	Lory of Academic resouces
Title	Quineの集合論
Sub Title	Les theories des ensembles de Quine
Author	大出, 晁(Oide, Akira)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1965
Jtitle	哲學 No.46 (1965. 2) ,p.83- 108
JaLC DOI	
Abstract	Au tours du developpement des theories formelles des ensembles sont montrees importantes les deux methodes de separer la notion mathematique d'ensemble de la notion intuitive d'aggregat et de la preciser par des moyens formels : la premiere est la theorie des types a la Russell, et la seconde la theorie construite par Zermelo, modifiee par Neumann et Bernays au cours du temps, qui utilise les axiomes specifiques de former des ensembles elementaires. Quine presente le nouveau systeme de "New Fonndations for Mathematical Logic" (NF), dont le point caracteristique est de simplifier la methode de la theorie des types et de la concentrer en la methode de "stratification". On peut tenir les points suivants pour ses merites : 1) it n'a plus besoin de l'axiome de reductibilite ; 2) la differenciation du type de chaque nombre s'y disparait. En resultat, le systeme NF semble plus naturelle que la theorie originelle de Russell. Mais NF contient quleques caracteres curieux et inconvenients. Ils se manifestent particulierement alentour du theoreme de Cantor ; autrement dit, it existe les ensembles non-Cantoriens, auxquels le theoreme n'est pas applicable. L'exemple typique en est l'ensemble universel V. A cause des ensembles pathologiques de cette sorte l'axiome de choix n'est plus compatible avec le systeme NF. Un autre systeme de Quine, appele ordinairement "Mathematical Logic" (ML), se serve de l'idee essentielle de Neumann et de Bernays qui consiste en la distinction d'entre l'ensemble et la classe. La classe est l'objet qui est construit librement par la formation conceptuelle, tandis que l'ensemble n'est fait que par des procedes restreints. Les defauts de NF cites au-dessus y sont ainsi elimines. Le sujet de cet article est de comparer les deux systemes NF et ML et d'en eclaircir les differences principales qui concernent surtout l'induction mathematique, l'axiome de l'infini et les ensembles non-Cantoriens.
Notes	橋本孝先生古希記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000046-0091

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって 保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

Quine の 集 合 論

大 出 晁

Cantor の構成したいわゆる素朴集合論にいくつかのパラドックスが発見されたのは、1895 年以降のことである。それから次第に数学の危機という意識が深まつていつた。というのは、これらのパラドックスの生ずる理由が、当初考えられていたほど局部的な病因によるのではなくて、集合論という体系全般にかかわるのだということが次第に明らかにされたからである。問題の本質は集合という概念の形成の方法と、それを正確に表現する手段という基本的な点にある。したがつて、パラドックスの現われないような集合論を再構成するという試みが、奇しくもおなじ 1908 年にZermelo と Russell によつて始められたときに、われわれの概念構成の枠組み全般の検討と形式的な言語の使用という問題が浮びあがつてきた。集合という言葉は数学的用語であるばかりでなく、基本的には「集まり」という言葉がありまれた形において、それはわれわれの思考全般に浸透している。これがこの問題の解決を困難にし、集合論の体系全体の再構成を必要にした理由である。

ところで、歴史的に見ると、集合論の形式的言語による再構成は、二つの異なる立場からなされてきたといつてよい. ひとつは、集合のサイズを限定するという方法であり、通常「公理論的集合論」とよばれる立場がそれである。この立場は Zermelo, Fraenkel から、Neumann、Bernays へと継承され、発展してきた. もうひとつは、循環性を禁止するという方法であり、この立場は Russell によつて代表され、その 結果は Russell・

Whitehead の Principia Mathematica に示されている。このいわゆる「タイプ理論」的方法を洗練し、その条件を切りつめるという考え方から、Quine の二つの体系,"New Foundations" (NF) と,"Mathematical Logic" (ML) とが現われてきた。この二つの体系には「公理論的集合論」の立場に見られぬひとつの特徴がある。それは「集合のサイズが限定されていない」という点であつて,これは,Quine 自身の発想には「公理論的集合論」の方法の影響が認められるにしても、やはり彼の体系をそれとは異なるものと考えねばならぬ論拠を提供していると私は考える。

この論文で私の扱おうとするのも、NFと ML との基本的にはこの特徴をめぐるいくつかの特質である。しかし、それとともに、「タイプ理論」の方法がもついくつかの問題点についてもとりあげ、それによつて「タイプ理論」的方法の全体的構造を明らかにしたい。そこで、ここでは、「公理論的集合論」と「タイプ理論的集合論」の両者をあわせて、それ以前の素朴集合論に対比させて、「形式的集合論」とよぶことにする。そして、まず形式的集合論の発生の因となつたパラドックスのうちから、後に必要されるので、とくに Cantor、Burali-Forti、Russell の三つのパラドックスをとりあげ、それを説明することによつて、若干の基礎的な用語に説明を加え、あとの議論の導入部としたい。

I. パラドックス

Cantor は通常の数概念のもつ二つの局面を分離することから出発した。まず彼は数を集合のもつ一定の性質と考える。そのとき、数は通常の「個数」にあたる基数 (cardinal number)—濃度ともいう一としての性格と、通常の「順序数」 (ordinal number)—第 1, 第 2,……という順番ーとしての性格とをもつ。われわれの用いる数字 1, 2, 3, ……はこの二つの面をあわせもつ。しかし、集合の観点からみると、基数とは「おなじ個

数の成員をもつ集合」に共通な特徴である. したがつて、「おなじ基数」 とは「集合の成員がそれぞれ1対1に対応づけられる」ことによつて特徴 づけられる. 他方, 順序数を考えるには, 基本的に成員が相互に一定の順 序をもつた集合を考える必要がある、生徒のあるクラスに人数だけの机が あるかどうかは、その生徒をひとりづつ机のところに起たせれば、数えなく ても分る.しかし、生徒がそれぞれ適当な大きさの机にかけるためには、 それだけでは充分でない. 生徒が身長順という一定の順序に並び、机が大 きさの順という一定の順序に並んだうえに、もつとも小さい生徒がもつと も小さい机につくという関係が必要となる. したがつて, 生徒の身長順と 机の大小順とが一定の関係をみたしていること、つまり「同型」(isomorph) であることが必要である。そこで、二つの集合のあいだに、1対1で、しか も一方の集合の成員間に一定の順序があれば、もう一方の集合のそれに対 応する成員間にも一定の順序のつけられるような対応関係を同型対応とい う. 順序数に対しては、かくして、「順序」と「同型対応」ということが 要求される、この基数と順序数という二つの局面を分離し、それらをそれ ぞれ無限の領域にまで拡張することに、Cantor の大胆な試みがあつた。

さて、基数の面については次の「Cantor の定理」が彼によつて証明された。

Cantor の定理

ある集合 x のすべての部分集合の集合 SC(x) は、x よりも大きな基数をもつ。

この証明のスケッチをのべると次のようになる. 「SC(x) が x より大きな基数をもつ」というのは, SC(x) の成員と x の成員とを 1 対 1 に対応させると SC(x) の成員の方があまるということであろう. そこで, SC(x) がより大きな基数をもてば, SC(x) の真部分集合と x とが 1 対 1 に対応づけられることになる.

