Title	論理と数学の現実への適用可能性
Sub Title	Why are the Calculi of Logic and Arithmetic Applicable to Reality?
Author	高野, 守正(Takano, Morimasa)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1967
Jtitle	哲學 No.51 (1967. 11) ,p.67- 78
JaLC DOI	
Abstract	Popperはその適用可能である理由として3つあげている.a) 規則としてのこれら計算は意味論的体系である.すなわちある事実を記述する為に用いるという意図をもって組織された言語である.b) ある計算はある種の事実には適用できるが,他の種の事実には適用できないことがある.c) 計算を現実の世界に適用される限り,それは経験的に反例をあげることが可能になることもあるかもしれないような記述理論となって,論理計算という性格は失われる.またそれが真なる論理式とみなされる限り,それは反例をあげることは不可能であり,その限りで現実の世界には適用できない.Popperはこの論文の中で,Ryleは「適用可能性」の分析という角度からアプローチしたが,Popperは「現実の世界」の分析からそれに補足すると述べている.ここで私は,規則としての論理と,記述言語として適用された論理の関係を分析することによって,Popperの論点(c)を中心に適用可能性の性格を敷延したいと思う. I approached the applicability of logic and arithmetic focussing upon the domain to be applied. Each logical formula and each arithmetic equation, on one hand are the representations of the rules our language functions possess, on the other hand describe the world as object language. But we cannot say the domain of a logical formula or an arithmetic equation as descriptive language independently of it as a rule. It is not that reality is logical or arithmetical, but through our language we approach and describe reality and through an interanimation between our approach and reality our language develops. Counting something we classify and measure such objects. Measurement theory is incorporated in our other theories. However, on account of the generality of logic and arithmetic as rules, other theories compose the fact by means of their models, for example, physics so organizes physical theory as to make concrete physical facts by means of mathematical models. Every theory, including logic and arithmetic, develops in the form of the restriction of the domain to be applied.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000051-0067

論理と数学の現実への適用可能性

高 野 守 正

Popper はその適用可能である理由として3つあげている.[註1.]

a) 規則としてのこれら計算は意味論的体系である. すなわちある事実を記述する為に用いるという意図をもって組織された言語である.

b) ある計算はある種の事実には適用できるが, 他の種の事実には適用できないことがある.

c) 計算を現実の世界に適用される限り, それは経験的に反例をあげることが可能になることもあるかもしれないような記述理論となって, 論理計算という性格は失われる. またそれが真なる論理式とみなされる限り, それは反例をあげることは不可能であり, その限りで現実の世界には適用できない.

Popper はこの論文の中で, Ryle は「適用可能性」の分析という角度からアプローチしたが, Popper は「現実の世界」の分析からそれに補足すると述べている. ここで私は, 規則としての論理と, 記述言語として適用された論理の関係を分析することによって, Popper の論点 (c) を中心に適用可能性の性格を敷延したいと思う.

1.

論理学では個々の論理式が現実の世界に対してどのような内容をもっているかに関係なく, 諸論理式間の関係が研究対象になるのであって, 現実の世界に直接関与することがない. 諸論理式について論ずる, いわばメタ

言語である．しかし個々の論理式は対象言語であり，その内容は現実の世界を記述しているわれわれの言語である．われわれが言語を用いて現実の世界を記述し，それによって現実の世界に働きかけている以上，そのような言語体系が個々の論理式を組織している構造が存在している筈である．そのような言語体系のもつ規則性を抽出し，体系化したものが論理学である．

私の犬は白い

というときに，すべての物に対して白いものと白くないものに分類するという二分法が前提されている．そして

私の犬は白くない

といえば，私の犬が前とは別の分類に属することを主張している．これは二値論理を用いる限りでの基本的思考方法である．さらに2つの命題を同時に主張する場合，あるいは2つの命題のうちどちらか一方を主張する場合に，われわれの言語が真偽という二値に関して持っている機能を連言あるいは選言としての論理記号に与えている．このようにして構成された規則は，将棋にたとえれば駒の動きに関する規則のようなものである．

「もし銀が逃げれば，6六角以下7六飛まで」は必然である．

という表現は

「もし相手が5一銀ならば，私は6六角とさします」

という文章とは異なった意味をもっている．後者は話者の意志を表明しているが，前者は相手に勝つという大原則からすれば，将棋の規則を前提する限りで駒の運びが必然であることを述べたものである．これは二次的な言語の用法である．将棋の主題は相手に勝つということであるが，論理学の主題は，前提を真にして結論を偽にする解釈が1つもないようなパターンである．

