

Title	集合と外延
Sub Title	L'ensemble et l'extension
Author	大出, 晁(Oide, Akira)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1961
Jtitle	哲學 No.40 (1961. 10) ,p.197- 226
JaLC DOI	
Abstract	<p>Il n'est pas difficile de deduire une contradiction dans un systeme, auquel on accepte les suppositions suivantes: (I) l'extension du concept est un ensemble des objets, auxquels le concept peut s'appliquer; (II) tous les concepts ont des extensions; (III) l'ensemble quelconque peut etre un membre de l'ensemble. Il s'ensuit de la que nous sommes obliges de reviser ces suppositions. On peut dire que la construction des theories formelles des ensembles est un effort de cette sorte. Principia Mathematica d'ailleurs restreint la formation des concepts, d'ou il resulte que (I), (II) et (III) n'y sont maintenus qu'avec une restriction. Quine, dans "New Foundation", postule que les concepts stratifies seuls aient des extensions. Le systeme de Zermelo-Fraenkel n'accepte pas que l'extension soit un ensemble des objets quelconques et il precise axiomatiquement les objets qui sont capables de former des extensions. "Mathematical Logic" de Quine est aussi dans cet ordre de pensee: l'extension est un ensemble des objets qualifiees ("elements") et les extensions des concepts stratifies seuls peuvent etre des elements. Le systeme de von Neumann-Godel-Bernays n'admet pas, lui non plus, (I) et fait une distinction nette entre l'ensemble et l'extension: celui-la peut etre un membre, tandis que l'ensemble et l'extension: celui-la peut etre un membre, tandis que celle-ci ne peut appartenir comme membre ni a l'ensemble ni a l'extension. Apres avoir ainsi eclairci la prise de position de chaque systeme concernant l'ensemble et l'extension, je discute le probleme de realisme et nominalisme dans les fondations des mathematiques. Je pense que le realisme peut justifier plus facilement les procedes et notions fondamentaux des mathematiques, mais on ne peut dire la conclusion definitive en situation actuelle. Il serait bien raisonnable de respecter "plea for tolerance" de Curry.</p>
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000040-0205

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

集 合 と 外 延

大 出 晁

§ 1.

形式論理学の書物にはほとんどつねに次のような主張がみられる：「概念は、それが適用される対象の集りであるところの外延をもつ」。この外延は対象を規定する特徴の集りであるところの内包と対をなして、
 「概念の内包がまずにつれてその外延は減少し、外延がまずにつれて内包は減少する」といつた法則が、場合によつては若干の留保をつけられながらも、主張されているのがふつうである。このような概念の外延についての考え方は次の Lalande の例のうちにきわめて簡潔にしめされているといえよう：「外延」とは「認識のある要素がそれに適用されるところの（実在的あるいは観念的な、具体的あるいは抽象的な）対象の集合」であり、
 「第一に概念に対しては、概念がさししめす（その概念がその属性である）対象の集合；第二に命題に対しては、命題が真であるケースの集合（したがつて命題がその帰結であるところの仮設の集合）；……」¹⁾なのである。ここではわれわれは概念の外延のみを考えれば充分なので、この説明をまず次の形に要約する。

I. 概念の外延とはその概念の適用される対象の集合である。

ところで、形式論理学の書物では概念論においてこの外延の説明がなされているのであるから、おそらく「すべての概念は外延をもつ」ことが主

張されているのだと思われる。少くとも、外延をもたぬ概念の存在や範囲についてはつきりのべられていないことは事実である。実際、Lalande はまた次のようにのべている：「すべての概念は空でありうるところの外延をもつ。……」²⁾。それゆえ、この主張を次の形でかかげておこう。

II. すべての概念は外延をもつ。

以後、I を「外延の定義」、II を「外延の要請」とよぶことにする。

ところが、しばしば不注意にのべられているこの外延の定義と要請、すなわち I と II はたがいに両立しえないことは次の Russell のパラドックスに関する考察からただちに明らかとなる。いま、「自己自身を成員 (member) としてもたない集合」—P と略記する—という概念をとろう。この概念は II によつて外延をもつ。この外延は、I によつて、その概念の適用されるところの対象の集合なのであるから、「 x は自己自身を成員としてもたない集合である」といえるような x の集合ということができよう。これを通常の記法にしたがつて $\{x \mid x \text{ は自己自身を成員としてもたない集合である} \}$ —これを略して $\{P(x)\}$ とかく—によつてあらわすこととする。それではこの外延それ自体は P の外延に属するであろうか。

いま、属すると考えると、「 $\{P(x)\}$ という外延はその外延それ自体を成員としてもつ」、すなわち「 $\{P(x)\}$ は自己自身を成員としてもつ」こととなる。しかし、そのときは $\{P(x)\}$ に P が適用できる訳であるから、「 $\{P(x)\}$ は自己自身を成員としてもたない集合である」ということが P の内容的な規定からでてくることとなる。ところがはじめには「 $\{P(x)\}$ は自己自身を成員としてもつ」ことが前提されていたのであるから、矛盾が生ずる。そこで、「 $\{P(x)\}$ は P の外延に属しない」、いいかえれば「 $\{P(x)\}$ は $\{P(x)\}$ の成員ではない」ということになる（この場合「成員として属するか属しないかのいずれかである」という形の排中律を前提

としていることはいうまでもない³⁾。ところが、このとき「 $\{P(x)\}$ は $\{P(x)\}$ の成員でない」ということは「 $\{P(x)\}$ は自己自身を成員としてもたない集合である」ということにほかならず、したがって P の内容的規定から「 $\{P(x)\}$ に P という概念が適用できる」、すなわち「 $\{P(x)\}$ は P の外延に属する」ということになつてふたたび矛盾が生ずる。これはパラドックスにほかならない。