この定理を証明するには帰謬法を用いる。SC(x) と x の ある部分集合 y とが 1 対 1 に対応づけられた (x が SC(x) より小さくない基数をもつ)と仮定しよう。すると,y の任意の成員 u に対して,1 対 1 に SC(x) の成員を対応させるような関数 F がある。そこで任意の u に対する F の値一これを F'u とかく一は SC(x) の成員である。SC(x) は x の部分集合を成員とするから,F'u は x のある部分集合である。したがつて,u は F'u に属するか,属しないかであろう。そこで,F'u に u が属しないような y の成員だけを集めてひとつの集合 z をつくる。(この z は空にはならない。空集合は SC(x) の成員であるが,それに対応する x の成員は空集合の成員にはならないから。)すると z は y の,したがつて x の部分集合であるから,z は SC(x) の成員である。よつて F によつて z に対応づけられる y の成員を v とする。そこで,v は F'v,すなわち z に属するかそれとも属しないかを考えてみよう。

v は F'v, つまり z に属するとする. すると z は 「F'u に属しないような y の成員 u の集合」なのだから、v は F'v に属しないはずである. よつて矛盾を生ずる. そこで、v は F'v に属さない. ところが、F'v、つまり z は 「F'u に属しない u の集合」だから、v は F'v、つまり z に属さねばならない. そこで矛盾が生ずる. したがつて、始めの仮定「x の部分集合 y と SC(x) とは 1 対 1 に対応づけられる」ことが否定されねばならない. いいかえれば、対応づけによつて余るのは SC(x) の成員の方である. つまり SC(x) の基数の方が x の基数より大きい.

ところで、この定理からすぐえられるのが Cantor のパラドックスである.

Cantor のパラドックス: Cantor の定理のxに「すべての集合を成員とする集合」Mをとる。すると定理によつてMの基数はSC(M)の基数より小。しかるに,SC(M)は「Mの部分集合を成員とする集合」だから,SC(M)の成員としての集合はすべてMの成員である。よつてSC(M)

は M の部分集合となる. したがつて、SC(M) は M の部分集合である自分自身に 1 対 1 に対応づけられるから、SC(M) の基数は M の基数より大きくはない. かくて SC(M) の基数は M の基数より大であつて、かつ大でない.

Burali-Forti のパラドックスにおいて Cantor の定理に相当する役割を果たすのは次の定理である。これを仮に「順序数の定理」とよぼう。

順序数の定理

順序数の集合 x の任意の成員 u による切片は、(1) x と同型ではなく、(2) u なる順序数をもつ。

証明は次のようになる。x はその成員の順序数の大きさの順に並べれば整列集合となる。いまxのある成員uによる切片yがxと同型だと仮定する。その同型対応をF とすれば、u は y の成員ではなく、F'u は y の成員である。よつて、F'u < u. ところが、x の任意の成員 v に対して $v \le F'v$ が成りたつ。なぜなら、もし v > F'v なる v があるとすれば、それらを集めて集合をつくる。z は順序数の大小による整列集合であるから、その

最小の成員をwとすれば、w>F'w. このとき、F'w は z の、したがつて x の成員で、F は同型対応だから、F'w>F'(F'w). よつて、F'w は z の成員となるが、w>F'w だから w が z の最小の成員ということと矛盾する。 よつて v \leq F'v. u は x の成員だから、これを u に適用して、u \leq F'u. しかるに u>F'u. これは矛盾である。ゆえに (1) x はその成員 u による切片と同型ではない。

次に、(2) が成りたたないと仮定する。そのとき、x のある成員 u による x の切片は u なる順序数をもたないから、そのような x の成員を集めて集合 y をつくる。y は順序数の大小による整列集合だから、最小の成員 w をもつ。w による x の切片の順序数を v とすれば、 $v \le w$ である。そこで、もし v が v による x の切片の順序数でなければ、v は y に属し、w は y の最小の成員だから、 $w \le v$. よつて、 $w \ge v$ で $w \le v$, すなわち w = v. もし v が v による x の切片の順序数ならば、v は w による x の切片の順序数だから、v による x の切片と w による x の切片に属し、v による x の切片に属し、v による x の切片には属さないから、v による x の切片に w による x の切片には x による x の切片の順序数は x による x の切片の順序数は x による x の切片の順序数は x なることであつて x は y の成員であることと矛盾する。よつて x にいから、x のの成員であることと矛盾する。よつて x にいから、x のの成員であることと矛盾する。よつて x にいから、x のの成員であることと矛盾する。よつて x にいから、x のの成員であることと矛盾する。よつて x のが

そこで、すべての順序数の集合をとつてそれを ON とすれば、ON はその成員である順序数の大小によつて整列される。この整列集合 ON について次のパラドックスがあらわれる。

Burali-Forti のパラドックス: ON は整列集合だから順序数をもつ. それを α とする. α による ON の切片の順序数は上の定理の (2) から α

に等しい. よつて ON と α による ON の切片とは同型対応がつけられる. ところが α は ON の成員であるから、(1) によつて ON はその成員 α による切片と同型対応がつけられない. よつて矛盾が生ずる.

これら二つのパラドックスに見られる 共通 な 特徴 は次の点にあろう: (1) すべての集合の集合 M あるいは ON をとる (すべての順序数の集合という場合に,すでに順序数の概念が互いに同型対応のつく集合の特徴として,集合の集合を前提している); (2) SC(M) あるいは α それ自体が「すべての」という条件によつて,M あるいは ON の成員となる.この二点をもつとも端的に表現したものが,次の Russell のパラドックスである.