このように「否定」，「連言」，「選言」などの論理語に対して，言語のもつ機能を付与し，さらに真理保存という原則によって展開される論理学は，現実とはかかわり合いをもたない言語（具体的意味内容が捨象され，真か

偽かのみが問題とされる論理式）のパターンではあるけれども，やはり現実を記述する言語の機能の規則ということができる．

自然科学のような理論では公理となる命題は真であると仮定されている．その命題を論理学の体系にのせることによって真なる結論を導出する．ここでわれわれは論理学が言語の機能の中にある真を保存するという思考のパターンを明確化した規則を利用している．公理が現実世界についての真なる言明である限りで，このように解釈を与えられた論理は現実世界についての言明となる．それは論理が現実の世界について語る言語体系のもつ思考のパターンの表現であるからである．ここで用いられるのは規則としての論理である．そのような構造をもった言語がかかる現実をとらえるのに有効だったということである．他方われわれがそのような言語体系のパターンをとり出すことによって，そのような世界を構成しているのである．したがって真理保存的なパターンや二値論理のパターンでは把えられない世界に対してはこの論理は無力である．事実そのような領域に対しては帰納論理や様相論理のような試みがなされる．同じことは論理学の歴史的発展にも見ることができる．

2.

すべて理論はその適用領域の限定という形で進歩する．これは科学理論と同様，論理学についても，また幾何学についてもいえる．

ユークリッドは当時の大工や石工の用いた道具（たとえば直線定規とかコンパスなど）や彼らの技術（糸を張って直線をひく……2 点間にはただ 1 つの直線，そして1つだけ引くことが出来る……の如く）をとり入れており，その用語も日常の言語に特定の意味が与えられたものであった．ユークリッドはそれらを極限化し理想化して体系的な学を形成した．したがってそこで表現されている空間は，われわれの感覚でとらえられる世界へ透明であった．いわば感覚でとらえられる特殊を通して普遍を認識してい

た．感覚表象と密着していたという意味で，その幾何学を適用するときの必然性があった．

それ以後ユークリッド幾何学の第5公準が他の公準にくらべて明証性が欠けるという点をめぐって多くの人達がその独立性の吟味を重ねた．ある者は他の公準から証明しようとし，他の者は第5公準を否定して帰謬法によって逆にその真を証明しようとした．しかしこれらの試みはいずれも失敗した．その原因は彼らが幾何学の中に感覚に表象される現実の世界をみていたこと．彼らが当時までに有していた科学理論が提供する現実がユークリッド的以外には何ら暗示するものがなかったこと，などによりユークリッド幾何学が唯一のアプリオリな形式とみざるをえなかったのであろう．しかるに科学理論の発展が新しい現実を提供するようになれば，自然に対しても新しい解釈の可能性も生まれてくる．ロバチェフスキーは感覚印象は運動によって可能になるのであって，その運動の性質から悟性が幾何学的概念を構成するのだと考える．したがって運動の原因である力の性質によって異なった幾何学が可能になるわけである．ロバチェフスキーはニュートンの凡そ1世紀後の人であることを付記しておこう．またボヤイは幾何学を光と結びついた物理的空間とみたし，リーマンはエーテルの運動としての光と重力の空間と考えた．このように非ユークリッド幾何学は公理の任意性という純粋に形式上の問題として生まれたのではなくて，われわれの自然に対する認識の在り方にその根拠をもっていたのである．第5公準を否定した幾何学は，その否定の仕方によって種々ありうるわけであるが，そのいずれも整合的であって，その中のどれが真かは論理の問題ではなくなった．すなわち論理的にはどれも成立するのであって，現実世界の構造の問題としてここでも適用領域の問題となったのである．

3.

対象にはいくつかの特性がある．それらの特性の中のある特性に着目し

て，その対象を識別し分類する．「数える」という行為もこのような分類の一種である．リンゴを数えるときにどんな大きさのリンゴでも，どんな質のリンゴでもすべて1つのリンゴを1つとして数えるという行為は，それらのリンゴの集合に対してある観点からその集合を測定していることである．重さでもないし，容積でもない．孤立したリンゴを単位と認めて，それらの1つ1つに記号を割当てることによってある序列を構成する．そして最後のリンゴに割当てられた序列の中の記号が，そのような単位で測られた集合の数ということになる．すなわちその集合の測定値となる．集合の数を序列の中に位置づけることが出来れば，その集合を構成するメンバーには関係なく，同じ数をもつ集合をすべて同一であるとして1つの集合にまとめることができる．このようにして集合と集合の関係を数の関係としてとらえることができる．そしてこのためには集合がメンバーをもつこと，すなわち測定するための基準となる個物に分解されることだけで十分である．構成メンバーの特性には関係しない．

