Title	確率論の基礎概念 II
Sub Title	Fundamental Concepts of Probability II
Author	大出, 晁(Oide, Akira)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1972
Jtitle	哲學 No.59 (1972. 8) ,p.1- 23
JaLC DOI	
Abstract	The first part of this article is in the preceding volume of the same review. Here in this part the author discusses the definitions and properties of measurable space, measurable function and Lebesgue-Stieltjes integral. The relation between probability space and induced probability space is made precise. The author's conclusion is that the construction of probability space is tightly connected with our conceptual scheme of analyzing data and that the probability space has properties of mathematical model, therefore its fitness is to be tested empirically and there is no a priori criterion to judge which one is the best.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000059-0001

確率論の基礎概念　II

大　出　　晁

この論文は，哲学第58集所載の「確率論の基礎概念　I」に続くものである．

§3.　可測空間，測度空間，可測関数

与えられた集合 Ω とその部分集合の σ-環 $\mathcal{S}$ が与えられていて，かつ Ω の各元が $\mathcal{S}$ の少くとも一つの集合に属しているとき（すなわち $\Omega=\cup\mathcal{S}$ のとき），Ω と $\mathcal{S}$ とを併せて $(\Omega, \mathcal{S})$ と表わして**可測空間** (measurable space) とよび，$\mathcal{S}$ の元を**可測集合**とよぶ．可測空間において測度 μ が定義されているとき，それらを併せて $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ と表わし，**測度空間** (measure space) とよぶ．測度 μ が有限，σ-有限，有界，σ-有界であるのに応じて，測度空間もおなじ名称でよばれる．以上の考察から，確率空間は有界な測度空間で，とくに $\mu(\Omega)=1$ なる条件をみたすものであることは明らかであろう．

いまひとつの測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ が与えられたとする．この空間 Ω の点から実直線上の点，すなわち実数値をとる関数 f を考えたとする．$f(x)$ は実数であるから，その $f(x)$ が直線上のある区間 $[a, b)$ の範囲にあるように x を動かしたとすると，x は集合 $\{x: a\leq f(x)<b\}$ の範囲で動くことはいうまでもない．区間 $[a, b)$ はすでにのべたようにひとつのボレル集合である．すなわち $[a, b)\in\mathcal{B}(=\mathcal{S}(\mathcal{R}^*))$．そこで一般にボレル集合 M に対して，$f^{-1}(M)=\{x: f(x)\in M\}$（上の例では $f^{-1}([a, b))=\{x: f(x)\in[a, b)\}=\{x: a\leq f(x)<b\}$）を，$f$ の M に対する原像（集合）(inverse image) とよぶことにする．この f は通常の点関数であるが，その像 M と原像

$f^{-1}(M)$ を考えることによって，それは集合とさらに集合関数と結びつく。可測関数 (measurable function) はそれを端的に示している．

定義 3-1　**可測関数の定義**

可測空間 $(\Omega, \mathcal{S})$ において，Ω において定義された実数値関数 f が，$\mathcal{R}^1$ のすべてのボレル集合 M に対して，$\{x: f(x)\neq 0\}\cap\{x: f(x)\in M\}\in\mathcal{S}$ ならば，f は可測関数とよばれる．

いま $(-\infty, \infty)$ を M ととれば，$f^{-1}((-\infty, \infty))=\Omega$ であるから，f が可測であれば，$\{x: f(x)\neq 0\}$ は $\mathcal{S}$ の元となる．とくに，確率空間のように Ω が $\mathcal{S}$ の元であるときには，f の可測性は $f^{-1}(M)$ が可測であることと等値になる．以下話を多少簡単にするため，確率空間を念頭におき，有界な測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ において議論を進めることとする．

Ω において定義された関数 f が可測であるか否かを検討する際に基本的な役割を果すのは次の定理である．

定理 3-1

有界な測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ において定義された実数値関数 f が可測であるためには，すべての実数値 c に対して集合 $\{x: f(x)<c\}$ が可測であることが必要十分である．

いま $\{y: y<c\}$ なる集合はボレル集合であるから f が可測ならば $f^{-1}(\{y: y<c\})=\{x: f(x)<c\}$ は可測になる．逆は次のようになる．任意の区間 $[a, b)$ に対して $f^{-1}([a, b))=\{x: a\leq f(x)<b\}=\{x: f(x)<b\}-\{x: f(x)<a\}$ であるから，$\{x: f(x)<a\}$ と $\{x: f(x)<b\}$ が $\mathcal{S}$ の元ならば，$f^{-1}([a, b))$ も $\mathcal{S}$ の元である．いま $f^{-1}(M)$ が $\mathcal{S}$ の元となるような実直線の部分集合 M のすべての集合族 $\mathcal{A}$ をとると，$\mathcal{A}$ は σ-環となる．この $\mathcal{A}$ は，$f^{-1}([a, b))$ が $\mathcal{S}$ の元であることから分るように，$[a, b)$ という形のすべての半開区間を含む．ところが，ボレル集合族 $\mathcal{B}$

$=\mathcal{S}(\mathscr{R}^*)$ は $\mathcal{S}(\mathscr{P}^*)$ であって，そのような最小の σ-環である．よって $\mathcal{S}(\mathscr{R}^*)\subseteq\mathcal{A}$．すなわち，すべてのボレル集合 M に対して $f^{-1}(M)$ は $\mathcal{S}$ の元となり，f は可測．

この必要十分条件は $\{x\colon f(x)\leq c\}$, $\{x\colon c<f(x)\}$, $\{x\colon c\leq f(x)\}$ などの形に書いてもよい $\left(たとえば, \{x\colon f(x)\leq c\}=\lim_n\left\{x\colon f(x)<c+\dfrac{1}{n}\right\}\right)$．したがって，$f$ の可測性の吟味には，任意の実数 c に対して，$\{x\colon f(x)<c\}$ 等が可測であるか否かを調べればよい．

さらに，可測関数の理論で重要なのは可測関数を用いて定義される関数の可測性の問題である．一般的には次の定理が証明される．

定理 3-2

c を任意の実数，f, g を可測空間 $(\Omega, \mathcal{S})$ 上で可測な関数とすれば，$f+c$, cf, $f+g$, $f-g$, fg もまた $(\Omega, \mathcal{S})$ で可測である．