Russell のパラドックス: 自分自身を成員としないすべての集合の集合を K とする。もしKが K の成員であるならば,K はそれ自体を成員としない集合を成員とするから,K は K 自体の成員でない。よつて矛盾が生ずる。そこで K は K 自体の成員でない。ところが,K はそれ自体を成員としない集合をすべて成員とするから,K は K 自体の成員でなければならない。

II. Quine の 体 系

まず二,三の点を明らかにしておく. 以下基礎となる論理系は=をもつ第一階の述語論理とし,述語記号として ϵ だけをもつ. 変項はu, v, w, x, y, z, ……の一種類, Fx, Gxy, … はそれぞれx, x とy, …を自由変項とする任意の論理整式を示す.

さらに $\{x: Fx\}$ によつて「F といわれるものの集まり」を示し、これを「F の領域」とよぶこととする。形式的集合論の問題は、この領域のうちでどれだけのものを数学的対象としての集合と認めるかにあるといつて

よい. たとえば、変項 x, y, z,…が「集合」を示すとすれば、Russell のパラドックスの K は $\{x: x \notin x\}$ と表現されよう. いま $\{x: Fx\}$ に対しては当然次のことを要求してよい.

(A)
$$y \in \{x : Fx\} \equiv Fy$$

この $\{x: x \notin x\}$ もまたひとつの集合だと考えれば、(A) の y に $\{x: x \notin x\}$ をとつて

 $\{x: x \notin x\} \in \{x: x \notin x\} \equiv \{x: x \notin x\} \notin \{x: x \notin x\}$

これは矛盾である.

そこでこの事情を次のようにいうことができる.変項が集合を値とする 以上,

 $y \in \{x: x \notin x\} \equiv y \notin y$

の y は $\{x: x \notin x\}$ ととることはできない. つまり

(B)
$$(\exists y)(x)[x \in y \equiv Fx]$$

は、(A) が認められるかぎり $Fx \equiv x \in \{x: x \notin x\}$ に対して

 $(\mathcal{I}y)(x)[x \in y \equiv x \in \{x : x \notin x\}]$

となつて、 $\{x: x \notin x\}$ がある集合であることを表わし、 ただちにパラドックスにつながる.

 $\{x: x \notin x\}$ という領域を集合と考えることは、 $\{x: x \notin x\}$ の変項 x が 集合を値とすることと結びついて、この領域自体がその成員となるという 問題を生ずる。ところで、変項 x が集合を示すならば、

(C)
$$y \in \{x : x = x\} \equiv y = y$$

は、右辺の形からつねに成りたつ。それゆえ、変項が集合を示すという条件は、変項が $\{x: x=x\}$ という領域に属すということで表現してよい。そこで $\{x: x=x\}$ を「全領域」W とよべば、全領域とは「すべての集合の集まり」である。しかしこれが集合となるかどうかは、Cantor のパ

ラドックスから見ても疑問であろう.

Quine の体系の特徴は (B) の Fx に一定の条件を課することにある. それは次の層別化 (Stratification) の条件である.

層別化: ある論理整式のうちにあらわれる変項のすべてに対して、(n) $\epsilon(n+1)$, (n)=(n) となるように整数をあたえる(自由変項にはいつもおなじ数をあたえるが、異なる支配域の未縛変項には異なる数をあたえてもよい)。 これが可能ならばその論理整式は層別化されているという。

そこで、 $x \notin x$ は自由変項にある数を与えるかぎり、 $(n) \notin (n)$ の形で層別化できない。よつて (B) の 'Fx'に ' $x \notin x$ 'をとつて

$$(\mathcal{I}y)(x)[x \in y \equiv x \notin x]$$

とすることはできない. これと (A) とを考慮すれば $\{x: x \in x\}$ という領域が集合とはならぬことが理解される.

NF の基本的な公理は、「層別化された条件をみたすものから成る領域を集合とみなす」ことである。

(NF) 'Fx' が層別化されているならば,

 $\{x: Fx\} \in W$.

このような立場をとると、W の成員であることはその成員が集合であることを示すが、領域のうちには集合とならないものもある。 ところが $\{x: x=x\}$ は層別化されるから、W それ自体は集合となる。よつて

$W \in W$

これは NF のひとつの重要な特徴である.

ところで、層別化されている条件をみたす領域のみが集合であるとすると、あとでのべるような種々の困難がでてくる。そこで、Wの成員、したがつて変項の値としては、層別化の不可能性にかかわらず、ある種の領域を認めるのが便利である。 ある種の領域とは、 集合のみから成る領域 $\{x: (\Im y)(x\in y).\ Fx\}$ であつて、これを xFx とかく。そこで、まず次の公

理をたてよう.

(ML 1)

$\hat{x}Fx \in W$

この公理における制限は、たとえば、 $\{x: x \notin x\}$ から成る領域は W の成員でないということにすぎない。

しかし、この公理は (NF) と相容れない。(NF) によつて $W \in W$ であり、変項の値として W の成員を認めるかぎり、 W そのものは変項の値となりうるから、

(1) $\hat{x}(x \notin x) \in \hat{x}(x \notin x) \equiv .(\exists y)(\hat{x}(x \notin x) \in y).\hat{x}(x \notin x) \notin \hat{x}(x \notin x)$ (ML 1) によつて $\hat{x}(x \notin x) \in W$ だから、 $(\exists y)(\hat{x}(x \notin x) \in y)$. ゆえに Russell のパラドックスが現われる.

