicit に表現する(3)，という具体的作業は Boole によって不完全ながらも最初に統一的になされる．既に Lambert, Hamilton によって記号的形式化の試みはなされてはいる．が，いずれも不成功に終ったのはライプニッツと同じ理由，つまり命題の構成要素である概念の論理的表現に成功しなかったからである．概念は主語，述語として命題にあらわれるが，核心はその量化の表現（すべての人間，ある人間等）である．量化の適切な基準とその表現に成功するか否かが鍵であったと言える．例えば Hamilton は従来の主語のみの量化ではなく，同時に述語の量化をも考え，従ってアリストテレス流の基本命題の種類を 8 種類として形式化している．(4) この試みは誤っていたが，主語と述語が論理的に対等に扱われている点に注目せねばならない．任意の二つの概念を copula で結んだ形式で命題をとらえる考えは Boole の基本的考えの一つとなるのである．

(1) ライプニッツの文献は多いが，ここでは，Hidé Ishiguro, *Leibniz's Philosophy of Logic & Language*, Duckworth, 1972.

(2) Kant, *Logik*, Eng. trans., *Logic*, The Bobbs Merill, 1974, trans. by R. Hartman & W. Schwarz. 特に訳者の序を参照.

(3) Hamilton の標語.

(4) W. Hamilton, *Lectures on Logic*, vol. 2. appendix (C). London, 1866. 主語，述語の双方の量化ではアリストテレスの A にあたる $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ は表現できない．量化についての種々の試みは M. Gardner, *Logic Machines*, Dover, 1968, p. 37.

2.

量化の基準を外延化に徹底したのが Boole である．概念の外延化が正しい量化のための一つの条件であることを認識することで Boole は量化の部分的形式化に成功したのである．以下で彼の論理学に対する考えをみてみよう．

論理，つまり推論の諸法則は心的操作（mental operation）の法則であり，これはある記号システム内の計算法則としてとらえることができる．[1] これが彼の基本構想である．彼はまず代数記号が数量的解釈以外の解釈も許すということから，これを論理的表現に適用する．彼は記号は任意のしるしであって解釈をもち，それに対応する法則に従って結合されるものであるとしている．[2] この結合の全体が哲学的言語と彼が呼んでいるものであって，これによって思考法則としての論理は言語という形式で表現されることになる．

Boole は syntax と semantics を区別し，記号列の妥当性は syntax のみで決定されるべきであると考える．まず syntax が存在し，それに対する解釈は整合的である限りどのようなものであってもよいという考えは現代の形式主義の立場に類似している．[3] Boole のシステムで用いられる変項記号はクラス記号であるが，彼はこのクラス構成を外延的立場から次のように考える．我々は Universe of Discourse (以後 U と略す) から共通名辞を基準にして個体を心的操作によって選出することができる．この選出結果の総体がクラスである．[4] 今，共通名辞を P，選出操作を f_P，結果を $R(f_P)$ とすると，$R(f_P)=\{x|x \text{ is } P \,\&\, x\varepsilon U\}=\{x|x \text{ is } P\}\cap U$ (2.1) となり，$R(f_P)$ がクラスなのである．この f_P を関数と考えるならば，クラス記号も演算記号の一種と考えることができる．[5] 以上の選出によるクラス構成は心的操作であって論理システムはその結果であるクラスを基本単位として構成されている．つまりクラス構成は論理の前段階なのである．[6] ここ

に Frege との決定的差異が出てくるのである.

Boole は記号を唯名論的, 外延的に用いることで論理を一つの syntax (＝代数的方程式系) としてとらえ, その内容は解釈という形で独立して与えていることがわかった. 代数は種々の解釈が可能な抽象的計算のシステムと考えられるという数学内での認識, 思考は心的操作であり, それを外延的な記号使用によって表現すればそこには一定の記号結合の法則があり, これが代数システムの一つと同じになるという認識, この両方の認識が Boole の出発点であると同時に結論でもある.