たとえば，$f+g$ の可測性を示すには $\{x\colon (f+g)(x)<c\}=\{x\colon f(x)+g(x)<c\}$ が可測であることを任意の実数 c に対していえばよい．ところが，$f(x)+g(x)<c$ は $f(x)<c-g(x)$ と等値であるから，$f(x)+g(x)<c$ は，$f(x)<r$ かつ $r-c<-g(x)$ なる有理数 r があるということと等値である．ゆえに，$\{x\colon f(x)+g(x)<c\}=\bigcup_{r\in M}\{x\colon f(x)<r\}\cap\{x\colon r-c<-g(x)\}$（ただし，$M$ は直線上のすべての有理数の集合とする）．$r\in M$ なる有理数は可算個であり，$\{x\colon f(x)<r\}$ と $\{x\colon r-c<-g(x)\}$ はともに可測であるから，$\{x\colon f(x)+g(x)<c\}$ も可測となる．

より一般的には，次のような二つの定理が成りたつ．関数 ϕ がボレル集合族 $\mathcal{B}$ に関して可測であるとき，すなわち，$\phi^{-1}(M)\in\mathcal{B}$ がすべてのボレル集合 M に対していえるとき，ϕ を**ボレル可測** (Borel measurable) という．

定理 3-3

ϕ が $(-\infty, \infty)$ 上のボレル関数であって，かつ f が有界な可測空間

$(\Omega, \mathcal{S})$ 上の可測関数であれば，$g(x)=\phi(f(x))$ も $(\Omega, \mathcal{S})$ 上の可測関数である．

M をボレル集合とすると，$g^{-1}(M)=\{x: \phi(f(x))\in M\}=\{x: f(x)\in\phi^{-1}(M)\}$ で $\phi^{-1}(M)$ は $\mathcal{B}$ の元，つまりボレル集合であるから f の可測性によって $g^{-1}(M)$ も可測である．

定理 3-4

$\{f_n\}$ が有界な可測空間 $(\Omega, \mathcal{S})$ 上の可測関数の列であるとすれば，次の各関数も $(\Omega, \mathcal{S})$ において可測である．

$$h(x)=\sup f_n(x), \qquad n=1, 2, \cdots$$
$$g(x)=\inf\ f_n(x), \qquad n=1, 2, \cdots$$
$$f^*(x)=\lim\sup_n f_n(x)$$
$$f_*(x)=\lim\inf_n\ f_n(x)$$

さらに，$\lim_n f_n(x)$ が存在する x に対して $f(x)=\lim_n f_n(x)$ とすれば，f も可測である．

たとえば，inf の定義により，すべての n に対して $c\leq f_n(x)$ ならば，$c\leq g(x)$．それゆえ，$g(x)<c$ ならば，ある n に対して $f_n(x)<c$．ところが，すべての n に対して $g(x)\leq f_n(x)$ であるから，ある n に対して $f_n(x)<c$ ならば，$g(x)<c$．したがって，$\{x: g(x)<c\}=\cup_{n=1}^{\infty}\{x: f_n(x)<c\}$．右辺は可測であるから，$g$ は可測．$h(x)=-\inf -f_n(x)$, $n=1, 2, \cdots$, $f^*(x)=\inf_{n\geq1}\sup_{m\geq n} f_m(x)$．$f_*(x)=\sup_{n\geq1}\inf_{m\geq n} f_m(x)$ から，それらの可測性は明らかである．さらに，$\{f_n\}$ の収束点の集合は $\{x: f^*(x)=f_*(x)\}=\{x: f^*(x)-f_*(x)\in\{0\}\}$ で可測であるから，$\{x: f(x)<c\}=\{x: f^*(x)=f_*(x)<c\}$ は可測である．

後の積分の理論と関連して，可測関数がいわゆる単純関数列の極限として表わされるという性質は重要である．

定義 3-2　**単純関数の定義**

可測空間上の関数 f は次の条件をみたすとき**単純関数** (simple function) とよばれる.

互いに素な有限個の可測集合 $E_1, \cdots, E_n$ と有限個の実数値 $c_1, \cdots, c_n$ が存在して,

$$f(x)=\begin{cases} c_i & x\in E_i,\ \ i=1,\cdots n \quad \text{のとき} \\ 0 & x\notin E_1\cup\cdots\cup E_n \quad \text{のとき}. \end{cases}$$

簡単にいえば, 単純関数は E_i 上で c_i, $E_1\cup\cdots\cup E_n$ 以外のところでは 0 の値をとる階段関数 (step function) である. 明らかに単純関数は可測であり, その和や積もまた可測である. このような単純関数の列 $\{f_n\}$ をとるとき次のことがいえる.

定理 3-5

可測関数 f はすべて単純関数列 $\{f_n\}$ の極限である. しかも, f が負でないならば, 各 f_n は負でなく, 関数列 $\{f_n\}$ を単調非減少となしうる.

$f\geq 0$ とする. $n=1, 2, \cdots$ とすべての $x\in\Omega$ に対して,

$$f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n} & \dfrac{i-1}{2^n}\leq f(x)<\dfrac{i}{2^n},\ \ i=1,\cdots,2^n\cdot n \quad \text{のとき} \\ n & f(x)\geq n \quad \text{のとき} \end{cases}$$

f_n は負でない単純関数で $\{f_n\}$ は単調非減少である. $f(x)<\infty$ であるから, ある n に対して

$$0\leq f(x)-f_n(x)<\frac{1}{2^n}.$$

$f<0$ なるときには同様な議論を $f^-(x)=-f(x)$ に適用すれば, 定理がえられる.