そこで、変項の値としては W を認めるわけにはゆかない。 そこで、 $W \in W$ の左側の W が問題なのであるから、この W を $\hat{x}(x=x)$ に格下 げして、これを V とかこう。(ML 1) から当然 $V \in W$ である。

しかし、もし層別化不能な Fx に対しても、 $\hat{x}Fx \in V$ が認められれば、 (1) と全く同様にパラドックスが生ずる. そこで、層別化可能な Fx にだけ $\hat{x}Fx \in V$ を認めることにすれば、 $\hat{x}(x \notin x)$ に対して、 $(\exists y)(\hat{x}(x \notin x) \in y)$ はいえないから、(1) の形でパラドックスはでてこない. それゆえ、

(ML 2) Fx が層別化されているならば,

$\hat{x}Fx \in V$

この二つが ML の公理である。ML においては層別化可能であろうとなかろうと、 $\hat{x}Fx$ は変項の値となるが、W は値とならない。以下 Fx が層別可能な場合に $\hat{x}Fx$ を集合、可能でない場合をふくめたとき、 $\hat{x}Fx$ を fx クラスとよぼう。したがつて、 $\hat{x}(x \notin x)$ はクラスであるが、集合ではない。ところで、fx0 は層別化可能だから fx0 ところで、fx1 に対して、fx2 に

III. NF における自然数と数学的帰納法

(NF) によつて保証されたのは集合となる領域であり、それのみが変項の値となりうる。ところが、この立場から生ずる困難のひとつは、数学的帰納法の問題である。NF において自然数の集合 N を次のように定義するとしよう。

 $x \in N \equiv (y)[0 \in y.(z)(z \in y \supset z+1 \in y). \supset x \in y]$

いま y に対して $\{u: Fu\}$ をとれば,

 $x \in \mathbb{N} \supset : Fo. (z)(Fz \supset F(z+1)). \supset Fx$

すなわち自然数に対する帰納法の公式がえられる。ところが、証明しようとする事柄 F,したがつて Fu が層別化されていないならば、 $\{u\colon Fu\}$ が集合として y の値となりうること、つまり $\{u\colon Fu\}\in W$ は全く保証されえない。よつて帰納法の適用範囲はかなり限られたものとなる。

そこでいま任意の x に対して

$$(1) x \in N \supset \{y : y \in N. \ 0 < y \le x\} \in x$$

を証明しようとすれば、帰納法の Fx に $\{y: y \in \mathbb{N}. \ 0 < y \leq x\} \in x$ をとらねばならない。 ところが y は x とおなじタイプだから、ここで必要な領域は y よりひとつうえのタイプとなつて、それが x の成員であるという条件は層別化できない。よつてこの式の証明は不可能になる。

((NF) においては 0, 1, 2, \cdots はそれぞれ成員をもたぬ空集合の単集合 $\{\varLambda\}$, 1 個の成員から成る単集合の集合 USC(W), 2 個 の異なる成員から成る集合の集合, のように定義される. それゆえ (1) の意味は $\Lambda \in \{\varLambda\}$, $\{1\} \in USC(W)$, $\{1,2\} \in 2$, \cdots である.)

いま、(1) の x に空集合 Λ をとれば、 Λ が成員をもつことになつてしまう。 よつて

(2) $x \in N \supset x \neq \Lambda$ bank $\Lambda \notin N$.

ところが(2) はタイプ理論に特有な事情から

無限公理 $(\exists x)[(\exists y)(y \in x). (y)(y \in x. \supset (\exists z)(y \subset z. z \in x)]$

と等値なことが知られている。それゆえ,(1) の証明可能性は無限公理の証明可能性と結びついているのである。(タイプ理論における x+1 の定義は x+1 の存在しないときには Λ となるようにつくられている。 それゆえ (2) は自然数 x には x+1 が存在することであり,無限公理に等値である。)

IV. NF における Cantor の定理

Cantor の定理の証明に用いた z という集合は領域の形では次のように表わすことができる.

 $\{u: u \in y. u \notin F'u\}$

ところが層別化の方法を適用すると、Fという関数がおなじタイプの変項の間の関係と考えられるかぎり、F'u は u のタイプとおなじでなければならない。ところが u¢F'u だから F'u は u よりひとつうえのタイプとなる。したがつてこれは層別化できないから、z¢W なることはいえない。F によって z に対応する v について論ずることは、Fvz なる v について論ずることであるが、これは、F が変項したがつて集合間の関係である以上、z¢W を要求することに他ならない。z¢W がいえない以上この議論を展開することはできない。

 $\{u: u \in y. u \in F'u\}$ を層別化しうるためには,F'u のタイプをひとつ u よりあげて,u そのものではなく u をただひ と つ の 成員とする単集合 (unit set) $\{u\}$ ととる他はない($x \in \{u\} \equiv x = u$,すなわち $\{u\}$ は $\{x: x = u\}$). したがつて z は $\{u: u \in y. u \notin F'\{u\}\}$ ということになる.このよ

うに変えて証明される結果は、「ある集合xのすべての成員の単集合からなる集合—それをUSC(x)とかく—の部分集合の集合—SC(USC(x))—は、xよりも大きな基数をもつ」ということになる。

通常,集合の成員のそれぞれとそのひとつづつを成員とする単集合とは 当然 1 対 1 の対応がつけられると考えられよう。もしそれが可能ならば, そのような集合 x は Cantorian であるとよばれ, Can(x) とかく。もし 集合 x が Cantorian ならば,x と USC(x) は 1 対 1 に対応づけられ, その基数は等しくなる。ゆえに「Can(x) なる x に対しては, Cantor の 定理が成りたつ」こととなるが,一般にはいえない,

いま $W \in W$ であるから W は集合となり、x という変項の値となりうる。この W に上のように変えられた定理を適用すれば、W は Cantor のパラドックスの M にあたる。それゆえ、もし Can(W) ならば、Cantor のパラドックスが生ずる。よつて $\sim Can(W)$ 、すなわち W はその成員の単集合の集合 USC(W) と 1 対 1 の対応がつかない。これは、理解に困難で、かなり奇妙な事態である。しかし、集合の成員 u とその単集合 $\{u\}$ との間の対応とは $\{<v,u>:v=\{u\}\}$ なのであり、v,u がおなじタイプという条件の存するかぎり層別化不能であるから、そのような順序集合としての F は集合としては保証されないことを考えれば、かえつて当然といえるかも知れない。

この Cantorian であるという条件は、タイプの異なる二つの対象、ある集合の成員とその成員の単集合との間の1対1関係があるということであるから、いまのべたようにこの条件自体、つまり Can(x) という条件は層別化できない。W という奇妙な集合ならともかく、普通の有限集合 xに対してそれが Can(x) であることは期待してよかろう。事実、自然数xに対して、x 個の成員をもつ Can(y) なる集合があることを証明することは可能である。

 $(\mathcal{I}y)[Can(y), y \in 0]$

$(\mathcal{I}y)[Can(y), y \in 1]$

ところがこれをすべての自然数に対して証明しようとすると、つまり $(x)[x \in N \supset (\Im y)[\operatorname{Can}(y), y \in x]]$

を示そうとすると困難がおこる. 証明は帰納法によるが、それに用いられる $\{x: (\exists y)[\operatorname{Can}(y).\ y \in x]\}$ は $\operatorname{Can}(y)$ のために層別化不能で、帰納法が適用できないからである.