このように I と II とから矛盾が生ずるということになると、少くともそのどちらかを否定しなければならなくなる。しかし、I はむしろ外延の定義なのであるから、これを否定することは II の内容を変えることにほかならない。それゆえ、いずれにしろ、II をそのままに保持することは不可能となる。私が II をあえて要請とよんだのはこのような事情からである。かくして、I の定義をそのままとすれば、

III. すべての概念が外延をもつとはかぎらない、

ということが帰結される。

Cantor にはじまるいわゆる「素朴集合論」において 19 世紀末から種々のパラドックスが発見されて以来、集合論と不可分の関係にあつた記号論理学の発展と「形式的集合論」あるいは「公理的集合論」とよばれる集合論の再建設の試みは、まさしくこの I と II をめぐるひとつのたまたかいであつたといつても過言ではない。II の要請がそのままでは認めがたくなつたという事実は、不注意に認容されてきた外延およびそれに関係する諸問題を新しくとらえなおさねばならないことを意味する。私はここでその歴史的な発展とともにそこから導きだされる若干の結果について考察してみたいと思う。

註 1. André Lalande, Vocabulaire technique et critique de la philosophie,

Presse universitaire de France, Paris, 1947, extension の項参照。

註 2. André Lalande, *ibid.*, concept の項参照。

註 3. このような排中律の適用に対して異議をとなえることも可能である。しかし、そのときには前提とされている論理は通常の論理と性格がきわめて異なるものとなろう。このような試みについては以下の敘述ではふれないが、Brouwer, Heyting, Fitch らの論文を参照されたい。とくに、

A. Heyting, *Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

F. B. Fitch, *Symbolic Logic*, Ronald Press Co., New York, 1952.

§ 2.

以上の問題をより詳細に分析するために、若干の記号論理的方法をもちいて整理してみる。まずある対象 x に対する任意の概念 F の適用を $F(x)$ という形であらわし、¹⁾ F の適用される対象の集合を $\hat{z}[F(z)]$ であらわすとともに、成員と集合との関係を 'ε' であらわすとすれば、I の外延の定義は次の形で表現される。

$$(A) \quad x \varepsilon \hat{z}[F(z)] \equiv F(x)^{2)}$$

(対象 x が F という概念の外延 $\hat{z}[F(z)]$ に属するのは x に F が適用されるとき、かつそのときにかぎる。)

II の外延の要請はこの記法から、

$$(B) \quad (\exists y)(x) [x \varepsilon y \equiv F(x)]^{3)}$$

(どのような x をとつても $F(x)$ が成立するとき、かつそのときにかぎって x がそれに属するような集合 y が存在する。)

(B) から上の (A) によつて

$$(\exists y)(x) [x \varepsilon y \equiv x \varepsilon \hat{z}[F(z)]],$$

したがって、

$$(C1) \quad (x) [x \in a \equiv x \in b] \supset a = b$$

が前提されていれば、ただちに

$$(B') \quad (\exists y) [y = \hat{z} [F(z)]]$$

となつて、(B) は F の外延の存在を要請していることにほかならない。また、

$$(C2) \quad a = b \supset (x) [x \in a \equiv x \in b]$$

が前提されていれば、(B') から

$$(\exists y) (x) [x \in y \equiv x \in \hat{z} [F(z)]],$$

(A) によつて

$$(\exists y) (x) [x \in y \equiv F(x)],$$

すなわち (B) がえられる。そこで (C1) と (C2) の一組を (C) とよぶことにすれば、⁴⁾ (C) が前提されているかぎり、(B) と (B') とはたがいに等値である。

ところで §1 の「自己自身を成員としてもたない集合」という概念 P に関するパラドックスは次のようにしてでてくる。この P を

(1) $\sim(z \in z)$ (「z は z の成員でない」) と表現する。そのとき、(A) によつて

$$(2) \quad x \in \hat{z} [\sim(z \in z)] \equiv \sim(x \in x).$$

いま、(B) によつて

$$(3) \quad (x) [x \in a \equiv \sim(x \in x)]$$

なる a の存在が保証される。ところがこの a は P の外延にほかならないはずである。事実、(2) によつて

$$(4) \quad (x) [x \in a \equiv x \in \hat{z} [\sim(z \in z)]],$$

すなわち、(C1) によつて

$$(5) \quad a = \hat{z} [\sim(z \in z)].$$

そこで、 $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ (Pの外延) に $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ 自身が属するかどうかを考察する。このとき、

(6) (3) で主張されている任意の x の値として $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ をとると考えられたのであるから、

$$(7) \hat{z}[\sim(z \in z)] \in a \equiv \sim[\hat{z}[\sim(z \in z)] \in \hat{z}[\sim(z \in z)]].$$

ところが、(5) によつて

$$a = \hat{z}[\sim(z \in z)]$$

であるから、

$$(8) \hat{z}[\sim(z \in z)] \in \hat{z}[\sim(z \in z)] \equiv \sim[\hat{z}[\sim(z \in z)] \in \hat{z}[\sim(z \in z)]].$$