これら可測関数の理論を確率変数という可測関数に適用すれば, 通常の

確率変数の和・積・差あるいは確率変数列の極限などがそれぞれ確率変数となることが直ちに結果する.[1]

§4.　ルベーグ積分，ルベーグ・スチルチェス積分

可測関数 f の特徴は，有界な測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ においてボレル集合 M をとれば $f^{-1}(M)$ が $\mathcal{S}$ の元となること，それゆえ，われわれはつねに $\mu(f^{-1}(M))$ なる実数値を考えることが可能となることである．したがって，M というボレル集合（つまり，拡張された区間）において $f(x)$ が一定の値 c をとるとすれば，この c と $\mu(f^{-1}(M))$ との積は面積を与えることとなろう．すなわち，それは積分となる．

いま，単純関数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{E_i}(x)$ を考えることにしよう．この χ_{E_i} は E_i という可測集合の指示関数 (indicator) であって，

$$\chi_{E_i}(x)=\begin{cases}1, & x\in E_i \text{ のとき}\\ 0, & x\notin E_i \text{ のとき}\end{cases}$$

なる値をとるものとする．f の積分 $\int_\Omega f(x)d\mu(x)$ あるいは $\int_\Omega fd\mu$ は，

$$\int_\Omega fd\mu=\sum_{i=1}^{n} c_i\mu(E_i)$$

で定義される．もし $f(x)=\sum_{j=1}^{m} c'_j\chi_{F_j}(x)$ という形に表示されたとしても μ の加法性から $\int_\Omega fd\mu=\sum_{j=1}^{m} c'_j\mu(F_j)=\sum_{i=1}^{n} c_i\mu(E_i)$ なることが示される．したがって，表示の仕方にかかわりなく $\int_\Omega fd\mu$ は一定である．測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ が有界でないときは，$\mu(E_i)<\infty$ が必ずしもいえないから，もし $c_i\neq 0$ のとき $\mu(E_i)<\infty$ でなければ，$\int_\Omega fd\mu$ は ∞ となる．それゆえ，有界でない測度空間において，$c_i\neq 0$ なる i に対して $\mu(E_i)<\infty$ であるならば，f は**積分可能** (integrable) または**可積分**とよばれる．

同様な考察をある可測集合 E に適用して

$$\int_E f d\mu = \int_\Omega \chi_E f d\mu$$

と定義して f の **E 上での積分**という．E の指示関数 χ_E に対しては

(1) $$\int_\Omega \chi_E d\mu = \int_E 1 d\mu = \mu(E)$$

なる関係がえられる．

一般の可測関数 f の積分については前章の結果が重要な役割を演ずる．いま $f(x)\geq 0$ であるとしよう．定理 3-3 により単純関数列 $\{f_n\}$ が存在して，

$$f(x)=\lim_n f_n(x)$$

であり，かつ $f_n(x)\geq 0$, $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$, $n=1, 2, \cdots$ なることがいえるから，

(2) $$\int_\Omega f d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n d\mu$$

で f の積分を定義する．$f_n(x)$ は単調非減少であって $\int_\Omega f_n d\mu$ も単調非減少であるから，その極限は必ず存在するか，あるいは ∞ である．そこで $\int_\Omega f d\mu < \infty$ のとき f は**積分可能**または**可積分**という．上式 (2) は，極限があるとき，$\int_\Omega f d\mu$ はそれに等しく，∞ のときは $\int f d\mu = \infty$ なることを意味する．

$f(x)<0$ なる場合があるときは，f を次の f^+ と f^- に分ける．$E=\{x: f(x)\geq 0\}$, $E^c=\{x: f(x)<0\}$ とおいて

$$f^+(x)=f(x)\cdot\chi_E(x) \qquad f^-(x)=-f(x)\cdot\chi_{E^c}(x)$$

と定義する．明らかに E 上では $f^+(x)=f(x)$ で $f^-(x)=0$, E^c 上では $f^+(x)=0$ で $f^-(x)=-f(x)$．したがって，$f^+(x)\geq 0$, $f^-(x)\geq 0$ であるから上の積分の定義を用いることができる．そこで

(3) $$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$$

と定義する．ただし，右辺の一方は有限とする．右辺が二つとも有限，したがって $\int_\Omega f d\mu$ が有限のとき f は**可積分**であるという．

単純関数の場合と同様に，可測集合 E 上の積分は，

(4) $$\int_E f d\mu = \int_\Omega \chi_E f d\mu$$

で定義される．

このように定義された積分は単純関数列 $\{f_n\}$ に依存し，したがって $\{f_n\}$ のとり方の如何によって積分の値が変る可能性があるように見えるが，実は $\{f_n\}$ の如何にかかわらず唯一つにきまることが証明される．

このように定義された積分を**ルベーグ式積分**とよぶことにする(後に現われるルベーグ積分よりも広い)．このルベーグ式積分に関する基本的な性質は通常のリーマン積分と類似のものが多い．次にその幾つかをあげておくが，その際測度論的に重要な概念として「ほとんどいたるところ」(almost everywhere) (略して，a. e.) なる表現が用いられることが多い．可測関数に対しては，ボレル集合 M に対して $f^{-1}(M)$ が可測，したがって，$\mu(f^{-}(M))$ がある実数値をもつ．もし $f^{-1}(M)=\phi$ ならばもちろん $\mu(f^{-1}(M))=0$ であるが，μ の定義の仕方では $f^{-1}(M)\neq\phi$ であっても $\mu(f^{-1}(M))=0$ なることは当然ありうる．たとえば，c が実数なるとき $\{c\}$ なる集合は $\{c\}=\{x: x=c\}=\cap_{n=1}^{\infty}\left\{x: c\leq x<c+\frac{1}{n}\right\}$ であるから，明らかにボレル集合であるが，$\mathcal{S}^*$ のルベーグ測度 $\tilde{\mu}$ に対して $\tilde{\mu}(\{c\})=\lim_n \tilde{\mu}\left(\left[c, c+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_n \mu\left(\left[c, c+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_n \frac{1}{n}=0$. いますべての有理数の集合 M に対して $\cup_{r\in M}\{r\}$ をとれば，有理数は可算無限個であるから $\cup_{r\in M}\{r\}\in\mathcal{S}(\mathcal{R}^*)$ すなわちボレル集合で，しかも $\tilde{\mu}(\cup_{r\in M}\{r\})=0$ である．それゆえ，二つの関数 f, g があって，f はすべての有理点で 1，g がすべての有理点で 2 なる値をとり，それ以外のところでは全く同じ

値，たとえば 3 をとるとすると，$f(x)$ と $g(x)$ は無限に多くの点で値は異なるとしても，すべての有理点の集合 M 上では $\int_M fd\mu=\int_\Omega \chi_M fd\mu=0=\int_M gd\mu$ であるから，$\int_\Omega fd\mu=\int_{\Omega-M} fd\mu=\int_{\Omega-M} gd\mu=\int_\Omega gd\mu$ となるであろう．このように，f と g が測度 0 のところを除いて等しければ，積分の結果は等しくなる．そこで，一般に，$\mu(E)=0$ なる E を**零集合** (null set) とよび，零集合 E を除いて Q なることがいえるときに，「ほとんどいたるところで Q」(略して，Q a.e.) という．とくに測度 μ に言及するときには Q a.e. $[\mu]$ と表わし，「μ を法 (modulo) として」という．

定理 4-1

測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ において f, g を Ω において可積分な可測関数，E, F を可測集合とする．

1. f は E において可積分である．

2. $E\cap F=\phi$ ならば，$\int_{E\cup F} fd\mu=\int_E fd\mu+\int_F fd\mu$.