Burali-Forti のパラドックスについても同様な事態があらわれてくる. 順序数の定理の証明にあらわれる y は、(NF) によつては集合であることが保証されない。その理由はこうである: y は、x の成員 u による x の切片の順序数が u にならないような u から成る集合である。u による x の切片は x の部分集合であるから x とおなじタイプ・したがつてそれは u よりひとつうえのタイプである。u による x の切片の順序数は、それゆえ、それらの集合としてさらにひとつうえのタイプで、u より二つうえのタイプである。それゆえ u による x の切片の順序数と u とが等しくないという関係は層別化できない。そこでこの定理を証明するためにはu ではなくて、それよりタイプが二つうえの順序数をとらなければならない。もしこれがこのような制限なしに証明しうるとすれば、Burali-Forti のパラドックスはあらわれる。NF においては順序数全体の集合 ON の存在は保証され、しかもそれが整列集合であることがいわれるからである。

V. NF と 選 択 公 理

このような奇妙な Cantorian でない集合が NF にあるから、通常の集合論の結果は Cantor の定理に明らかなように Cantorian である集合に限られることとなろう。W のような Cantorian でない集合の性質は予測し

がたい. このような危惧は 1953 年に Specker によつて裏書きされた. NF の体系に選択公理を加えると矛盾の生ずることが彼によつて証明されたのである.

その証明の細部に立ち入ることは不可能であるが、その概観を試みてみよう。そのためには選択公理について一言しておく必要がある。

選択公理: たがいに共通な成員をもたぬ空でない集合の集合 x をとるとき, x の成員である集合のそれぞれと, ただひとつの成員を共有するような選択集合をつくることができる.

この内容を直観的に理解するには Russell の吡喩が便利であろう. 左右一組の靴の集合 x をとる. x の成員である一組づつの靴からそれぞれひとつづつ目じるしを選ぶとする. x が無限の靴の組から成つていても,たとえばそれぞれ右の靴を選ぶということにすれば,それら目じるしの集合y (選択集合) は概念的には構成可能であろう. ところが一組のストッキングの集合だつたらどうであろうか. 左右の別はないから,靴の場合のような規定は不可能である. それにもかかわらず,そしてその方法は分らないにしろ,かならずそれが可能だということを保証するのがこの公理である.

この公理が Zermelo によって始めて提出されて以来,さまざまな議論がまきおこつたがそれには立ち入らない.要するに,どのような方法で選択集合が現実につくられるのか分らないという,この公理の超越的な性格が問題となつたのである。しかし,この公理の必要性は,これもしくはこれに等値なものがないと,「すべての集合は集合の包含関係によつて比較しうる」ということが証明できず,したがつて数の大・小関係が無限の数をふくんで一般的に確立できないことにある。それゆえ,選択公理は集合論に必要のみならず,Cohenの証明したその独立性からいつても不可欠と考えられている。

さて、Specker の証明の方法をみよう、彼は選択公理として、それと等

値な次の形をとる.

すべての基数 m, n は次の関係によつて整列される: $x \in m$ かつ $y \in n$ で $x \subseteq y$ または $y \subseteq x$ なる集合 x, y がある.

まずその基数が m であるようなある集合 x の部分集合 の集合 SC(x) (これは $\{y: y\subseteq x\}$ ともかける) の基数は通常 2^m に等しい、そこでCan(x) なる x に対してはこれはいえるが、Cantorian でない集合には A をあてる。 すなわち、x の基数を Nc(x) であらわせば、

(1)
$$(\Im x)(m = Nc(USC(x))) \supset 2^m = Nc(SC(x))$$

(2)
$$\sim (\mathcal{I}x)(m = Nc(USC(x))) \supset 2^m = \Lambda$$

Can(x) なる x に対しては、その基数 m は Nc(USC(x)) に等しいから (1). ~Can(x) なる x に対してはその基数 m は Nc(USC(x)) に等しく ないであろう。ゆえに m が ~Can(x) なる x の基数となるときは (2). いま m=Nc(USC(W)) ととれば、(1) によつて $2^m=Nc(SC(W))$ で、これがさらに Nc(W) に等しいことは SC(W)=W からすぐ証明できる。また Nc(USC(W)) < Nc(W) なることがいえるから、 $Nc(USC(W)) < Nc(W) = 2^m$,よつて (2) から $2^{2^m} = \Lambda$. もし m < Nc(USC(W)) ならば、選択公理によつて m=Nc(USC(x)) なる x があるから $2^m=Nc(SC(x)) \neq \Lambda$ 、 $2^{2^m} = 2^{Nc(SO(x))} \neq \Lambda$. そこで、 Λ をのぞく、m、 2^m , 2^{2^m} …の集合を $\phi(m)$ とすると、うえの考察から

(3)
$$m \leq Nc(USC(W)) \supset . m \in \phi(m), 2^m \in \phi(m),$$

(4)
$$m > Nc(USC(W)) \supset \{m\} = \phi(m)$$

さらに m 個の成員をもつ集合 x の成員の単集合の集合 USC(x) のうちにある単集合の個数を T(m) であらわす:

(5) もし m=Nc(x) ならば、T(m)=Nc(USC(x)) Can(x) ならば T(m)=m である。またどんな基数 m をとつても、もし

 $m \le Nc(USC(W))$ ならば、m は Can(x) なる x の基数だから T(m) = m で、また(1)により $2^{T(m)} = Nc(SC(USC(x)))$; Nc(SC(USC(x))) = Nc(USC(SC(x))) は証明できるから、 $2^{T(m)} = Nc(USC(SC(x))) = T(2^m)$. よつて

(6) $m \leq Nc(USC(W)) \supset T(2^m) = 2^{T(m)}$

さらに $Nc(\phi(m))$ に関する帰納法を用いて次のことが証明できる.