これは同一の命題の肯定と否定が同時に成立することを主張しているから矛盾である。

註 1. 「人間」という概念を「プラトン」に適用すれば、「プラトンは人間である」が真として主張される。そこでこの「プラトン」を x でおくと、「 x は人間である」という表現がえられるが、これは対象が未定なために一定の命題というよりはむしろ、外延を形成するための対象に対する条件を表明することとなり、ふつう「命題函数」とよばれる。記号論理的な通常的手段においては、概念の単独な存在よりもこのような意味での条件の方がより基本的であり、したがつて概念よりも命題（あるいは命題をあらゆる言語表現—文章）の方が重要である。そして「概念」という語もまた、うえの「文章」の（「指示」と区別された）「意味」と関連して定義される（たとえば、A. Church, Introduction to Mathematical Logic, Introduction）が、こゝではこのような厳密な意味で概念なる語をもちいずに、理解をさまざまに範囲で、うえの「条件」の意味をふくめて使用する。しかし、この問題はあとにのべる実念論と唯名論の問題に関して重要な論点となる。それゆゑ、もし x に F が適用されるという実念論的表現をさけるならば、これを「 $F(x)$ は真である」とよみかえればよい。

註 2. この論文でもちいられる論理記号については説明するまでもないであろうが「 \sim 」は否定、「 \equiv 」は「…のとき、かつそのときにかぎり」、 \cdot 」は「そして」「 \supset 」は「もし…ならば、—」、 (x) 」は「すべての x に対して」、 $(\exists x)$ 」は「ある x が存在する」を示す。

註 3. 正確には $F(x)$ に y はあらわれないものとする.

註 4. (C) は「二つの集合はすべての成員が同一なるとき、かつそのときにかぎり同一である」ことを要求することとなるから一般に「外延性の公理」(Axiom of extensionality) とよばれる.

§ 3.

§ 2 においてなされた矛盾の形式的な演繹は、§ 1 の考察ではあきらかにされえなかつたいくつかの論点をはつきりさせる。以上のようなパラドックスを回避するために歴史的にどのような試みがなされてきたかを、いま § 2 の叙述に応じて考察してみよう。

すでに Hermes-Scholz は (B), (C) をみたすような論理系を「理想計算」(Idealkalkül) とよんだ。¹⁾ われわれもこれにならつて、(A), (B), (C) を認めるような論理系を「理想計算」と名づけておく。²⁾ この「理想計算」においては、§ 2 でみたようにパラドックスが帰結されるが、その演繹の過程においては (6) にみられるところの重要な前提がふくまれていることを指摘しておく必要がある。すなわち (6) における操作において、われわれは

(D) 外延は外延の成員となりうる、

ことを認めている。そして、パラドックスを回避するということは、この「理想計算」に修正を加えることにほかならない。

「理想計算」を修正する試みのひとつは、周知のように Principia Mathematica にはじまる「タイプ理論」である。Russell はパラドックスの原因を、概念、したがつてそれを表現する命題函数 (propositional function) の循環性にあると考えた。そこでこの危険な循環性を「悪循環原理」(Vicious-circle Principle) に定式化して、これをおかすものを概念構成の、それゆえ命題函数の形成の範囲からのぞいたわけである。したがつて

「理想計算」において許されていた $\sim(x \in x)$ という表現が、Principia Mathematica の体系においては許されないこととなつた。Principia のひとつの特徴は (A), (B) がひとつの形にまとめられて、

$$(B_p) \quad (F)(x) [x \in \hat{z} [F(x)] \equiv F(x)]$$

が前提されていることであるが、そこにあらわれる $F(x)$ は「悪循環原理」の制限をうけているため、「循環的な」概念構成に対する $F(x)$ は許されないのである。その意味では (A), (B), (C) は成立してもすべて制限をうけているといふことができる。

Russell の立場はある種の存在論的考察を背景としていた。彼は個物、個物の集合、個物の集合の集合といった一種の階層的な存在秩序によつて「悪循環原理」の正当化を試みたのである。そしてこの存在論的な背景は、§2 の (D) なる前提を否定して「外延は外延の成員となることはない」という結果をひきおこした。したがつて Russell の試みは (A)–(D) の前提のうちで (D) にみられる循環性の拒否に出発しているといえる。しかし、このような対象の存在秩序は数学の体系をつくるのに大きな困難をひきおこす。いわゆる「還元可能公理」(Axiom of reducibility) はその困難をのりきるための試みであつたが、それが多くの議論をまきおこしたことはここにくりかえすまでもない。この「公理」の意図したところのものは、当初の制限をゆるめてある種の（危険でない程度の）循環性を許すことであつた。³⁾

Quine の New Foundations—NF—は Principia の延長線上において「理想計算」の修正を追求した。^(註 4) 彼はまず、Principia がその命題函数の定義のうちに暗黙にふくんでいた、上述の (B_p) という前提を (A), (B) の形でとりだす。そして「循環性」のうちにパラドックスの重要な原因を見出す点において Principia と同様であるが、Quine はこのような「循環的

な」概念構成を禁止するよりも、むしろ「循環的な」概念が外延をもつことを禁止しようとした。より正確に言えば、彼は循環性を手がかりとして外延をもちうる概念の範囲を明確にしようとした。したがって、ここでは制限されねばならぬのは「循環的概念」そのものではなくてその外延なのである。このように「外延」をもつことの保証されている概念の判定基準が、彼のいう「stratification」(層別化)である。この stratification とは、(B) の $F(x)$ が $x_1 \in y_2, (y_2) [y_2 \in z_3 \supset x_1 \in y_2]$ のように、その変項に対して $n \in n+1$ のような整数の suffix をもちうる形であることを要求する。そして(B)によつて外延の存在の保証されているのは、このように stratification の可能な概念なのである。それゆえ、この基準にしたがえば、逆に stratification のできない概念、たとえば $x \in x$ あるいは $\sim(x \in x)$ は(B)によつては外延の存在が保証されていないことになる。