「$2+2=4$」は，

$$(x)(y)[x\in 2 \wedge y\in 2 \equiv x\cup y\in 4]$$

と定義される．x と y がそれぞれ2つのメンバーをもっていて，それらの中に共通のメンバーがなければ，これに「＋」という演算を施すことによって4つのメンバーをもつ集合になる．そしてこれは恒真な論理式と同様にわれわれの言語のもつ規則性である．

4.

Popper は彼の主張（c）項における第2の解釈，すなわち，「$2+2=4$」を現実の世界を記述する理論と解釈すれば，リンゴには適用されるが，兎や水滴には適用されない．よって記述言語としての「$2+2=4$」は兎や水滴の場合に反証されたとする．「もし誰かが2つのリンゴを篭に入れて，次にまた2つのリンゴを入れ，篭から1つも取り出さなければ篭の中には

4つのリンゴがある」と解釈すれば成立する．しかし兎を入れたら，7匹になったり8匹になったりするかもしれないからであると主張する．[註2.] 論理や数学を記述言語として解釈するときの適用領域と規則として解釈するときの適用領域は別のものではない．規則としては偽証も検証もされないことはPopper のいう如くである．それは適用領域の問題である． 記述言語として解釈されるときに偽証される領域に対しては，規則としても適用されない領域である．論理や数学の原理は現実の世界を把握するわれわれの言語構造のもつ規則性の表現であった．したがってその生命は記述言語とレベルを異にするということである．「2＋2＝4」が兎や水滴の記述言語として解釈されたときに反証されたことが，規則としての数学の原理までも拒否されたことではない．もしそうなら数学は記述言語と同じレベルになってしまうだろう．記述言語として適用できない領域に対してもなお規則としての適用可能性を主張しようとするところに数学の有効性がある．

Popper は兎や水滴の例においては，何かが起ったから「2＋2＝4」の等式が適用できなくなったので，この法則は何も起らない対象にのみ通用さるべきである，という反論を想定している．それに対して次のような解答をする．もしそのように解釈すれば，「2＋2＝4」は現実の世界では成立しないので，判然とした対象からなる抽象的世界 (abstract world of distinct objects) においてのみ成立することになろう．現実の世界ではいつでも何かが起っているのであるから，物理的条件が純粋な論理的あるいは算数的な演算に似ている程度において適用可能となってしまう．これは trivial であると．[註3.]

規則としての数学と記述言語としてのそれの関係からこの問題を検討してみよう．現実を完全に抽象化しておいて，その世界に論理を適用するのは2つが同じ性質のものなのであるから trivial であると主張するのであろうが，私は次の2点で Popper と異なる．

1． 規則としての論理や数学の適用可能性はわれわれがそのような事実

を構成しているのである．よって Popper のように問うことには意味がない．

2．規則としての論理や数学と記述言語としてのそれらの適用領域を独立に問うことは無意味である．

この後者については次節以下でのべる．

「2+2=4」が対象言語であるとすれば，これを適用するのは現実の世界である．そしてもしも対象言語なら，ある文脈をもちその中で真偽が決定されなければならない．適用のための二重構造があってはならないことは Popper のいう通りである．現実の世界を抽象化して，それに論理を適用するのではなく，われわれの論理をある文脈の下において主張しているのである．現実の世界には常に何かが起っていることは確かであるが，それら漠然たる世界は抽象化の作用を通して初めて物理的事実として構成される．これが理論であって，即ち物理的対象の言語である．適用という働きはこの手続きの逆の過程である．抽象化理想化の作用を通して構成されたモデルによって現実の世界を理解し説明することを，そのモデルを現実に適用するというのである．物理的事実を記述する物理理論を構成するときに，規則としての論理や数学の計算体系は用いられる．しかしその時規則の体系である数学的モデルを物理的事実によって具象化できるように，そのように物理理論を構成するのである．現実の世界に対してある抽象化を施し，しかる後に数学の法則によって論理体系を構築するのではない．2つの作用は独立でなく，数量化され数学体系にのせられるように物理理論を構成する．その故に数学の法則は，物理理論から現実の世界への意味論的規則を通して現実の世界に適用可能になる．そのように物理的対象言語をわれわれが構成したのである．

5.