3. 任意の実数 c_1，c_2 に対して $\int_E (c_1f+c_2g)d\mu=c_1\int_E fd\mu+c_2\int_E gd\mu$.

4. $E\subseteq F$ ならば，$\int_E fd\mu\leq\int_F fd\mu$.

5. f が Ω で可積分であるためには $|f|$ が Ω で可積分なることが必要十分である．

6. $\left|\int_E fd\mu\right|\leq\int_E |f|d\mu$.

7. $\mu(E)=0$ ならば，$\int_E fd\mu=0$.

8. 可測集合列 $\{E_n\}$ に対して $\lim_n \mu(E_n)=0$ ならば，$\lim_n \int_{E_n} fd\mu=0$.

9. $f(x)\geq 0$ a.e. ならば，$\int_\Omega fd\mu\geq 0$.

10.　$f=g$ a.e. ならば，$\int_\Omega f d\mu=\int_\Omega g d\mu$.

11.　$f(x)=0$ a.e. の必要十分条件は，すべての可測集合 E に対して $\int_E f d\mu=0$ なることである．

12.　$f=g$ a.e. の必要十分条件は，すべての可測集合 E に対して $\int_E f d\mu=\int_E g d\mu$ なることである．

13.　$\{f_n\}$ が負でない可測関数の単調非減少列とする．もしすべての $x\in\Omega$ に対して $\lim_n f_n(x)=f(x)$ ならば，$\lim_n\int_\Omega f_n d\mu=\int_\Omega f d\mu$.

すなわち，$\lim_n\int_\Omega f_n d\mu=\int \lim_n f d\mu$.

14.　ルベーグの有界収束定理

$\{f_n\}$ が可測関数列で，かつ，$|f_n(x)|\leq g(x)$ $(x\in\Omega,\ n=1, 2, \cdots)$ なる Ω で可積分な関数 $g(x)$ が存在し，かつ

$$\lim_n f_n(x)=f(x)$$

であるとすれば，f_n $(n=1, 2, \cdots)$ および f はいずれも Ω で可積分で

$$\int_\Omega f d\mu=\lim_n\int_\Omega f_n d\mu.$$

これらの証明はすべて省略する．

確率論においては，上述の可測関数なる語をすべて確率変数なる語でおきかえれば，通常用いられる結果が直ちにえられる．しかし，確率論で上述の積分論と並んで重要なのは次のルベーグ・スチルチェス積分である．

すでにのべたように，g によって誘導されたルベーグ・スチルチェス測度 $\tilde{\mu}_g$ をとって，$(\mathscr{R}^1, \mathscr{B}, \tilde{\mu}_g)$ なる測度空間における f の積分を上と同様に定義する．この積分 $\int_{\mathscr{R}^1} f(x)d\tilde{\mu}_g(x)$ をとって，これを **g に関する f のルベーグ・スチルチェス積分**（略して L-S 積分）とよび，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x)$ で表わす．

一般に，有界な測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ において有限値をとる Ω 上の関数 $f(x)$ に対して $g(t)=\mu(\{x: f(x)<t\})$ で与えられる関数 g を f の**分布関数** (distribution function) とよぶ．この g は，$g(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$, $g(\infty)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\mu(\Omega)$，単調非減少かつ左連続である．いま，確率空間 $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ における確率変数 $X(\omega)$ を考えると，その分布関数

$$(5) \qquad F(x)=P(\{\omega: X(\omega)<x\})$$

を用いて，次のような新しい確率空間 $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ がきまる．すなわち，

$$(6) \qquad P_X((-\infty, x))=F(x)=P(\{\omega: X(\omega)<x\})$$

と定義すれば，

$$(7) \qquad \begin{aligned} P_X([a, b))&=P(\{\omega: a\leq X(\omega)<b\})=P(\{\omega: X(\omega)<a\}-\{\omega: X(\omega)<b\}) \\ &=P(\{\omega: X(\omega)<a\})-P(\{\omega: X(\omega)<b\})=F(b)-F(a) \end{aligned}$$

であるから，P_X は F によって誘導された L-S 測度 $\tilde{\mu}_F$ に他ならない．そして，P_X-可測集合の族 $\mathcal{S}_F^*$ はすべてのボレル集合を含む．この確率空間 $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ を X **によって誘導された確率空間**，あるいは**標本確率空間** (sample probability space) とよぶ．この P_X と F との間には，(7) に加えて，

$$(8) \qquad \begin{cases} P_X([a, b])=F(b+0)-F(a) \\ P_X((a, b))=F(b)-F(a+0) \\ P_X((a, b])=F(b+0)-F(a+0) \end{cases}$$

なる関係がある（I，注(14)参照).