この stratification は Principia に発する「タイプ理論」の延長線上にあることはあきらかであるが、Principia に対して次の差異をもつ。まず、「悪循環原理」の背後にある存在の階層という前提はもはや必要でなくなる。したがってそこから生ずる困難はきえ、とくに(D)という前提は保持されるとともに、「還元可能公理」の必要もなくなる。第二には、概念構成そのものが不当に制限されずにすむという点である。これは Principia が「すべての概念は循環的でない」ことを要求し、したがってそこから「循環的でない概念は外延をもつ」ということが結果したのに対して、Quine はまず概念構成とその外延の存在との二つを分けることによつて、外延の存在をまず「すべての概念が外延をもつとは保証されていない」という形におきかえた結果である。その意味では Principia と New Foundations の間には類似性はあるながらも基本的な態度はかなり異なるものといえよう。そしてこの Quine の態度は Principia と平行的に展開されていた「理想計算」を修正するもう一つの方法、「公理的集合論」

に示唆をうけていることは次の考察からあきらかとなるろう。

註 1. Hermes und Scholz, *Mathematische Logik, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Teubner, Leipzig, 1952, S. 57.

註 2. 厳密に言えば、公理的な構成からは、

$$x=y \supset x \in z \supset y \in z$$

(同一の成員はおなじ集合の成員である) が前提される必要がある。そしてこの前提の下では (C2) は不要となるが、こゝではそれを問わない。以下「理想計算」の条件にはこの前提と通常の (古典的な) 述語論理の体系がふくまれているものとする。これにかわる方法については、

Fraenkel and Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1958, pp. 27-33 参照。

なお、こゝでいう「理想計算」は Quine の *New Foundations* における P1, R1—R5, D8 からなる体系とひとしい。Quine, *From a Logical Point of View*, Harvard U. P., Cambridge (Mass.), 1953, pp. 80-101.

註 3. Principia の方法については拙稿 *Principia Mathematica* における命題函数 I, 植田清次編著「科学哲学への道」, 242-275 頁, 同 II, 三田哲学会編「哲学」第 35 集 (慶応義塾創立百年記念論文集), 95-120 頁を参照されたい。

註 4 Quine, op. cit., Chapter V. *New Foundations for Mathematical Logic*, および

J. B. Rosser, *Logic for Mathematicians*, Mcgraw-Hill, New York, 1953 を参照されたい。

§ 4.

「公理的集合論」のひとつ、いわゆる Zermelo-Fraenkel の体系は、¹⁾ 「タイプ理論」と異なり、外延の定義 I を修正する。すなわち外延の定義にあらわれる「集合」という語を明確にする、あるいは制限することによってパラドックスを回避しようとする。この方法によると、「概念の適用できる一定の資格をもった対象が集合を形成する」のであつて、その結果

外延の定義にあらわれる集合をこの限定された意味につかつて、(a)「外延とは概念の適用できる任意の対象の集合ではなく、一定の資格をもった対象の集合である」こととなるか、または定義中の「集合」を限定された意味につかわずに、(b)「外延は任意の対象の集りであるが、必ずしも（限定された意味での）集合を形づくるとはかぎらない」こととなる。いずれにしろここでは外延の定義の限定かまたは外延と集合との間の差異があらわれてきて、それゆえこの立場において修正されるのは「外延と集合を無条件に同一視する」という (A), (B) の前提である。この事情をあきらかにするのが、この体系でもつとも特徴的といわれる、次の「選出公理」(Aussonderungsaxiom) である。

$$(B_z) \quad (\exists y)(x)[x \in y \equiv x \in b \cdot F(x)]$$

(ただし、 y は $F(x)$ にあらわれない。)

これと (B) との差異は x に一定の資格条件を課する $x \in b$ という因子である。この因子のために §2 における演繹をこの (B_z) から出発して行おうとすると、えられる結果は

$$\hat{z}[\sim(z \in z)] \in \hat{z}[\sim(z \in z)] \equiv \hat{z}[\sim(z \in z)] \in b.$$

$$\sim[\hat{z}[\sim(z \in z)] \in \hat{z}[\sim(z \in z)]],$$

したがって

$$\sim[\hat{z}[\sim(z \in z)] \in b],$$

つまり $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ は集合を形成する一定の資格条件をみたしていないことが帰結するだけで、パラドックスは生じない。Zermelo-Fraenkel の公理系における他の公理はこの一定の資格条件を明確にするために設けられたものにほかならない。

Zermelo-Fraenkel の体系において、上にのべられた (b) の表現をとれば「任意の対象の集りとしての外延は集合であるとはかぎらない」こととな

る。このような考え方をさらにおしつめていつたのは、von Neumann-Gödel-Bernays のもうひとつの「公理論的集合論」の体系である²⁾。ここでは「外延」と「集合」との差異ははつきり記号の上にもあらわれている。そして「集合」は他の「集合」あるいは「外延」の成員となることができるのに対して、「外延」は「集合」あるいは「外延」の成員となることはできない。それゆえ、この体系では「外延」は「概念の適用できる対象の集り」として存在するが、他の「集合」あるいは「外延」の成員とはなることができず、したがって「集合」ではない。ただ、場合によつては、外延は集合によつて代置されることがありうる。そしてそれが可能な場合というのは集合の存在を保証する公理のとり方によつてきまつてくるのである。

外延が成員となりえないことがパラドックスを回避する重要な手段であることは、次の点から理解される。§2 の演繹における (6) のステップで、(5) のすべての x を $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ に適用する。しかし、 $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ が外延のときには外延 $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ の成員となることは不可能であるから、この操作は許されない。それゆえ、(7) は演繹できぬし、パラドックス (8) も演繹できない。いいかえれば、「外延」と「集合」との分離は結果として (D) なる前提を否定することとなる。