(1) G. Boole, *Laws of Thought*, Dover, 1958, Ch. 1. 以後 L. T. と略す.
(2) L. T. p. 25.
(3) Boole の syntax と semantic の区別をこのように考えるのには異論があろう. むしろシステムの言語としての貧しさ故に解釈の多義性が生じたと考える方が自然であろう. 言語としての不充分性は algebra of Logic の欠点の一つであり, 解釈の多義性は Schröder にまで及ぶ.
(4) G. Boole, *Mathematical Analysis of Logic*, Oxford, Basil Blackwell, 1965, p. 16. 以後 M.A.L. と略す. 選出の考えは M. A. L. のみで L. T. では通常の意味でのクラス説明がなされている.
(5) Boole では U は論理記号であり, クラスは常に U の subclass になる.
(6) 従ってクラスつまり概念の組合せが論理の対象となり, $a \varepsilon A$ なる所属関係は前論理的な心的操作のレベルとなる.

3.

我々はまず syntax から見て行こう. 彼は論理を数学の応用の結果, 代数としてとらえたためそれ以上の性格付けはしていない. M. A. L., L. T. の間に発展がないのもこのためである. 本来彼の考えたシステムは現在我々がブール代数と呼ぶものとは幾つかの点で違っており, 以下で主な点を述べてみよう.

まず彼はクラス記号を二種類考える. 一つは通常のクラス記号である. 他は不定記号と呼ばれるもので, 既に導入されているクラスの不定の部分

(任意の subclass) を表わすものとして考えられている．この不定記号は Boole 自身に於ても二通りに使われており，その曖昧性の故 Boole 以後の発展においては破棄されるものである．(1) その使い方の規則は，

v が x の不定部分なら，$vx=0 \leftrightarrow v(1-x) \neq 0$ (3.1)

となり，実際の演繹においてはしばしば用いられている．

De Morgan に始まる U は現在のブール代数では Universe と 1 を区別して使うのに対し，U=1 としている．クラスのみの Boole のシステムでは破綻はおこらず，かえって成功の要因となったのである．(2)

演算記号では＋を排反的に用いる他は現在と同じである．L. T. の叙述からみて非排反的な用い方を否定している訳ではないが，排反的な ＋ を採用することで，＋ と － の逆演算が可能になる，より代数に近い計算の容易なシステムを考えたのである．Boole のシステムが論理的命題の表現よりはその計算を重視するという一つの証左である．

Boole が明確な形で述べている公理は，(1) $xy=yx$ (2) $x(y+z)=xy+xz$ (3) $x(1-x)=0$ (4) $1 \cdot x=x,\ 0 \cdot x=0$ だけであり，他の必要な公理は implicit に用いられている．(3) 又，Boole は暗黙のうちに 2 つのシステムを使い分けていたように思われる．2 つのシステムとは通常のブール代数と $\{0,1\}$ のブール代数のことである．(4) 後で述べる命題解釈の syntax が通常のブール代数であるところに確率解釈の生れる理由があるのである．実際に Boole の考えたシステムは＋，・，－の演算の定義された代数（環の一種）のうちで上の (3)，(4) を満たしている特殊な代数という形で規定されるのであって，この点で正に論理代数なのである．従って諸定理の証明は全く代数における証明と平行して行なわれることになる．(5)

(1)　v は Boole の定義 L. T. p. 61 では 0 とならない不定クラスであるが方程式の展開では 0 になってもかまわない場合がある．例えば，$x(1-y)=0$ を y について展開すると，

$$y=\frac{1}{1-0}x+\frac{0}{0+0}(1-x)$$

$$=x+\frac{0}{0}(1-x)$$

$$=x+w(1-x).$$

不定クラス $w=0$ でも $y=x$ からもとの式は $x(1-x)=0$ で，これは公理である．このようなことから v は以後使われず，例えば $y=vx$ は $xy \fallingdotseq 0$ に変形される．(Lewis & Langford, *Symbolic Logic*, Dover, 1959, ch. 3.)