いま，$f(x)$ を P_X に関して可積分な関数とすると，$\int_{\mathcal{R}^1} f(x)dP_X(x)$ が $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)$ に他ならない．このとき，$\mathcal{R}^1$ 上のボレル可測関数 ϕ と $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ 上の確率変数 $X(\omega)$ に対して

$$(9) \qquad \int_{\Omega} \phi(X(\omega))dP=\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dF(x)$$ [2]

がいえる．((9) は一方が存在すれば他方も存在して等しいことを意味する．) これは ϕ が区間 $[a, b)$ の指示関数であれば，

$$\int_{\Omega}\phi(X(\omega))dP(\omega)=\int_{X^{-1}([a,b))}X(\omega)dP(\omega)=P(X^{-1}([a,b)))=P_X([a,b))$$
$$=\int_{[a,b)}dP_X=\int_{\mathfrak{R}^1}\phi(x)dP_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dF(x)$$

であることから見て明らかであろう．

$\tilde{\mu}_g$ がルベーグ測度 $\tilde{\mu}$ であるときは $g(x)=x$ であるから，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF(x)$ $\left(=\int_{\mathfrak{R}^1}f(x)d\tilde{\mu}_g(x)\right)$ は $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\left(=\int_{\mathfrak{R}^1}f(x)d\tilde{\mu}(x)\right)$ で表わされ，これを f の**ルベーグ積分**とよぶ．ルベーグ測度の場合 $\tilde{\mu}([a,b))=\tilde{\mu}([a,b])$ 等々から $\int_{[a,b)}fd\tilde{\mu}$ と $\int_{[a,b]}fd\tilde{\mu}$ その他と区別する必要はないので，これらをすべて $\int_a^b fd\tilde{\mu}$ と表わしてよい．

いま，

$$P_X((-\infty,\ x))=\int_{-\infty}^{x}p(u)du \tag{10}$$

なる $(\mathfrak{R}^1, \mathcal{B}, \tilde{\mu})$ 上の可積分関数 $p(u)$ が存在するとき，この $p(u)$ を確率変数 X の**確率密度** (probability density) (関数) という．このとき，X の分布関数 F に対して

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du \tag{11}$$

となる．当然，$\int_{-\infty}^{\infty}p(u)du=1$ で $F(x)$ は単調非減少であるから $p(u)\geq 0$ である．

もし f が $(\mathfrak{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ 上で P_X に関して可積分な関数であって，確率変数 X の確率密度を p，その分布関数を F とすれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)p(x)dx \tag{12}$$

なることがいえる[3]. とくに，(9) の ϕ に $\phi(x)=x$，(12) の f に $f(x)=x$ をとれば

$$\int_{\Omega} X(\omega)dP=\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \tag{13}$$

となる.

確率変数 X の分布関数 F が与えられたとき，P_X は F によって誘導された L–S 測度 $\tilde{\mu}_F$ として一意にきまってくる．逆に $P_X([a, b))=P(X^{-1}([a, b)))$ が与えられたときには，(7) の条件をみたす分布関数の族 $\mathscr{F}$ がきまってくる．すなわち，任意の実数 c に対して，$F'(x)=P(\{\omega: X(\omega)<x\})+c$ とおけば，明らかに $P_X([a, b))=F(b)-F(a)=(F(b)+c)-(F(a)+c)=F'(b)-F'(a)$ であるから，おなじ P_X に $F(x)+c$ なる形の一群の分布関数が対応する．また，もし X' なる確率変数が存在して $P(\{\omega: X'(\omega)<x\})=F'(x)=F(x)+c$ であれば，明らかに $P_X([a, b))=P_{X'}([a, b))$ となる．それゆえ，この P_X と $P_{X'}$ とをそれぞれ X または X' の (確率) **分布**とよび，P_X と $P_{X'}$ とが等しいとき，X と X' とは同一の分布に従うというのが便利である．文献上，P_X と F との区別はしばしば明確でないが，私は，以下，P_X を単に分布とよび，F を分布関数とよぶ．その定義上，P_X は測度したがって集合関数であり，F は点関数であって，両者の間には概念上明らかな差異がある．かくして，一定の確率分布に従う確率変数の族 $\mathscr{X}$ が存在し，$\mathscr{X}$ に属する確率変数 X と X' の分布関数 $F(x)$ と $F'(x)$ との間には $F'(x)=F(x)+c$ なる関係が成立する．

数学的確率論の対象は，同じ確率分布に従う一群の確率変数がもつ性質を研究することである．その際確率分布に対して分布関数を導入するのは，分布が集合関数であるのに対して分布関数は点関数であり，それゆえ，通常の関数論でえられている多くの結果を適用できるからに他ならない．とくに，確率密度によって，ルベーグ測度空間 $(\mathscr{R}^1, \mathscr{B}, \tilde{\mu})$ が導入さ

れ，分布関数がこの空間での積分として定義されることによって，ルベーグ積分，とくにほとんどの場合リーマン積分の理論が適用できることになる[(4)].

いまこの辺の事情について，若干の補足を加え，かつ整理しておこう．まず，ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ が与えられているとする．この $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ は通常研究対象の如何に応じて適当に設定されるものであって，一般的な議論をする場合，確率空間の条件をみたしているという以上の規定をおくことはできない．さらに，Ω から $\mathcal{R}^1$ 上への可測関数として確率変数 X を与える．この X もまたそれぞれの場合に応じて適当に定義されるのであって，一般的には可測性の条件以上には規定できない．しかし，X がきまればその分布関数 F と分布 P_X とがきまってくる．とくに，分布 P_X がきまるということは，X によって誘導された確率空間 $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ がきまることである．この $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ で議論を行なうことはもはや$(\Omega, \mathcal{S}, P)$ と X とについて議論を行なうことと同等ではなくて，むしろ，同一の分布 P_X に従う確率変数の族 $\mathcal{X}$ について論ずることである．そのとき，出発点の空間 $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ は $\mathcal{X}$ に属する確率変数 $X(\omega)$, $X'(\omega)$, … の定義のために必要とされているという以上の意味をもちえなくなる．すなわち，それは一つの数学的仮構にすぎなくなって，以後確率論の議論はもっぱら，$(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ において行われることになる．

分布関数 F の導入は，この $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ における議論を数学的に容易にするためのものである．すでにのべたように，$(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ は $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, \tilde{\mu}_F)$ であって，ここで重要な役割を果すのは確率変数 X ではなくて，分布関数 F あるいはおなじ分布を与える分布関数の族 $\mathcal{F}$ である．しかも，分布関数 F はその確率密度 p によって $\int_{-\infty}^{x} p(u)du$ として表現されるから，F に関する議論は最終的にルベーグ測度空間 $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, \tilde{\mu})$ に還元されてしまうこととなる．この空間は空間としてはもはや確率空間ではなく，単に σ-有界な測度空間にすぎない．