- (7) $\phi(m)$ が有限のとき、かつ、そのときにかぎり $\phi(T(m))$ も有限. m が基数であれば、(5) の T(m) の定義から $T(m) \leq Nc(USC(W))$ である.そこで (3) によつて
 - (8) $T(m)\in\phi(T(m)).\ 2^{T(m)}\in\phi(T(m))$

いま (a) $\phi(m)$ が一つの成員しかもたないと仮定する (8) によつて Nc $(\phi(T(m))) \ge 2$ であるから, $Nc(\phi(m)) < Nc(\phi(T(m)))$. また (b) $\phi(m)$ がいくつかの成員をもつと仮定する。 $\phi(m)$ の定義から,その成員は m と $\phi(2^m)$ の成員とである。そこで,もし $Nc(\phi(2^m)) < Nc(\phi(2^{T(m)}))$ ならば, $Nc(\phi(m)) < Nc(\phi(T(m)))$ ($\phi(m)$, $\phi(T(m))$ の成員はそれぞれ m, 2^m , 2^{2^m} , … と T(m), $2^{T(m)}$, $2^{2^{T(m)}}$, … であるから)。しかし (6) によつて, $T(2^m) = 2^{T(m)}$ である。そこで.

- (9) $Nc(\phi(2^m)) < Nc(\phi(T(2^m))) \supset Nc(\phi(m)) < Nc(\phi(T(m)))$. ゆえに、 $\phi(m)$ が有限であるようなすべての基数 m に対しては、(a)、(b) いずれかの仮定が成りたつから、 $Nc(\phi(m))$ についての帰納法によつて、 $Nc(\phi(m)) < Nc(\phi(T(m))$ であり、したがつて $m \neq T(m)$ であることが示される.
 - (10) $\phi(m)$ が有限ならば、 $m \neq T(m)$.

そこで、帰納法の仮定として次のことを仮定しよう: 基数間の大・小関係が選択公理によつて整列しているとし、mは $\phi(m)$ が有限であるよ

うな最小の基数とする(このような基数のあることは Nc(W) の例から分る。 $\phi(Nc(W))$ は(4)から $\{Nc(W)\}$ 。そのとき(10)から $m \neq T(m)$ 。ところが(7)によつて $\phi(m)$ が有限ならば、 $\phi(T(m))$ も有限である。いま、m は最小の基数だから、 $m \leq T(m)$ 。 さらに、 $m \leq T(m)$ なる m に対しては m = T(p) なる m が存在することが簡単に示される。 それゆえ、 $m \leq T(m) = T(m) = T(T(p))$ 。よつて $m \leq T(p) = T(m) = T(m) = T(p)$ は有限であり、m は最小の基数だから $m \leq p \leq T(p) = m$ 。 ゆえに m = T(p) = p。 それゆえm = T(m) となつて、これは(10)と矛盾する。

この証明の巧妙な点は Cantorian でない Nc(W) の性質をつかつて, $2^{Nc(W)}=\Lambda$ にとる点にある。いま 0 を $\{\Lambda\}$, 1 を USC(W) と定義すれば, $\phi(0)$ は $\{0, 2^0, 2^1, 2^2, 2^{2^*}, \cdots\}$, $\phi(1)$ は, $2^{Nc(W)so(W))}=Nc(W)$, $2^{Nc(W)}=\Lambda$ によつて, $\{1, Nc(W)\}$, ところが $\phi(Nc(W))$ は $\{Nc(W)\}$, Nc(W) は最大の基数であることが証明されるから,もし選択公理によって基数の集合が整列されるとすれば, 通常の大・小と, $\phi(m)$ の大・小による順序とが混乱することは察しがつく。この点をたくみについた議論である。

このように、NF に選択公理をそのままもちこめば矛盾がおきるから、この公理は Cantorian の集合にかぎられるべきであろう。したがつて、選択公理の x には Can(x) という条件が補われなければならない。 さらに一般連続体仮設から選択公理のえられることは 知 られているから、NF と連続体仮設とは相容れないことになる。

もうひとつこの Specker の結果からえられることは、無限公理の証明可能性である。有限集合に対しては選択公理は証明可能で、それを公理としておく必要はない。そこで NF において選択公理が成りたたないのは無限集合があるからだということになろう。この意味で IV でとりあげた無限公理の不必要性をいうことができる。

VI. ML の 利 点

1. 数学的帰納法

ML では NF と異なり $\hat{u}Fu\in W$ が Fu の層別化と関係なくいわれる。それゆえ, $\hat{u}Fu$ が集合でなく,単なるクラスであつてもよいから,NF に見られるような帰納法の制限は消える。そこで III の (1) における $\{y:y\in N.\ 0< y\leq x\}\in x$ にしても, $\hat{x}(y(y\in N.\ 0< y\leq x)\in x)\in W$ であつて, クラスとなりうる。これらの結果として $\Lambda \notin N$, すなわち無限公理は証明可能となる。

2. 自然数の集合 N

ML と NF における重要な相違点がうえの 1 に関連してあらわれる. いま N を二つの方法で定義したとする.

- (1) $\{x: (y)(0 \in y. (z)(z \in y \supset z+1 \in y). \supset x \in y)\}$
- $(2) \qquad \{x: (y)((\exists z)(y \in z). \ 0 \in y. \ (z)(z \in y \supset z + 1 \in y). \ \supset x \in y)\}$

このふたつの領域のうち、(1) の y は $y \in W$ なるすべてを (したがつて層別化されない $\hat{u}Fu$ をも) 意味し、(2) の y は $y \in V$ なるすべてである。したがつて (1) の条件の方が強い。もし丁度 $0,1,2,\cdots$ から成る集合 $y \in V$ があるとすれば、(2) がいえるし、また逆もいえる。しかし、もしそのような集合がないとすれば、(2) は (1) よりも条件が弱いから (1) より多くの成員をふくむ。それでは、(1) の領域は集合 $(\in V)$ となりうるであろうか。これの不可能なこと、つまり $(\exists x)(N \in x)$ は ML が無矛盾でないかぎり、証明できないことを Rosser は示した。そこで、1 でのべた ML における $\Lambda \in N$ とはあきらかに (1) の N なのであつて (2) の N ではない。ところが (2) の N とは ML の立場から見た NF の N である。NF においては $\Lambda \in N$ の証明の可能でない根拠はここに見られる。

3. Cantor, Burali-Forti のパラドックス

Cantor の定理の証明における z: $\{u: u \in y. u \notin F'u\}$ は,この場合にも, $\hat{u}(u \in y. u \notin F'u)$ の形で W の成員として ML において存在しうる.それゆえ,Cantor の定理はそのままの形で証明しうる.しかし,Cantor のパラドックスは生じない.というのは定理の x に W をとると,W の基数は SC(W) の,したがつて W の基数より小になる.そこで $W \in W$ ならば,パラドックスが生ずる.ゆえに $W \notin W$.