記述言語としての「2＋2＝4」は兎や水滴には適用できなかった．しか

し規則として，それらの対象に対して復権を要求する．兎に対して時間的な制限を設け，水滴に対しては水滴の状態にある対象に対して適用することによって，この規則の適用可能性の領域を拡張する．水滴が落ちて溜った水に「4 つの水滴であった」ということによって，また水滴に対して単位を用いて 2g の水滴のようにして数学の法則を守ることができる．リンゴのような固体でなく，一般に液体にも適用させたいために，コップで測定するとか，重さによって測定するような工夫をする．これは「数える」という行為が一種の測定であることからの当然の結果である．よって「数える」という行為の中に測定理論が介入してくる．われわれは論理や数学の法則の外に自然を組織的に把握するための種々の方法をもっている．物理学や化学，その他多くの理論がある．それらと有機的に，整合的に体系化することによって現実の世界を理解し説明している．記述言語としての「2+2=4」が適用できないような世界に対しては，他の理論と組み合せて世界へのわれわれのアプローチの方法を変えることによって，これらの理論の骨組みとなっている論理や数学の法則を維持しているのである．それは論理や数学のもつ二次のレベルにおける一般性の故である．記述言語として偽証される領域が直ちに規則として適用できない領域とはならない故である．

1 から 5 までの自然数とそれらの加法しかもっていない民族を考えてみよう．彼らにとっては，2 つのリンゴと 2 つのリンゴでは 4 つのリンゴであるが，2 つと 4 つのリンゴではもはや測定できない量となってしまうであろう．そして 2 つと 4 つのリンゴの合計と，3 つと 5 つのリンゴの合計とでは区別の方法をもたず，両者ともたくさんのリンゴとだけしかいえないかもしれない．しかし，もし何か籠があって，前者のリンゴはこの籠で 2 つであるが，後者のリンゴは 3 つの籠が必要であることがわかれば，彼らといえども両者の区別を知ることができる．

今，次のような関係を考えてみよう．

$$K=\left\{<x,\ y,\ z>\mid x+y=z;\ x,\ y,\ z\in\{0.1.2.3.4.5\}\right\}$$

この集合のメンバーは 21 である．もし個物を何らかの方法で組にすることを覚え，それらを1つの集合として扱えば，たとえ上記の計算方法しか知らないとしても，集合についての順序対を作ることによって，実質的には彼らの数の世界は拡大する．すなわち $a_1, a_2 \cdots a_5$ をそれぞれ 1, 2, …… 5 個の個物をメンバーとする集合とすれば，a_1 のみをメンバーとする上記関係 K を Ka_1 とすれば，Ka_1 は 21 のメンバーをもつ集合である．$Ka_2 \cdots\cdots Ka_5$ についても同様である．ここまでの段階では，K, Ka_1, …… Ka_5 のそれぞその計算体系は全く独立である．もう一歩進んで a_3 が4つと a_4 が3つとでは同じ数であることを知るのは，この段階に達した彼らの射程内にある事柄だ．すなわち4つずつ籠に入れたリンゴを，改めて3つずつ籠に入れかえてみれば全部で4つの籠が必要であることがわかるだろうからである．そうすれば K, $Ka_1 \cdots\cdots Ka_5$ の体系は相互関係が確立されて，K のみの数の世界に対して5倍の世界を有することになる．そしてこのような技術を習得すれば，a_1, $a_2 \cdots\cdots a_5$ を混合したメンバーをもつ集合を作ることも容易に習得できる．その関係の理解の程度に応じて，おそらくは彼らの必要性の程度に応じて，数の世界は回帰的に定義されて行く．これが実際に物を測定するときにわれわれが単位として採用している操作である．このようにして K という数の世界は K, $Ka_1 \cdots\cdots Ka_5 \cdots\cdots$ というように拡大されて行く．しかしここにも a_1, $a_2 \cdots\cdots$ という集合を構成するための何らかの企てが必要だったのである．K という数学の世界しか持っていない民族は，それだけの現実しか持っていないのではなく，上述のような企てを持つことによって，そしてそれを所有する限りで現実の世界は拡大されて行く．その企ては彼らの数学外の理論である．したがって測定の手段を提供する他の諸科学の知識，一般には彼らの言語体系と共に発展して行くものである．その中から数学の法則だけを孤立させることはできない．もし孤立させて，それに対応する現実があるのだとか，現

実の世界と数学の世界が対応関係にあるのだとすれば，われわれの世界は固定されたものとなってしまうだろう．事実，世界は開かれているのである．数学の原理もそれを有する言語体系の中に組み込まれている．

6.