いま，逆に，まず単調非減少，左連続で $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$ なる関数 F が与えられたとしよう．われわれは，すぐに，確率空間 $(\mathscr{R}^1, \mathscr{B}, \tilde{\mu}_F)$ を構成してやることができる．これは「拡張定理」の結果である．さらに，$X(x)=x$ なる $\mathscr{R}^1$ 上の関数を考えてやれば，$\tilde{\mu}_F(\{x\colon X(x)<t\})=\tilde{\mu}_F(\{x\colon x<t\})=\tilde{\mu}_F((-\infty, t))=F(t)-F(-\infty)=F(t)$ であるから，F は X の分布関数，$\tilde{\mu}_F$ は X の分布ということになる．したがって，F に関する議論は確率空間 $(\mathscr{R}^1, \mathscr{B}, \tilde{\mu}_F)$ と確率変数 $X(x)=x$（またはその族 $\mathscr{X}$）の議論に他ならない．あるいは，また，ルベーグ測度空間 $((0,1), \mathscr{B}^*, \tilde{\mu})$（ここで $\mathscr{B}^*$ は $(0,1)$ 中のすべてのボレル集合の族とする）をとれば，これは明らかに確率空間である．しかも，F の性質上，$(0, F(t))=\{x\colon F^{-1}(x)<t\}$ であるから，$\tilde{\mu}((0, F(t)))=F(t)=\tilde{\mu}(\{x\colon F^{-1}(x)<t\})$，それゆえ，$F^{-1}$ を $(0,1)$ 上の確率変数，$\tilde{\mu}$ をその分布，F をその分布関数と考えることができる．それゆえ，F が与えられているとき，われわれは多数の確率空間と F を分布関数とする確率変数を考えることができることになる．かくして，F に関する議論はあくまで確率論的な意味を失わず，しかも議論はもっぱら実数空間 $(\mathscr{R}^1, \mathscr{B}, \tilde{\mu}_F)$ または $(\mathscr{R}^1, \mathscr{B}, \tilde{\mu})$ で行われることになる．これについては，また，統計的推論の分析に際して検討することにしたい.[(5)]

§5. 数学的モデルとしての確率空間

いままで，もっぱら抽象的な理論的観点から確率空間に関連する基本的概念の性格についてのべてきた．ここでは二，三の例を通して，現実に確率空間を構成する際の問題点について考察しておきたい．

例 1．いままでとりあげてきたサイコロ投げの例では単純事象をそれぞれの目と考え，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ としてきた．この場合の $1,2,\cdots,5,6$ の数字は本質的な問題ではない．a, b, c, d, e, f なる 6 個の文字であっても差し支えない．要は「1 の目」等々に対応する関係とたがいに異なる 6

個の対象とが与えられていればよい．しかし，もし「i の目」という目の数ではなく，目の数の偶数・奇数にのみ着目して，一回サイコロを振って偶数ならば a，奇数ならば b と記す，という試行を行なうのであれば，この場合には $\Omega=\{a, b\}$ であり，σ-体 $\mathcal{S}$ は $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ なる集合を元とする集合族である．さらに，$P(\{a\})=P(\{b\})=\dfrac{1}{2}$ とし，Ω 上の関数 $X(\omega)$ を

$$X(\omega)=0 \qquad \omega=a \text{ のとき}$$
$$X(\omega)=1 \qquad \omega=b \text{ のとき}$$

と定義すれば，$X(\omega)$ は明らかに確率変数である．

同様な結果は $\Omega'=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ および σ-体 $\mathcal{P}(\Omega')$ から出発して $P'(\{i\})=\dfrac{1}{6}(1\leq i\leq n)$ とし，次のような $X'(\omega)$ を定義してもえられる．すなわち，

$$X'(\omega)=0 \qquad \omega=2, 4, 6 \text{ のとき}$$
$$X'(\omega)=1 \qquad \omega=1, 3, 5 \text{ のとき．}$$

このときも明らかに $X'(\omega)$ は確率変数である．この二つの場合には，それぞれの確率変数 $X(\omega)$ は異なるにしろ，$X(\omega)$ と $X'(\omega)$ によって誘導された確率空間 $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P_X)$ と $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, P'_{X'})$ とは，$P_X((-\infty, x))=P(\{\omega: X(\omega)<x\})=P'(\{\omega: X'(\omega)<x\}=P'_{X'}((-\infty, x))$ であって同一である．

このように同じ試行に対しても，異なる視点から結果を分類することによって確率空間の構成は異なりうるし，また，異なる確率空間からであっても確率変数の取り方によっては，同一の誘導された確率空間の構成が可能となる．要するに，$(\Omega, \mathcal{S})$ の構成においては，論ぜらるべき確率事象が Ω の部分集合の族 $\mathcal{S}$ の元として表現されることが基本的条件である．

例 2.　上述の例では，出発点となる確率空間は異なっていたが，たま

たま一方の $P(\{a\})=P(\{b\})=\frac{1}{2}$ と $P(\{2,4,6\})=P(\{1,3,5\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ が等しく，対応する事象の確率には差異がなかった．しかし，確率空間の構成の仕方と，そこで考えられている直観的に自然な確率の与え方というものが，きわめて重要な理論的役割を果す場合がある．つぎに，その例として，マックスウェル・ボルツマンの統計とボーズ・アインシュタインの統計の例をのべよう.(6)

空間の r 個の部分に n 個の粒子が存在する確率について考える．話を簡単にするために，$n=2$, $r=3$ のケースについて考えよう．第一の考え方は，粒子を a, b とし，それが r_1, r_2, r_3 なる空間部分に割当てられると仮定する．そのときありうるすべての事象，つまり全事象 Ω は次のような単純事象，すなわち Ω の点，の集合ということになる．

$|ab|-|-|$,　$|-|ab|-|$,　$|-|-|ab|$,　$|a|b|-|$,　$|a|-|b|$,　$|-|a|b|$,

$|b|a|-|$,　$|b|-|a|$,　$|-|b|a|$.