(2) U の導入は de Morgan, *Formal Logic*, London, 1847, p. 37. Boole が U＝1 としたのは 2 の注 (6) より ε がシステムにないためであり，むしろ現在の如くUと1を区別すると誤りになる．

(3) Boole の公理については M. A. L., pp. 15～20. L. T. ch. 3.

(4) Boole のシステムと現在のブール代数はすでに述べたように異るが，システムの組み方以外でも相異がある．現在のブール代数は集合論的 (Sikorski, Halmos の著作) と代数的 (S. Rudeanu, *Boolean Functions and Equations*, North Holland, 1974.) に分けられ近年は前者が中心となっている．Boole のシステムは後者に属する．Boole の意図は Boolean function の解析にある．

(5) Boole の論理についての定理は演繹計算のためのものであり，現在でも重要な役割を持っているのは展開法と消去法である．前者はいわゆる正規形式の構成方法であり，後者は変項の消去であり，それぞれ1変項の場合には $f(x)=x\cdot f(1)+(1-x)f(0)$, $f(1)f(0)=0$ と表わされるものである．Boole の方程式解法については，J. Hooley, "Boole's method for solving Boolean equations", *Math. Gaz.*, **50** (1966), pp. 114–118.

4.

Boole は論理を方程式のシステムとして展開するが，その解釈として (1) クラスとしての Term (2) 命題（二値，確率）の二種類を与えている．[1]

Term 解釈は L. T. で第一種の命題 (primary proposition) による解釈として論じられているが，実質的には伝統的論理学での定言命題を方程

式として解釈したものである.(2) 従って命題の方程式による表現，変換，三段論法の解法が主要問題となる．定言命題は A, E, I, O の 4 種に分類されているが，これは次のように表現される．$A.\ x(1-y)=0.\ E.\ xy=0$ $I.\ xy=v\ O. x(1-y)=v$. ここでの問題はまず命題と方程式の対応関係が明確でないという点である．例えば，Some X's are Ys は $y=vx$, $vx=vy$, $vx(1-y)=0$ のいずれの解釈ともなる．逆に $y=vx$ は All *Ys* are *Xs*, Some *Xs* are *Ys* と二様に解釈できる．この原因は Hamilton について述べたように主語と述語が形式化の時同等に扱われるためであり，記号化が命題構造を正しく反映していないためである．上の例では $y=vx$ の x, y のどちらが主語かはそれのみでは全く判別出来ないのである．さらに論理的性格の判然としない v の使用である．部分クラスであると同時に計算結果の不定係数 ($^0/_0$, $^1/_0$) でもあるのである.(3)

次に三段論法の解法例を与えておこう．2 格の AE を考え，それぞれ前提を，

$x(1-y)=0$ (All *Xs* are *Ys*) $zy=0$ (No *Zs* are *Ys*)

とする．二式より $x(1-y)=zy$ とし，$x-xy-zy=0$.

$f(y)=x-xy-zy$ とおき，$f(1)=-z, f(0)=x$.

消去法で $f(1)f(0)=-xz$.

故に $xz=0$ つまり No *Zs* are *Xs*.

実際には連立方程式の解法と同様にすればよいのであり，戦術的には簡略化されるし，一般的解法も可能である.(5) 又，結論に不定記号が出る場合には (3.1) の条件が満たされるように解釈が与えられねばならない．

Term 解釈は任意のブール代数の応用と考えられるが，命題解釈では現代の確率論同様 metalogic として二値論理を用い U を構成し，そこでブール代数的演算をしている．命題解釈は Boole が第二種の命題 (Secondary Proposition) と呼ぶもので主に If then の形の命題である．伝統的論理学での仮言法に対応するもので，Boole は命題についての命題であると