このような立場を (B) にならつて形式化すれば、次のようになる。

$$(B_N) \quad (\exists B)(x) [x \in B \equiv F(x)]$$

(ただし、ここでは B は外延を、 x は集合を示す変項で、 $F(x)$ のうちには外延を示す変項は束縛されてあらわれないとする。)

Zermelo-Fraenkel の体系—ZF—と von Neumann-Gödel-Bernays の体系—B—のあいだには、うえにのべた類似性があるとともに、はつきりした差異もあることをあきらかにしておく必要がある。前者においては、

外延はその成員が一定資格をもてば集合となりうる。そこでは、(a) という外延の定義の変更にみられたように、外延と集合との間の本質的な区別はない。それに反して後者においては、外延が何かの成員となる可能性—成員性—は外延の成員のいかなをとわず否定されている。ただ集合と代置されうる場合においてのみ外延のかわりにその集合をとることによつて、外延が成員となるのと同様な論理的操作がゆるされるにすぎない。それゆえ、パラドックスの演繹においても、ZF では $\dot{z}[\sim(z \in z)] \in \dot{z}[\sim(z \in z)]$ の右側の $\dot{z}[\sim(z \in z)]$ が集合となりえぬ点が重要なのであり、B では左側の $\dot{z}[\sim(z \in z)]$ が成員となりえぬ点が重要なのである。しかし、ZF においても右側の $\dot{z}[\sim(z \in z)]$ が集合となりえぬのは、左側のそれが一定の資格条件をみたしていないからであるという点において両者の間には類似性がある。

ここに考察したふたつの「公理論的集合論」は、いずれも「外延」の定義にあらわれる「集合」を公理論的に明確にし、それによつて集合と外延を必ずしも同一視しないという立場で「理想計算」の修正を意図した。その結果、B においては、対象の集りとしての外延はきわめて自由な、直観的に用いられる場合に近い地位を獲得することとなつた。これはきわめて注目に値する事実だといえよう。

註 1. この体系は Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematischen Annalen, Bd. 65, 1908, S. 261-281 に始まる。ここでは Fraenkel, Abstract Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1953 および Fraenkel—Bar-Hillel, op. cit., Chap. 2 の体系による。

註 2. この体系は von Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 154, 1925, S. 219-250 および Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Mathematische Zeitschrift, Bd. 27, 1928, S. 669-752 にはじまり、Gödel, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with

the Axioms of Set Theory, Princeton U. P., Princeton, 1940, Rev. ed., 1951 および Bernays, A System of Axiomatic Set Theory, I-VII, I Journal of Symbolic Logic, vol. 2, 1937, pp. 65-67; II *ibid.*, vol. 6 1941, pp. 1-17; III *ibid.*, vol. 7, 1942, pp. 65-89; IV *ibid.*, pp. 133-145; V *ibid.*, vol. 8, 1943, pp. 89-106; VI *ibid.*, vol. 13, 1948, pp. 65-79; VII *ibid.*, vol. 19, 1954, pp. 81-96 において展開された体系をいう。ここでは主として Gödel と Bernays の論文による。

§ 5.

ZF の体系において公理的に規定されていた「集合」の資格条件を「タイプ理論」の立場から明確にしようとした折衷的な試みは Quine の構成したもう一つの理論, Mathematical Logic— ML —の体系である。¹⁾ この体系においては、「概念の適用される対象の集合」としての外延は、それを表明する条件 $F(x)$ が §3 の stratification の条件を満足させぬかぎり、あらたに集合を形成することはできない。すなわち、 $\hat{z}[F(z)]$ は $F(z)$ が stratification を満足させるならば、²⁾ 集合を構成しうるところの成員となる。記号的にいえば、(B) は

$$(BML) (\exists y)(x)[x \in y \equiv x \in V \cdot F(x)]$$

(ただし、 y は $F(x)$ にあらわれない)

と修正される。この $x \in V$ という因子は x が集合を構成する成員としての資格を示す。それゆえ、 $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ のように $\sim(z \in z)$ が stratification を満足させないような外延は集合を構成する成員としての資格を保証されていないから、 $\hat{z}[\sim(z \in z)] \in V$ は保証されていない。事実、パラドックスの演繹を試みると、ZF におけるように帰結するのは

$$\sim[\hat{z}[\sim(z \in z)] \in V]$$

であつて、 $\hat{z}[\sim(z \in z)]$ は集合を構成しうる成員でないこととなる。この

ように外延は必ずしも集合の成員たる資格条件—成員性—をもたぬという点では、B の体系に近い、しかし、Mathematical Logic においては、外延は「成員性をもつ対象の集合」なのであつて、この外延が成員であるかどうかは保証されないにしても、外延が単なる「対象の集り」として集合からはつきり区別されている訳ではない。したがつて、外延が成員性をもつ対象のみから集合として構成されるという点では、基本的な性格はむしろ ZF の体系に近いことが結論されるが、ZF におけるように、外延を対象の単なる集りと解釈しうる余地はなく、またその点では B の体系とはあきらかな差がある。それゆゑ、§4 でのべた ZF の体系における外延の定義を修正する二つの可能性：(a)「一定資格をもつ対象の集合」としての外延と (b)「任意の対象の集り」としての外延のうち、ML は「タイプ理論」の方向において (a) を、B は「公理的な集合論」の方向において (b) をとつたということが出来る。

このように考察してみると、Quine の試みてきた「公理的な集合論」と「タイプ理論」との間の折衷的な体系の方向にはもうひとつの可能性のあることがあきらかにされる。すなわち、「対象の集り」としての外延を集合とまずはずきり区別する。そのうえで、外延が集合と代置されうる場合の判定基準を「公理的」的にではなく、「タイプ理論的」に与える方法である。しかしこの可能性については時をあらためて論ずることとしたい。

註 1. Quine, *Mathematical Logic*, Rev. ed., Cambridge (Mass.), 1951.