これら $9=3^2(=r^n)$ 個の点を順に $\omega_1, \cdots, \omega_9$ とする．Ω の部分集合の σ-体として $\mathscr{P}(\Omega)$ をとり，確率 P として，$\{\omega_1\}, \cdots, \{\omega_9\}$ に等しい値を与える集合関数を考える，すなわち，

$$P(\{\omega_1\})=\cdots=P(\{\omega_9\})=\frac{1}{9}.$$

この確率空間の構成は $|a|b|-|$ と $|b|a|-|$ を異なるものとみなしていることから明らかなように，a, b は互いに区別しうる粒子であることを前提としている．しかし，もしも a, b が何らかの事情によって識別しえないとするならば，観測の結果としてわれわれにとって意味のあるのは

$|\bigcirc\bigcirc|-|-|$,　$|-|\bigcirc\bigcirc|-|$,　$|-|-|\bigcirc\bigcirc|$,

$|\bigcirc|\bigcirc|-|$,　$|\bigcirc|-|\bigcirc|$,　$|-|\bigcirc|\bigcirc|$

の6通りのケースであろう．これをいま $\omega_1', \cdots, \omega_6'$ とする．これは ω_4 と

ω_7, ω_5 と ω_8, ω_6 と ω_9 とを区別しないことであるから，$\omega'_4, \omega'_5, \omega'_6$ の確率は $P(\{\omega_4, \omega_7\})=P(\{\omega_5, \omega_8\})=P(\{\omega_6, \omega_9\})=\dfrac{2}{9}$ と考えることができる．

ところが，もし，$\omega'_1, \cdots, \omega'_6$ から出発して $\Omega'=\{\omega'_1, \cdots, \omega'_6\}$ とその部分集合の族 $\mathcal{P}(\Omega')$ をとったとき，$\omega'_1, \cdots, \omega'_6$ に等しい確率を与えるならば，

$$P'(\{\omega'_1\})=\cdots=P'(\{\omega'_4\})=P'(\{\omega'_5\})=P'(\{\omega'_6\})=\frac{1}{6}$$

ということになる．

古典統計力学的に，粒子は本質的に識別可能であるが，観測の精度上区別しえぬ観測結果があるという立場をとれば，最初の確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ が妥当性をもつと考えられよう．これがマックスウェル・ボルツマンの統計とよばれるものである．それに対して，粒子はそもそも識別可能ではなく，したがって，とくに $\omega'_4, \omega'_5, \omega'_6$ がおこる可能性が大きいと考える理由がないという立場をとれば，第二の確率空間 $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P')$ の方がはるかに説得力をもちうるであろう．これをボーズ・アインシュタインの統計という．実際には，物理学の対象となる粒子はどれもマックスウェル・ボルツマンの統計には従わず，フォトン，核子，および素粒子の偶数個を含む原子とはボーズ・アインシュタインの統計に従うことが確認された．また，プロトン，ニュートロン，エレクトロンなどは，もう一つのフェルミ・ディラックの統計に従う．これは二つの粒子が同じ空間部分に入ることを認めない立場から，$\Omega''=\{\omega'_4, \omega'_5, \omega'_6\}$, $\mathcal{P}(\Omega'')$, $P''(\{\omega'_4\})=P''(\{\omega'_5\})=P''(\{\omega'_6\})=\dfrac{1}{3}$ なる確率空間を考えるものである．

それゆえ，ある実験や観測の結果を，また一般的にいって，ある試行の結果を分析するに際して，確率空間を構成するということはわれわれが理論的－数学的モデルを設定しているということであって，異なる幾つかのモデルを設定することも可能であれば，また，どのモデルがもっともよいかを判定する一義的な基準があるわけでもない．設定されたモデルは現に与えられているデータをある程度統計的に説明しうるものでなければなら

ないが，しかし，そのモデルの可否の最終的判定は，さらに与えらるべきデータとの相関において決定さるべきものである．確率空間の構成は，一つの数学的モデルの設定という意味をもち，われわれの事象把握の基本的枠組に関連し，統計的推論の第一段階において本質的な役割を演ずる．

この点は，次のようなたいへん初等的な非復元的抽出の例においても留意される必要がある．いま袋の中に黒玉3個，白玉2個が入っているとしよう．その袋から2個の玉を同時に抽き出したときに，黒玉が2個である確率を考察するとしよう．通常用いられる数学的モデルはこうである．まず，黒玉に a, b, c，白玉に d, e という名前をつけ，a, b, c, d, e から2つを取る組合せを考える．それは，$(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)$ の10通りであるから，これらを順に $\omega_1, \cdots, \omega_{10}$ で表わし，$\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_{10}\}$ とする．これらの点すべてに等しい確率 $P(\{\omega_1\})=\cdots=P(\{\omega_{10}\})=\dfrac{1}{10}$ を与え，黒玉2個の場合，すなわち，$\{\omega_1, \omega_2, \omega_5\}$ の確率を求めると，$P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_5\})=\dfrac{3}{10}$ となる．この場合 $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_5\})=\dfrac{3}{10}$ は $P(\{\omega_i\})=\dfrac{1}{10}$ と確率の σ-加法性からの必然的結果であり，この場合の確率空間が $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ であることもいうまでもないであろう．全く同じ手法で，黒玉1白玉1の確率 $P(\{\omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9\})=\dfrac{6}{10}$，白玉2の確率 $P(\{\omega_{10}\})=\dfrac{1}{10}$ が求められる．

しかし，このモデルはいまの場合の唯一のモデルではない．そして，われわれはつねにこのモデルを採用するように強制されているわけでもない．場合によっては，次のようなモデルの方がはるかに有効でありうるかも知れないのである．われわれが着目しているのは，要するに玉の色なのであるから，黒2，黒1白1，白2を簡単に，BB, BW, WW と表わす．確率空間として，$\Omega=\{\mathrm{BB}, \mathrm{BW}, \mathrm{WW}\}$ を考え，部合集合の σ-体に $\mathcal{P}(\Omega)$ を考える．確率 P には，それ相当の理由に応じて適当なものを考える．上記のモデルを背景にして考えて，$P(\{\mathrm{BB}\})=\dfrac{3}{10}$，$P(\{\mathrm{BW}\})=\dfrac{6}{10}$，