している．従って変項の値は命題となる．彼は第一種の命題を $X, Y, \cdots$ で表わし，それらが真となることを $x, y, \cdots$ で表わす．彼はこれを次のように考える．命題は何かを表現している．そしてその表現している世界の状態に依存して真偽は決ってくる．$x, y, \cdots$ の働きは $X, Y, \cdots\cdots$ のつくる可能的世界からそれらが真となる場合を選出することである．この場合の可能的世界とは与えられた命題群の論理的に可能な組合せの総体であって，これを U と考え，値 1 を与える．例えば命題 X, Y について考えるとその可能的世界は次の 4 つの場合からなり，それぞれの選出表現が得られる．(5)

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{lll}
1. & X\text{真}.\ Y\text{真} & \cdots\cdots xy \\
2. & X\text{真}.\ Y\text{偽} & \cdots\cdots x(1-y)
\end{array}\right\} x \\
\left.\begin{array}{lll}
3. & X\text{偽}.\ Y\text{真} & \cdots\cdots (1-x)y \\
4. & X\text{偽}.\ Y\text{偽} & \cdots\cdots (1-x)(1-y)
\end{array}\right\} (1-x)
\end{array}
$$

$$\text{和}=1 \qquad \text{和}=1$$

以上のような考え方は命題のブール代数というよりは，Carnap の状態記述の考えにほとんど同じものである．従って Boole はここから容易に確率解釈に入ってゆけたのである．

（1） L. T. p 68. 解釈の多義性は 2の注（3）.

（2） Boole の命題分類は定言法，仮言法に由来しており，現在からみればこの分類は誤り.

（3） 演繹の途中は解釈不可能でも結果に於て正しければよいという考えのあらわれであり，これは Boole の数学的研究（演算子の自由使用）から影響している．演算子については，G. Boole, *A Treatise on Differential Equations*, Chelsea Pub. C.

（4） 実践的解法は M. A. L. p. 32. 一般的解法は S. Rudeanu. 前掲書 ch. 10. p. 249.

（5） U の解釈は，L. T. pp. 64–66.

5.

Boole のシステムを概観したが，彼の結果の評価のまえに algebra of logic の歴史的展開を簡単に述べておこう．

Frege までの時期は Boole の idea の整備期であり，その諸結果を通してブール代数が論理のシステムとしてよりは数学のシステムとして進歩することになるのである．これはブール代数そのものの性格からして自然な進展であったと言える．大別して発展は論理的整備時期と数学的整備時期に二分できる．前者は Schröder までであり，後者はその後の抽象代数の一つとしての発展時期である．後者の時期には Frege, Russell のシステムがすでに登場している．前期は Boole で不明確であった諸点を解明する方向で Jevons の再構成から始まる．(1) 彼は論理と数学の関係については Boole とは反対に，論理学から数学がつくられるべきであると考える．具体的には Boole の排反的＋を非排反的に用いた点と U を logical alphabet として各方程式毎にその U を設定した点があげられる．

Peirce は implication 概念の分析を通して Boole のシステムを幾つかの点で研究しているが，形式論理にとどまらず記号論一般に関心があったためか，論理代数の範囲では Mccoll の方がより整った形で整備している．(2) 既にみたように Boole に於ては命題とクラスのどちらに優位性を与えるか議論の余地を残していたが，Mccoll は命題を基礎にしてシステムを組み，そのため implication sign として $A{:}B$ (If A then B) を $A=AB$ と定義している．又 (Peirce とは独立に)，Mccoll も Boole 同様確率論への応用を考えている．

これらの結果の集大成が Schröder の仕事であり，特に original な要素を含んではいないが，論理代数の内容と形式が一応完成するのである．(3) そしてその特徴は，

(a)　存在論との遊離：思考の法則の確立という形で論理学の形式化を

図ってきた論理代数は，その基本単位をクラス（あるいは命題）と考えることで個物をシステムから消去してしまった．このため論理代数は概念の組合せの法則となり世界の一面的，非分節的理解にとどまるのである．