註 2. 正確には、 $F(z)$ の未縛および自由変項もまたすべて成員でなければならない。これはこの体系における外延の性質から明らかであろう。

註 3. *Mathematical Logic* においては、

$$*235 \quad x \in \hat{z} [F(z)] \equiv x \in V \cdot F(x)$$

が証明される。

§ 6.

いままで私はもつぱら概念の「外延」の問題に議論を限定してきた。そして「理想計算」の修正の方向としては外延の定義における集合の明確化がひとつの重要な論点であることを論じてきた。しかし、すでに Principia にみられたように概念の外延ではなく、「概念」そのものに対して一定の規制を与えるということも問題の解決の一つの手段であることも事実である。そして Principia 以外の体系においても、「概念」そのものの形成、あるいは「概念」の表現手段に対する一定の枠というものが存在する。そこでこの章においては視点を「概念」の方向にうつそう。

われわれは「概念」形成の生理的・心理的なプロセスを直接に把握することはできぬし、したがってそれを直接に規制することもまず不可能である。そこでわれわれは言語表現を通じて概念の問題の分析に従事せざるをえなくなる。ところが日常の言語においては、一定の表現から他の表現を形成する操作は、語にしる文にしる、決して明確な規則にのつとつて行われるものではない。そこには心理的・社会的・感情的・実際的といった種々のモメントが働く。§2 の考察にみられるように、われわれが多少なりとも人工的な言語にたよらなければならなかつたのも、問題の所在点をあきらかにし、その解決法を考えるのに足りる程度に規則化された言語を手がかりにしないと言語を適当に修正する方向も見出しえなかつたからである。そしてわれわれの用いてきた人工言語—以下これを FL とよぶ—については次の二つの重要な条件がある。

1. 言語 FL と FL についてのべる言語とははつきり区別されねばならない。いわゆる対象言語とメタ言語との区別。
2. 言語 FL においては、その表現を形成する明確な規則が与えられていること、すなわち、「形成規則」の明確化。

もし1が守らなければ、いわゆる「うそつきのパラドックス」がその言語においてあらわれる可能性がでてくる。また2が守られなければパラドックスの生じないような言語をつくりあげることがきわめて困難となる。

歴史的にいえば、Principia の言語は1の条件を2に要求されている形成規則のうちにとりこんだために、その形成規則はきわめて制限のつよいものとなつた (Ramified theory of types)。その後 Ramsey の指摘によつて1の条件は形成規則と切り離されるようになったが、それでも、のちに Quine が stratification として定式化したところの、「循環性」を禁止するような形成規則は、Principia に発する体系の一つの特徴である (Simple theory of types)¹⁾。この見地からすると「タイプ理論」とは、形成規則に対して stratification に代表される一定の制限を課するか、あるいは外延をもつ概念の判定基準をこの見地から試みるものにほかならない²⁾。

Zermelo は2の条件をはじめ sinnvolle Eigenschaft という言葉で表現した。つまり §4 の (B_Z) における $F(x)$ は $x \in b$ なる x に対して「意味のある」条件を示すことを要求したのである。この「意味のある」というのは、「 x に対して $F(x)$ が真であるか、偽であるかがきまる」ことだと Zermelo は説明した。この範囲では $F(x)$ はどのような形をしていようと自由である。のちに Fraenkel と Skolem はそれぞれ、この「意味のある」という語の明確化にさらに努力したが、最終的には、この体系における形成規則は「変項 x, y, z, \dots から量化子および ε をもちいてつくられる表現」をゆるす。その意味では「タイプ理論」のような制限はない³⁾。

von Neumann-Gödel-Bernays の体系においては、von Neumann の当初の Funktion についてはここではふれないが、Gödel-Bernays の改訂後の形成規則によれば、「集合を示す変項 x, y, z, \dots と外延を示す変項 X, Y, Z, \dots と、 x, y, z, \dots に対する量化子と ε とをもちいてつくられる表現」が (B_N) の $F(x)$ にゆるされる。すでに §4 でみたように、この体系

においては外延 (X, Y, Z, \dots) は集合あるいは外延の成員となることはできないから、 $X \varepsilon x$ または $X \varepsilon Y$ といった表現はゆるされない。それゆえ、ここでは Zermelo の体系に比して形成規則はよりつよい条件を課している⁴⁾ ということができる。

このように「理想計算」を修正するために考案されてきた言語は日常言語に比してかなり制限のつよいものであるが、この制限は一見したほどつよくなく、この言語を用いて函数その他数学に必要な概念を表現しうることは周知の事実である。ところで、この言語によつて表現されている「集合」とか「函数」といった抽象的な数学的な対象とこの言語との関係がどのように考えらるべきであるかは、唯名論と実念論の現代的論争点としてしばしばとりあげられてきている。以下この点について若干の考察を試みたいと思う。

註 1. これについては前掲の二つの拙稿を参照されたい。

註 2. Hao-Wang による新しい「タイプ理論」もこの系列に属する。

Hao-Wang, The Formalization of Mathematics, Journal of Symbolic Logic, vol. 19, 1954, pp. 241-266.

註 3. Fraenkel—Bar-Hillel, op. cit., pp. 38-41. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Springer, Berlin, 1928, S. 285-288.

註 4. Bernays, op. cit., I.

Gödel, op. cit.

§ 7.