Burali-Forti のパラドックスについても事情はおなじである。順序数の定理における層別化されぬ条件に関する問題は ML ではおきない。 そこで順序数全体の領域 ON が ON の成員だとすれば, ON は順序数の整列集合となつて順序数をもつこととなり,Burali-Forti のパラドックスが生ずる。そこで帰謬法により ON
otion ON のすり ON は V の成員とならないクラスである。

II ですでにのべた Russell のパラドックスについてもおなじような事態があらわれる。もし $\{x\colon x \notin x\} \in W$ ならば、

 $\{x: x \notin x\} \in \{x: x \notin x\} \equiv \{x: x \notin x\} \notin \{x: x \notin x\}$

ゆえに $\{x: x \notin x\} \notin W$, よつて $\{x: x \notin x\}$ はクラスでもない.

 $\hat{x}(x \notin x) \in \hat{x}(x \notin x) \equiv .(\mathcal{I}y)(\hat{x}(x \notin x) \in y). \ \hat{x}(x \notin x) \notin \hat{x}(x \notin x).$

よつて $\hat{x}(x \notin x) \in y$ なる y はない. つまり $\hat{x}(x \notin x) \in W$ から、 $\hat{x}(x \notin x)$ はクラスではあるが、V の成員ではない. これが $\hat{x}(x \notin x)$ の層別化不能から、それをVの成員として認めなかつた理由である.

4. ML と選択公理

一方,

NF に選択公理をつけ加えれば、矛盾が生ずるという Specker の結果は、Cantorian でない集合についての問題であつた。それでは、ML において、 \sim Can(x) なる x はどうなるであろうか。

 \sim Can(x) なる x は、x とその成員からなる単集合の集合 USC(x) と

のあいだの 1 対 1 対応が,層別化不能のため,集合として保証できないところから生じた.つまり $\{<u,v>:u=\{v\}.v\in x\}$ が,おなじタイプのu,v のあいだの関係であるかぎり層 別 化不能であるところに.~Can(x) の生ずる理由があつた.どの集合 x に対しても,一般にこのような 1 対 1 対応が存在するとはいえないから,1 対 1 対応が集合としてあるのは x の特殊な性質に応じてであり,そのとき始めて Can(x) であるといえる わけである.

ML では、 $\{\langle u,v\rangle: u=\{v\}. v\in x\}$ は集合としては保証されないが、 単なるクラスとしてならば保証される。すなわち、

$$\hat{w}(\mathcal{I}u)(\mathcal{I}v)[w=\langle u, v\rangle. u=\{v\}. v\in x]$$

は、おなじタイプのもののあいだの関係でないにもかかわらず、W の成員としては保証され、変項の値となりうる。したがつてどんなxに対しても、x と USC(x) とのあいだの 1 対 1 対応はクラスとしては保証され、 \sim Can(x) なる x は消える。NF における Can(x) と \sim Can(x) との区別は、ML においては x と USC(x) との 1 対 1 対応が集合となるか、単なるクラスにすぎないかの区別になる。

これに応じて、選択公理との関係も ML と NF では異なる。 たとえば、いま Specker の形での選択公理を

 $(x)(y)[x \in NC. \ y \in NC. \ \supset (\exists u)(\exists v)[u \in x. \ v \in y. \ (u \subseteq v \lor v \subseteq u)]]$ とかく、この NC は

$$\{z: (\exists w)(z=Nc(w))\}$$

であるが、ML でこれに対応する $\hat{z}(\exists w)(z=Nc(w))$ に対して、二つの解釈がありうる。(1) ひとつは NF において z=Nc(w). Can(w) となる場合で、このとき ML では w と USC(w) との 1 対 1 対応は単にクラスではなく集合となることまで要求される。(2) もうひとつは、NF における

z=Nc(w). \sim Can(w) までふくめた場合で、このとき ML ではその 1 対 1 対応が単なるクラスとしてのみいわれる場合もふくんでいる.

そこで、ML において Nc(V) にまで選択公理を適用する以上、(2) の解釈をとらねばならない。((1) の解釈をとると、ML では Cantor の定理が成立するといつても、それは (2) の解釈においてであるから、 \sim Can(V)が NF における \sim Can(W) のように証明できる。したがつて、Speckerの証明は ML に移すことができる。)

これは,選択公理で要求される選択集合を,集合にかぎらず選択クラスにまで拡げることを必要とする.各集合からその代表の成員を選ぶときの集合と成員との対応関係は層別化されているとはかぎらない.NF において選択公理が Can(x) にかぎられねばならなかつたのは,このような事情の反映であろう.それゆえ,選択クラスの形に弱められた選択公理は ML において(すべての集合またはクラスに対して)成立すると考えてよい.

VII. NF と ML との関係——相対的無矛盾性

ML の体系は NF の体系の集合 $\{x: Fx\} \in W$ (Fx) は属別化されている) を $\hat{x}Fx \in V$ に相対化し、それに対して $\hat{x}Fx \in W$ (Fx) は層別化不要)を補なうことによつて拡張したものである。この 場合 変項の値の範囲は $\hat{x}Fx$ 一般に拡げられていて、 $\hat{x}Fx$ にあらわれる変項は $(\exists y)(\hat{x}Fx \in y)$ のいわれる前者のみに限られていない。もしこれとは逆に変項の値が限定され、それのみから Fx によつてさらに対象が構成されてゆくならば、この種の拡張を述語的拡張とよぶ。ML は NF の述語的でない、すなわち非述語的拡張である。

しかし、ML は NF に対して無矛盾である: もし NF が無矛盾ならば、ML も無矛盾であることは Wang によつて証明された。その証明のスケッチは次のようになる。Löwenheim-Skolem の定理によつて、もし