(b) 言語としての不充分性： 基本的にはクラスを変項とする代数的等式のシステムであるため，計算面での有効性は大であるが命題の表現という点では不充分になる．

これらの理由，さらには Frege-Russell の論理システムがあらわれたために Boole のシステムは論理システムとしてよりは抽象代数の１つとして発展することになる．数学の一理論としてのブール代数はまず公理化から始まる．これは Huntington, Bernstein によってそれぞれクラス，命題の部分が公理化される．(4) そして最初のうちはブール代数の演算の種類から環の一種として研究されるが，Birkoff によって束の一つとして定義され，抽象代数一般の中での位置が確立される．(5) 又，群と同様その Universe が不定であったのが，Stone の表現定理により，集合束との同型が証明され，集合論の中での理論展開が始まる．

一方論理と代数の間の演算の類似性は以来強調されて来たことだが，その統一的研究が Whitehead によって Universal Algebra として提唱された．(6) ここでは各抽象代数間の関係（準同型，同型），既にある代数から新しい代数を構成する仕方が主になってきて，ブール代数は抽象的代数の一つとしてその相対的地位のみに関心が払われることになる．

後期の特徴は論理システムとしてつくられたブール代数がその意味を変化させ，代数理論としてのみ取り上げられるようになった点にある．が，これらの代数理論としての基礎研究が後の metalogic の発展をある程度準備することにもなったのである．

(1) W. S. Jevons, *Pure Logic*, London, 1864. 又論理代数全般については J. Jörgensen, *A Treatise of formal logic*, vol. II. Copenhagen & London, 1931.

(2) C. S. Peirce, *Collected Papers*, III, Exact Logic. Harvard Univ. Press, 1933. H. Mccoll, " The Calculus of equivalent statement ", *Proc. London Math. Soc.*, **9** (1877-8) pp. 177-186, **10** (1878), pp. 16-28, **11** (1879-80), pp. 113-121.

(3) E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Leipzig, Teubner, 1875.

(4) E. V. Huntington, " Sets of indepndent Postulates for Algebra of Logic ", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **5** (1904), pp. 288-309.
E. A. Bernstein, " Sets of Postulates for the logic of Propositions ", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27** (1925) pp. 472-478.

(5) G. Birkoff, *Lattice theory*, AMS Providence, 1948.

(6) Whitehead は正に提唱したのであり具体的成果はその後の代数の発展による. P. M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper & Row, 1965.

6.

Boole の考えたシステムは次第にブール代数として抽象代数化していった. そして Frege の論理システムが Russell を通して次第に定着化するにつれ一層ブール代数は論理から離れてゆくことになる. Boole の論理学と Frege の論理学はこのようにみると相反したものにみえる. が, 論理に違いはないのでありそこには対立する以外の関係があるはずである. 以下でこのことを考えてみよう.

まず Frege にそって簡単に述べておく. Frege は従来までの論理 (主に論理代数) とは全く違った命題形式を基本に選ぶことで, アリストテレス的論理学を根本から変えた.(1) 彼のシステムは,

・命題関数とその演繹計算システム

・量化理論と形式系の設定

・数系列の論理的定義

からなり, 独特の表記法を用いている. 彼の特徴はこれらのことが彼の哲学的主張と密接に結びついている点である. 自らの作り出したシステムを用いて, 言語分析, 存在論, 意味論を独自な形で研究している.(2)