われわれが普通、言語に対していただいている素朴な考え方は、「言語は言語外の対象を描写する、とか表現する」といった考え方であろう。たとえばいま私の目の前に黒い灰皿があるが、「この灰皿は黒い」という場合に、われわれはこの言語表現によつて言語とは独立な事態をいゝあらわす

のだと考える。そしてこの考え方は、「この灰皿は黒い」という言表の真偽を判定する場合に、言語の文法的規則とか、表現法の問題とかに還元できないものを基準にとつて判断するというに明白にあらわれている。われわれはこのような時には、まず灰皿を見るであろう。そしてその言表が真であるとか偽であるとかいう。

ところが、いまわれわれの考察している場合のように、対象が灰皿のように見ることできぬ抽象的なものであるときには問題がおきる。われわれはたとえば集合を見ることはできないから、それが論じられている言語をはなれて集合という対象と直接に交渉をもつということは自明とはいえない。そこで、集合に対して感覺的事物と同様な独立的な存在性を認める立場をとれば、いわゆる「実念論」(realism)となるであろうし、集合というような対象は単に名目的なものにすぎないと考える立場をとれば、いわゆる「唯名論」(nominalism)となるであろう。¹⁾

いま実念論の立場にたつて考えてみると、「集合」を中心とする数学的な対象はわれわれがそれを表現する手段とは独立なのであるから、パラドックスはむしろ表現手段に関連しておきると考えられる。数学的对象そのものは本来矛盾のない一つの秩序を構成しているが、それを表現する手段の不完全さからパラドックスが生ずる。そこでパラドックスのない言語を構成するということは、このような客観的な世界をよりよく表現する手段をつくりあげることであり、すでに論じてきたいくつかの試みは同じ世界を異なつた仕方で表現する表現手段にほかならない。それは同じ風景を異なつたカラー・フィルムで撮影するのと同じようなもので、フィルムの性質によつて、青みや赤みをおびたりするようなものだということになる。それゆゑ、もし理想的な表現方法ができれば、現在のようにさまざまな表現方法によつて写しだされる像も異なるようなことはなくなつて、ただひとつの世界をただ一通りに表現するような手段が与えられることにな

ろう。この主張は実念論の自然な帰結であり、この点ではそれはよりよい言語の構成への積極的な努力を推進する力をもっているといえることができる。

ところが、このような実念論的な立場は次の点を考えると困難にぶつかる。すでに論じてきたように、現在われわれの有する集合論という人工言語においては、それぞれに応じて集合の容認の仕方が異なる。「普遍集合」(universal set, universal class) を例にとってみても、Principia には各タイプの「普遍集合」はあつても、それら全部を包括する「普遍集合」はないし、ZF にも「普遍集合」はない。Quine の NF と ML には「普遍集合」はあるが、B には「普遍クラス」(「普遍的な外延」) はあつても「普遍集合」はない。もしも「普遍集合」が言語と独立に存在しているとすれば、それを入れてくることによつて、たとえば ZF においてはただちにパラドックスがおきる。このようにみえてくると、集合の存在は言語と独立なのではなくて、言語と相関的にきまつてくるのだと考える方が実情に即していると考えられる。さらに抽象的な対象を思考する場合に、われわれはそれを表現する手段にたよらずにはほとんど不可能だと考えると、これらの対象が表現手段とは独立に存在するということはきわめて神秘的で、個人の信念としてはともかく、十分な説得力をもつものではないと反論することもできよう。そこでこのような立場にたつかぎり、集合論というのはひとつの客観的な世界の異なつた表現方法というよりも、言語に相関的な異なつた対象の構成ということになつて、「唯名論」もしくは「概念主義」(conceptualism) に近づくこととなる。そこでは表現手段はより重要となつて、上の例と対比的にいえば、集合論はカラー・フィルムよりは「絵画」的な手段になぞらえることができる。対象との類似性よりは、手段そのものの構成する世界がここではより重要な意味をもつのである。

しかし、この二つの立場を検討するとき、いままで論じられなかつた二つの問題が考慮に入れられねばならない。二つの問題とは「非述語的定義」(impredicative definition) と「Skolem のパラドックス」である。次にこの二つの点について考察しよう。

註 1. このいゝ方はきわめて粗雑であるが当面の議論にはさしつかえないと思う。のちに (§9) もう少し正確な性格づけがなされる。

§ 8.

「非述語的定義」のもつとも典型的な例のひとつは実数集合における下限または上限の存在定理 (Weierstrauss の定理) の証明にあらわれる。「実数の集合 S が下方に有界ならば、 S の下限が存在する」という形でこの定理の証明を要約しよう。 S の下界でありうるすべての実数の集合を A 、その他のすべての実数の集合を B とする。そのとき一つの切断が生ずる。この切断によつて確定される数を s とすれば、 s は A の成員でその最大数であるか、または B の成員でその最小数であるかのいずれかひとつである。いま s が S の成員だとすれば、 s は S の下界でありえぬから、 S のすべての数よりも s が小さいことはない、すなわち S の少くとも一つの数 x よりも s は大である。このとき $x < b < s$ なる数 b をとると、 b は S に属する x よりも大であるから S の下界ではなく、したがつて A の成員ではないから B の成員である。ところが、 s は B の最小数であるから、 $b < s$ なる B の成員 b が存在することは矛盾となる。よつて s は B の成員ではない。したがつて s は A の最大数、すなわち S の下限である。

この証明にみられる特徴は、その存在を証明しようとする S の下限 s

集 合 と 外 延

が集合 A, B による切断によつて定義されている点である。ところが、 s は結局この A の成員であることが示される。すなわち s は s を成員としてもつ集合 A によつて定義されている。それゆゑ、もし A を実際に構成しようとするれば、まずその成員である s が決定されていなければならず、しかもこの s は A によつて定義されているという循環がある。