2つの量 x と y との間にある関係が観察されて，それらを座標軸に表現すると $y=1.8x$ の近傍に散在することがわかれば，われわれは x と y の関係式として $y=1.8x$ を与える．しかし現実にはこの方程式は近似的にしか満足されず，現実の世界の完全な記述ではない．観測点の密度を極めて大にして，それらの点をすべて記述したとしても，それは理論ではない．理論は現実の世界を説明するための規範としてのモデルでなければならない．それに従って現実の世界を解釈するものである．その故に将来の予測も可能になる．この例では，理論はすべての観測点を表現できる線となるべきものである．

さてわれわれがこれらの現象に $y=1.8x$ を適用することは，現象観察から枚挙的帰納をせずに，われわれの言語体系のもっている思考のパターン（数学）を現実の世界に適用してみるのである．その結果もし十分の適合性をもっていて，われわれの必要性を満し，われわれがそれまでに有していた理論の中に組み込めるならば満足である．そうでなければさらに観測を繰返すことによって，そのパターンの修正をする．このようにして論理や数学の法則は現実の世界の記述理論となる．

しかし現実の世界のかくれた構造が数学的であるというのではない．言語は現実の世界とわれわれとの共働の産物として発展して行くものであり，論理や数学はその言語体系のもつ規則性として把握している．したがって現実の世界の複雑な事象をとらえるときに，われわれのもっている形式を適用してみることから始める．その上で経験的テストを通して修正される．

7.

「2+2=4」を記述言語に解釈するとき速度には適用できない．しかし規則としての「2＋2＝4」までも適用できないとして拒否せずに，補助手段を用いることによってその法則を保持している．それはこの数学の法則が現実の世界を叙述するための有効な規則だからである．しかしさらに有効な規則が発見されればそれに席を空け渡すことになろう．これはユークリッド幾何学がリーマン幾何学に，伝統的論理学が数学的論理学に，その特殊なケースとして包含された例にみられる．

このような事情は規則としての論理や数学に固有な現象ではなく，物理学や他の普遍的と考えられている経験命題についてもみられる．そのいずれの場合にも古い規則や命題の領域の限定という形で発展して来ている．論理や数学の法則のもつ一般性は，「すべてのカラスは黒い」とか自然法則のもつ一般性のように経験命題のものではないからその保持に努力するのではない．すべての理論はその適用領域をもっており，もしその法則の反例があげられれば，その一部を修正することにより理論そのそのものは維持して行こうとする．そしてその理論の適用領域を限定し，それを新らしい理論の一部としてもつ，より大きな領域をもつ理論によって包括される．論理や数学の法則の保持に努力するのはそれらのもつ高度の一般性の故である．もし速度に対して「2＋2＝4」の法則が適用できないからといってこの法則を破棄することは，この法則が適用可能である広大な領域に対して，組織的に把握しようとするわれわれの能力を失うことである．速度に対して直接加法を適用できる数学を採用することもできよう．しかしその時「2＋2＝4」を現在適用しているたとえばリンゴの加法に対して，はなはだ複雑な加法を適用しなければならなくなったら，僅かな領域に対して単純な加法を採用した為に，より広大な領域に対して不便を被ることになってしまうだろう．あるいは別々に独立な加法を採用すれば，われわれの

規則は極めて複雑なものとなってしまう．

理論の追求するものは一般性である．たとえ対象が経験的現実の世界であろうと，またそれらに対するわれわれのアプローチの表現であるところの言語体系の規則性であろうと．ただ後者の妥当性 (validity) があらゆる解釈に対して成立するという高度の一般性にあるのは，それが現実世界を組織的に把握する手段であるところの言語体系のもつ規則性であるからである．したがってこの規則を破棄することは，現実の世界に対するわれわれの視点を変えることを意味し，ひいてはこれまでその図式によって得られた現実の世界についての知識を放棄しなければならなくなるかもしれないのである．

注 1． Karl R. Popper: Why are the calculi of logic and arithmetic applicable to reality; Conjecture and Refutation. p. 210.

この論文は1946年に行なわれたシンポジウムで G. Ryle, C. Lewy につづく第3番目の論文である．

注 2． 同上 p. 211.

注 3． 同上 pp. 211–212.