現代論理学の基礎となる Frege の論理と Boole のそれとの相異を幾つかの点で比較してみよう．

(1)　計算体系と言語体系

命題の把握を Boole はアリストテレス的に $S+V$ の形式でとらえ，その外延的関係を記号化する．これに対し Frege は命題を関数という形でとらえ，いわゆる論理的文法を作り出す．Russell によって命題関数 (propositional function) と呼ばれるようになった関数形式がどのような意味をもち，その範囲の設定，構成方法はどうなのかという点では不明確ではあるが，この形式によって通常の叙述文はすべて記号化が可能となる，その上この関数形式は個物を変項の値として持つことから単なる概念表現にとどまらず，構造をもつ内容表示が可能となる，つまり命題そのものが最小単位であった Boole のシステムよりは一段分節化が進んだのである．又，システム内での表現形式は Boole の場合が方程式，Frege は関数となり，この点からも後者の方がはるかに事態をよりよく表現することができる．この差は形式化されたものを日常的文に直す場合に端的にあらわれてくる．実際，方程式を文に翻訳することは不可能に近い．このようにみてくると計算の明解さから言うなら Boole のシステムの方が機械的に処理可能という点ですぐれているが，言語としては Frege のシステムの方がより強力であることがわかる．従って Boole のシステムは計算のための記号化，計算に応じた言語 (case by case languages) であり．Frege のそれはすべての科学的知識の再記述の可能な分節的言語 (universal language) であると結論できる．

(2)　外延性，抽象性，量化．

我々はすでに論理学のライプニッツ以後の歴史が量化の正しい形式化を目指していたと指摘したが，この点でも Boole の考えを論理的に一層明確に定式化したのが Frege である．Boole は心的操作として U から共通名辞によって個物を選出することでクラスを構成した．この選出操作は心

理的段階のものであり，選出関数と彼が呼ぶものはその結果のみが記号化されていて，途中の過程は一切 explicit にされていない．（式 (2.1) 参照）この操作を命題形式の革新によって明確にしたのが Frege である．彼の方法は抽象の公理と呼ばれるもので，

$$\exists y \forall z \ (z\varepsilon y \longleftrightarrow \Phi(z))$$

と記号化されるが，これはある述語Φが与えられた時常にそこから$\{x|\Phi(x)\}$なるクラスを構成できることを表わしており，(2.1) の Boole の選出関数の論理的表現になっている．ただ Frege の場合変項 x の領域がない．つまりどのような x でもよいのである．Boole の場合 x は U に制限されており，云わゆる Paradox は免れている．

クラス構成の手続きが明らかになることによってクラスの同一であることの基準も明らかになる．クラスが要素から形成されている限り，その要素が等しいことで同一性の基準が得られることになる．こうしてライプニッツの，そして Boole の同一律 $x=x$ は外延性の公理という形でその論理的表現を得ることになる．

Boole がその発想を持ちながらも Frege の見解に到達できなかったのは伝統的な名辞の論理の立場に立ったためであり，外延的な概念構成を心理的レベルでおこなったためである．

以上の差が量化において明確にあらわれてくることになる．Boole は all, some をクラス全体，クラスの一部（v 記号）で処理する，いわば全体―部分の形でとらえる．量化はクラスのレベルでおこなわれているのである．一方 Frege にとってはクラスの全体，部分をそれを構成している個物を用いて表わすことが可能である．こうして個物についての量化という現在の意味が得られることになる．結局，正しい量化に於て最も重要な点はクラス構成の場合の抽象の公理であり，Boole も Frege も共に外延的にクラスを考えながらこの公理の定式化が分岐点となったのである．

(3) 構造と推論

Booleにとって論理システムは数学の応用の一つである．この姿勢は論理代数，その後の抽象代数としてのブール代数研究に共通するものであり，端的にBooleは新しい数学の分野を論理的法則の規則性をヒントに作り出したと言ってよいであろう．既にブール代数は言語としてはその表現能力の点で劣ると言ったが，そもそも代数は幾つかの演算に関して閉じた集合の構造であり，従って言語としてよりは言語によって表現される側のものなのである．さらにブール代数は本質的には言語と関係のない数学的構造であり，言語はそのようなブール代数の一つの解釈としてあてはまるという関係にあるのである．論理回路，Lindenbaum 代数はこの具体例なのである．ではブール代数の一つとして言語をみた場合，どのようなことが言えるのか．まず言語法則として形式化されていた論理法則はあるUの構造として把握されることになる．勿論このブール代数を扱う論理はメタ論理としてブール代数化された論理と区別されねばならならない．これはいわば論理システムを構造として外から眺めることになるのであり，そこでは論理の持つ平面的構造が鳥瞰できるという意味で種々の論理（2値，多値，様相等）の相互関係がはっきりととらえられることになる．成立意図の異る論理システムが広義のブール代数（Pseudo Boolean Algebra, Implicative Algebra 等）という枠内で統一的に比較可能となるのである．