$P(\{WW\})=\frac{1}{10}$ とするのもそれなりの根拠がある．だが，このいずれのケースも等確率である，したがって $P(\{WW\})=P(\{BW\})=P(\{BB\})=\frac{1}{3}$ と考えたからといって，それが直ちに誤まりであるわけではない．さらに，また，同色の玉しか 2 個引き出せないような事情があるとしたら，むしろ $P(\{WW\})=P(\{BB\})=\frac{1}{2}$，$P(\{BW\})=0$ なる確率の方が意味がある．このような場合，最終的にモデルの可否の判定を与えるのはデータとの照合である．とくに，後の二つのモデルの方が前のモデルに比べて利点があるとすれば，第 1 のモデルでは，黒玉 2 の確率は計算上えられる必然的なものであるため，異なる確率が考えにくいのに対して，確率の付与の仕方が任意であるという点だといってよい．しかも，場合によっては現在とりあげている事象の解析にはるかに有効であるかも知れないのである．確率論の書物の敍述にしばしば見られるように，この場合に第一のモデルに則して考えねばならぬ必然性があるのではなく，それはあくまでも一つのモデルでしかない．第一のモデルがア・プリオリに正しいとはいえないのである．この点は，確率空間の設定という確率論の基本的な作業において，まず指摘されねばならないもっとも重要な点である．[(7)]

む　す　び

確率論における基本的概念には，確率過程を論ずる場合に重要な積空間，確率変数の独立性，条件付確率や，さらに，分散，モーメントなど平均値に関する概念など多々ある．しかし，これらの概念の多くは小論でふれた概念を基礎にして，あるものはそれとほぼ平行的に，あるものは派生的にえられるものがほとんどである．しかし，本格的に統計的推論の問題を論ずる際には一応触れておかねばならぬ概念であることは確かであるが，紙数もつきたので，それらについては機会を改めて論ずることにしたい．

註

（1） この章について，詳しくは，[4] §17-§20，[5] 後篇 §14-§18，[6] 第5章 §4，[7] 5 を参照.

（2） $P_X([a,b))=P(\{\omega: a\leq X(\omega)<b\})=P(X^{-1}([a,b)))$ であるから，P_X を PX^{-1} と表わしてよい．一般に，測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ から可測関数 $T(x)=y$ によって可測空間 $(\Omega', \mathcal{S}')$ への変換を考えると，Ω' 上の可測関数 $f(y)$ と $\mathcal{S}'$ 上の測度 μT^{-1} に対して

$$\int_{\Omega} f(T(x))d\mu(x)=\int_{\Omega'} f(y)d\mu T^{-1}(y)$$

がいえる．(9) は $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, $(\mathcal{R}', \mathcal{B})$, $X(\omega)=x$ の場合のこれの特殊ケースである．

（3） 分布関数に対する確率密度の存在は，一般的にいって，次のいわゆるラドン・ニコデューム (Radon-Nikodym) の定理の帰結である：σ-有界な測度空間 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ において，$\mathcal{S}$ 上で定義されている σ-有限でかつ σ-加法的な集合関数 ν が

(*) 任意の可測集合 E に対して，$\mu(E)=0$ なるときには

$$\nu(E)=0 \qquad (\text{絶対連続性})$$

なる条件をみたしているならば，任意の可測集合 E に対して

$$\nu(E)=\int_E f d\mu$$

であるような，Ω 上の有限値をとる可測関数 f が存在する．しかも，もし $\nu(E)=\int_E g d\mu$ であれば，$f=g\ [\mu]$.

測度空間 $(\mathcal{R}^1, \mathcal{B}, \bar{\mu})$ は σ-有界であり，$\bar{\mu}((-\infty, x))\to 0$ のときは $P_X((-\infty, x))=F(x)\to 0$ であるから，P_X は (*) の条件をみたす．それゆえ，$P_X(E)=\int_E p d\bar{\mu}$ なる p があり，しかも零集合を除いて p は一意にきまる．

(12) の関係については次のことから察せられよう．f が $\sum_{i=1}^n c_i\chi_{E_i}$ なる単純関数であれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\bar{\mu}_F(x)=\int_{\mathcal{R}^1} f(x)dP_X(x)=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{R}^1} c_i\chi_{E_i}dP_X$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{E_i} c_i dP_X=\sum_{i=1}^n c_i\int_{E_i} dP_X=\sum_{i=1}^n c_iP_X(E_i)=\sum_{i=1}^n c_i\int_{E_i} p d\bar{\mu}$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{E_i} c_i p(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} c_i\chi_{E_i}(x)p(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx.$$

通常 $\nu(E)=\int_E f d\mu$ なる f を ν の μ に関するラドン・ニコデュームの導関数とよび $f=\dfrac{d\nu}{d\mu}$ で表わす．この記号によれば，(12) は $\int_{-\infty}^{\infty} fdF = \int_{-\infty}^{\infty} f\dfrac{dF}{d\bar{\mu}}d\bar{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} f\dfrac{dF}{dx}dx$ という積分変数の変換に他ならない．

なお，ラドン・ニコデュームの定理については，条件付確率の存在に関して重要な役割を演ずるので，その際再び触れるであろう．

（4） よく知られているように，区間Iの上で関数 f がリーマン積分可能であるための必要十分条件は，I における f の不連続点の集合 E に対して $\bar{\mu}(E)=0$ なることである．したがって，連続関数を扱う以上，われわれはリーマン積分可能と考えてよい．

（5） この章の詳細については [1] §5-§7, [3] IV, [4] §23-§27, §39, [5] 後篇 §20-§24, [6] 第6章 §6, [7] 4, 7, 10 を参照．

（6） これについては [2] II, 5a, およびより正確な議論としては [7] pp. 42-43 を参照．

（7） この章については [2] I, II に多くの興味ある例が見られる．

文　　献

[1] Cramér, Harald: Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[2] Feller, William: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I, John Wiley, New York, 1950.

[3] Feller, William: Ibid., Vol. II, 1966.

[4] Halmos, Paul R.: Measure Theory, van Nostrand, New York, 1950.

[5] 河田敬義・三村征雄：現代数学概説 II　岩波　1965.

[6] コルモゴロフ－フォミーン・山崎三郎訳：関数解析の基礎　岩波　1971.

[7] Loève, Michel: Probability Theory, 3rd ed., van Nostrand, Princeton, 1963.

Fundamental Concepts of Probability II

Akira Oide

Résumé

The first part of this article is in the preceding volume of the same review. Here in this part the author discusses the definitions and properties of measurable space, measurable function and Lebesgue-Stieltjes integral. The relation between probability space and induced probability space is made precise. The author's conclusion is that the construction of probability space is tightly connected with our conceptual scheme of analyzing data and that the probability space has properties of mathematical model, therefore its fitness is to be tested empirically and there is no a priori criterion to judge which one is the best.