NF が無矛盾ならば、自然数の領域でモデルがある。NFをそのモデルのなかで解釈したものを G とする。ML の公理は自然数の集合の間の関係としてを理解すれば真となる、つまり $(\Im m)(\hat n(nGm)=x.\ m\in y)$ がなりたつとき x,y の間に成りたつ関係として ϵ を解釈すれば、ML の公理は真となる。ところが自然数の集合と実数との間には同型対応があるから、ML は実数の領域でモデルをもつ。通常の実数論の無矛盾性にもとづいてML は無矛盾である。

公理論的集合論の体系に対しても、それらが無矛盾ならば ML も無矛盾なることがいわれる。しかしこの逆は成りたつ可能性はないであろう。 というのは $\hat{x}(x=x)$ に対応するものはそれらの体系にはないからである・

VIII. ML と NF における個体の問題

形式的集合論においては、集合にせよ、領域にせよ、ものの集まりが基本的役割を演ずる。それでは、体系中に「集まり」でないもの、いいかえれば個体というものは果して必要であるだろうか。Russell は彼の哲学的好みから、タイプ理論を構成するのに個体から出発した。Zermeloもまた集まりでないなにか、Urelementを想定している。しかし公理論的集合論においては、「選択公理の独立性」の問題をのぞいて個体の必要は認められなかつた。その扱うものはあくまでも「ものの集まり」で十分なのである。ところでこの「選択公理の独立性」も、昨年 Cohen によつて考えられた方法を用いれば、もはや個体の存在を予想しなくてもよい。

それでは「gイプ理論」の NF と ML において個体は必要であろうか。 Quine はこの二つの体系で, $x \in y$ の y が個体であるときは x = y と解釈 する方法を提出した。そこで,NF と ML において個体が必要かどうか の問題は,

$$(1) \qquad (\mathcal{I}y)(x)[x \in y \equiv x = y]$$

なる式が NF, ML の体系において独立であるかどうかという問題に帰着しよう。この式は事実独立であり、したがつて個体の存在は、好みにとたがつて NF と ML に入れられるということを D. Scott が証明した.

まず (1) が NF で証明可能ならば,

(2)
$$(\exists y)(x)[x \in t(y) \equiv x = y]$$

すなわち、 $t(y)=\{y\}$ なる y のみを自由変項とする term が存在することが、NF において証明されうるかどうかを考える。もし可能ならば、当然 $y=t(y)=\{y\}$ ということになろう。そこで、y=t(y) が層別化されている term t(y) を level term とよぶことにすれば、この証明可能性は(1)の式の $x\in y$ の y にその level term を代入した式の証明可能性の問題となる。ところが、q なる term をもつ NF の整式 A(q) の $p\in q$ なる部分を q の level term t(q) でおきかえた整式を $A^t(q)$ とすると、次のことがいえる:

4. (3)
$$(x)(\mathcal{I}y)(z)[x=t(z)\equiv z=y]$$

と A(q) とが証明可能ならば、 $A^{t}(q)$ も証明可能である.

そこでいま必要なのは t(y) に対して (3) をみたす適当な項をみつけることである. t(y) を次のようにとろう: $y=\Lambda$ ならば $\{\Lambda\}$, $y=\{\Lambda\}$ ならば Λ , $y\neq\Lambda$ で $y\neq\{\Lambda\}$ ならば γ . $t(\gamma)$ は Λ と $\{\Lambda\}$ とをとりかえる. このとき (3) は明らかである. $(x=\Lambda$ ならば, $t(z)=\Lambda\equiv z=\{\Lambda\}$; $x=\{\Lambda\}$ ならば $t(z)=\{\Lambda\}\equiv z=\Lambda$; $x\neq\Lambda$ で $x\neq\{\Lambda\}$ ならば, $t(z)=x\equiv z=x$.) よつて (1) が証明可能ならば, (2) が証明可能である.

(2) の否定に対しても

(4)
$$\sim (\Im y)(x)[x \in t(y) \equiv x = y]$$

で (3) をみたす t(y) を見出すことができる。 手続きはさらに複雑となるが本質的に異なるところはない。

ところで, いまの証明によつて, (2), (4) はそれぞれ (1) または (1)

の否定が公理としてつけ加えられれば、証明可能となる. いま NF が無 矛盾で (2) が証明可能ならば、(4) は証明可能ではな もし (1) の否定が証明可能ならば、(4) も証明可能だから、このと (1) の否定は証 明可能ではない. それゆえ (1) を NF につけ加えても矛盾は生じない. 同様に (1) の否定をつけ加えても矛盾はでない. したがつて、(1) は NFの 公理に対して独立である.

この方法は ML に対しても移せるから、NF と ML の二つの体系に対して、われわれは個体の存在を要求することもしないことも自由である。

- 註(1) 順序数の集合 x の成員 u による x の切片の順序数は u より大きくはない。なぜなら,x の成員で u より小なる任意の順序数 v をとれば,v は u による x の切片に属する。 そこで,このようなすべての v の集合を y とすれば,y は u による x の切片の部分集合であり,かつ v に v 自身を対応させればこの対応は同型である。 ゆえに,y の順序数より大きくない。ところが,y は u による x の切片に他ならないから,u による x の切片の順序数は u より大きくない。
 - (2) 詳しくいえば、NF、ML ともに次の定義と公理が前提されている:

定義 $(x)[x \in y \equiv x \in z] \equiv y = z$.

公理 $x=y. x\epsilon z. \supset y\epsilon z.$

NF と ML については、次の文献を参照.

W. V. Quine.

New foundations for mathematical logic (From a Logical Point of View, Cambridge, 2nd. ed., 1961).

Mathematical Logic, Cambridge, 1951.

Set Theory and its Logic, Cambridge, 1963.

- B. Rosser, Logic for Mathematicians, New York, 1953.
- (3) E. Specker, The axiom of choice in Quine's New foundations for mathematical logic, Proc. of the Nat. Acad. of Sci., Vol. 39, 1953, pp. 997-975.
- (4) B. Rosser, The axiom of infinity in Quine's New Foundations, Journ. of Sym. Logic, Vol. 17, 1952, pp. 238-242.
- (2) H. Wang. A formal system of logic, Journ. of Sym. Logic, Vol. 15,

Quine の 集 合 論

1950, pp. 25-32.

- (6) S. Orey, On the relative consistency of set theory, Journ. of Sym. Logic, Vol. 21, 1956, pp. 280-290.
- (7) D. Scott, Quine's individuals (Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Stanford, 1962, pp. 111-115).