が，言語としての役割をブール代数は失っているのであり，従って推論過程の分析には有効でなくなる．又，推論に必要な表現という点でもある対象についてそれがブール代数的であると言えるための表現手段をブール代数自身では持っていない．論理をダイナミックな思考の構造の基本的性質（＝推論法則）であるとみた場合，それを適確に表現する言語がなければ論理はブール代数として構造化されることもできない．この意味で論理にとってはまずその言語化が第一義的であると言える．実在の記述のための lingua characterica は Boole の論理システム＝概念の構造に先行せね

ばならないのである．記述されたものの論理構造の研究のためには如何に記述するかがまず解決されねばならない．

(4) 唯名論と実在論

Boole のクラス概念は共通名辞の外延であり，論理代数のシステムで登場するのはこの外延的クラスと分節化されていない命題のみである．そこでは個物は登場してこない．このことから Boole 的地平では個物の存在と概念の存在の関係，そして実在の問題は出てこないことがわかる．論理代数の研究者達は一般に論理と存在の関係についての判明な哲学的態度を表明しないが，既に述べたことからも明らかな様に彼等のシステムが存在と直接に結びついたシステムではなかったということがその理由なのである．さらには Boole の記号に対する唯名論と，ブール代数のその後の発展方向にも存在への問いを消去した原因がある．代数の一つとしてしまうことで，存在の問題は数学的存在という数理哲学内の問題にすりかえられ，ブール代数とは離れてしまうのである．

Boole の abstract logic に反対したのが Frege であり，彼は実在論を前面に押し出す．Boole のシステムと対照的に彼のシステムが個物についての記号表示を持つ点を考えれば，この態度は自然なことである．こうして記号は実在する対象についての記号であると認識され，命題関数の変項は object として，関数自身は概念としていずれも実在性をもつことになる．又，変項の領域の普遍性から彼の論理システムは実在界の記述のための普遍的言語として規定されることになる．

以上の4点の比較を通して両者の論理に対する考えの相異を述べたが，これらのことから帰結することとして，Boole の U は a universe であり，a relative universe であるのに対し，Frege のそれは the universe, the absolute universe であることがわかる．既に抽象の公理でも明らかになったように Frege のシステムでの変項の領域は限定されておらず，実在界全体なのである．従って Frege の立場では論理システムの外に出

るということは，言表不能な世界に出るということであり無意味なこととなる．Boole 的立場からはブール代数という形で論理を外からみることが可能であった訳だが，Frege では不可能なことになってくる．実在世界が1つしかない以上，その論理的システムも1つしかないのである．故にメタ論理は一切無意味で不可能となる．従って論理システムの完全性，整合性は何ら証明する方法がなく，もしそれら企てが有意味であるとすれば統計的，実験的な検証で confirm する以外には方法はなくなってしまう．(3)

(1) G. Frege, *Begriffsschrift*, Eng. trans., *Conceptual Notation*, Oxford Univ. Press, 1972, ed. T. W. Bynum.
Translations from the Philosophical Writings of G. Frege, ed. P. Geach & M. Black, Basil Blackwell, 1960.

(2) Frege の存在，意味については次のようにまとめられる．
φ: name 又は sentence, $r(\varphi)$: the referent of φ.
$s(\varphi)$: the sense of φ.
$t(\varphi)$=truth value of a sentence φ.

$$\begin{tikzcd} s(\varphi) \arrow[dr, "f"'] & \varphi \arrow[l] \arrow[r, dotted] \arrow[d, leftrightarrow] & t(\alpha)=1 \text{ or } 0 \text{ if } \varphi \text{ is a sentence.} \\ & r(\varphi) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

r, s, t の関係は，(1) $r(\varphi)\neq r(\phi) \longrightarrow s(\varphi)\neq(\phi)$
(2) $t(\varphi)\neq t(\phi) \longrightarrow r(\varphi)\neq(\phi)$

sense と referent については，$\exists f\forall\varphi(f(s(\varphi))=r(\varphi))$ が Frege の主張，又(2) $\exists g\forall\varphi(g(r(\varphi))=t(\varphi))$ と同値，以上のことは R. Suszko, "Abolition of the Fregean axiom", *Logic Colloquim*, Lecture Notes in Math. 453, Springer, 1975, pp. 171–173. 又存在論は，野本和幸，"ゴットロープ・フレーゲの存在論"，思想 1974, pp. 39–63.

(3) この状態からメタ論理への移行時期で Herbrand を忘れてはならない．J. Herbrand, *Ecrits logiques*, P. U. F., 1968.

7.

6で述べたことから現在の論理学が Boole 的観点で Frege 的システム

を用いていることがわかったであろう．Boole 的論理は不完全な抽象的部分として Frege 的論理の一部分にあるだけではないのである．確かにFrege のシステムは論理のシステムとしてははるかにすぐれたものだが6で述べたその哲学は Russell に受けつがれ論理についての考察，つまりメタ論理を無視することになったのである．実際，論理についての metatheorem が生れるのは1915年になってからである．この意味では Löwenheim の定理はそれまでの Frege-Russell 的見解をかえる出発点になったと言えるのである．(1) この自覚は Herbrand, Gödel に於て明らかになるとはいえ正にモデル論の誕生なのである．さらに単にメタ定理というだけではなく，その内容が形式的な論理システムの意味論的部分，つまりシステムのモデルについてであることに注意せねばならない．モデルは形式系の整合性を保証する具体的な構造をもった universe であり，ここでは必然的にブール代数的構造が見出されるのである．このことは Gödel の完全性定理についても言えることである．モデル構成に於る2値のブール代数の前提は semantics が必然的にブール代数的構造を想定した上で展開されていることを示している．以上のことからモデル論は Frege 的論理と Boole 的論理の相互関係の確立とその融合を述べたものと結論できるであろう．

(1) *From Frege to Gödel*, ed. J. v. Heijenoort, Harvard Univ. Press, 1967, pp. 228-251.

On Boole's Logic

Yosaku Nishiwaki

Rèsumè

The symbolic logic has been developed rapidly from the later half of 19th century. It is G. Boole who first founded the basis of this logic. His significant contribution was the consistent introduction of mathematical operations to the representation of logic. And these were performed by his nominalistic uses of symbols and by the principle of extensionality. His success, unlike all of his predecessors, depends on this two points.

But as Boole's logic was theoretically refined and became to be called boolean algebra or algebra of logic, it's meaning changed gradually and it was investigated only as one of abstract algebras. Moreover as a result of Frege's inovative logical system, insufficiency of Boole's logic came to be clear, especially about quantification.

Surely Frege's logical system is superior to Boole's in many respects. But we can't discard Boole's results, because of following two points. Frege's view about logic, that logic must be the universal logic, can't bring forth meta-logical results. Conversely Boole's relative logics become useful for them. Secondly in the studies of model theories we can't succeed without the knowledge of boolean algebraic structure of model's universe. This shows Boole's logic is not only an incomplete part of Frege's logic, but it supplies semantical parts to Frege's.

Therefore we can conclude that modern logic is the union of Frege's system and Boole's relativistic view of logic.