このように、ある対象をその対象が属している集合（全体）をもちいて定義するような定義方法を非述語的定義とよぶ。非述語的定義は実数論を展開するうゑに基本的な重要性をもつが、唯名論的な立場にたつとこれを認容することが困難となる。唯名論的な立場にたつと、全体とか、集合とかはそれ自体として存在するのではなくて、個々の成員についてのべるかわりに一種の「述べ方」(une façon de parler) としてそれらの全体が登場してくるのであり、われわれはせいぜい存在する「かの如くに」語っているのにすぎない。したがつて成員に先だつ全体を予想し、それを用いて成員を定義することは無意味である。「概念主義」の立場によつて、知的構成物としての概念を認めるとしても、非述語的定義にあらわれる全体はその成員の決定をまつてはじめてきまつてくるようなものであるから、全体を構成する手段は与えられておらず、その意味では全体は存在資格を失うこととなる。

一方実念論的な立場をとれば非述語的定義は正当化される。この立場においては、全体は成員の存在とは別個に独立して存在しているのであるから、このような全体に関連してその成員をきめることは循環であることに変わりはないが、不当ではない。非述語的定義の可能性は全体の存在の可能性によつて保証される。われわれはただ明確にされていなかった成員の性格をこの手続によつてあらためて明確にしたにすぎない。それゆゑ、非述語的定義の必要は実念論に有利な事態を提供するものといえよう。

上にのべた体系のうちで ZF においては、この非述語的定義はある種の

集合を導きだすうえで常套的な手段でさえある。(Bz)の b にある集合 t の巾集合 $U(t)$ (あるいは巾集合の巾集合 $U(U(t))$)をとり

$$(x) [x \in a \equiv x \in U(t). F(x)]$$

から出発して、 $x \in U(t)$ が $F(x)$ から導きだされることを示すことによつて、

$$(x) [x \in a \equiv F(x)]$$

という形で、のぞむところの $F(x)$ なる条件をみたす a をうることが多い。ところが、この方法によれば t の部分集合の集合 a は、 t のすべての部分集合の集合(t の巾集合) $U(t)$ を用いて定義されることとなる。したがつて a は非述語的に定義される。それゆゑ、非述語的定義の問題はZFにおいてとくに基本的重要性をもつ。

この非述語的定義の問題のつぎに、「Skolemのパラドックス」の問題にうつろう。上に考察したいくつかの体系においては、いわゆるCantorの定理:「いかなる集合 t に対してもそれより大なる濃度をもつ集合が存在する、とくにそのすべての部分集合の集合 $U(t)$ は t よりも大なる濃度をもつ」が証明される⁵⁾。ところがLöwenheim-Skolemの定理によつて、「第一次の述語計算の可附番無限個の論理式の集りは、もしそれが無限の領域で充足可能ならば、可附番無限の(自然数の)領域で充足可能である」、いいかえれば、「もしそれが無限のモデルをもつならば、自然数の領域でモデルをもつ」。ZF, B, NF, MLなどの体系はいずれも第一次の述語計算において形式化でき、しかも集合論という無限のモデルをもつから、したがつて(もしそれらが無矛盾ならば)自然数の領域でモデルをもつこととなる。しかるにCantorの定理によつて、いま t に自然数全体の集合をとれば、それより大なる濃度の集合が存在する。すなわち、自然数より大なる濃度をもつ集合の存在を保証する体系が自然数の領域でモデルをもつこととなる。これが「Skolemのパラドックス」にほかならない。このような

パラドキシカルな事態の意味するものは次のようになる。われわれは一定の体系のなかでは自然数全体の集合とそのすべての部分集合の集合との間に1対1の対応をつけることはできない。しかし体系のそとでは、体系全体の構造を利用することができるから、それによつてこの二つの集合の間に1対1の対応をつけることができる。

そこで実念論的な立場にたつて、集合がそれに対する表現と独立に存在する対象と考えると、自然数の巾集合の濃度もまたひとつの独立な対象であり、したがつてそれを自然数の濃度にひきさげるような公理的な体系は不完全であるということとなる。しかし、直観的な素朴集合論はそこにもちいられる表現方法が充分整理され形式化されていないために、このような事態をまぬがれているのであると考えられるし、また不完全な公理的体系にかわる完全なものというものがいかにしてえられるか手がかりもない現状なのである。他方、いまある公理的体系を認めるならば、濃度は(その他の数学的概念も)体系のなかの表現力によつて異なり、絶対的にきまるものではなく、相対的なものにとどまることを認めざるをえなくなるであろう。この点では、公理的体系の現状を容認すれば「Skolemのパラドックス」は実念論に困難な事態を示すものといえる。

- 註 1. 集合 S の成員であるすべての数が一つの数 m よりも小でないときに S は下方に有界であるといふ、 m を S のひとつの下界であるといふ。
- 註 2. 集合 S の下限(最大下界) a とは次の条件をみたす数をいう。(1) S の成員である任意の数 x について $a \leq x$, (2) $a < a'$ とすれば $x < a'$ なるある数 x が S の成員である。
- 註 3. すべての数を A, B の2組にわけて、 A に属するどの数をとつても B に属するすべての数よりも小ならしめることができたときに、このような組分け(A, B)を切断といふ、 A を上組、 B を下組という。
- 註 4. 「実数の切断は上組と下組の境界として一つの数を確定する」(Dedekindの定理)から。そしてこの場合、確定される数は A に属して最大数となるか、 B に属して最小数となる。

註 5. 正確にいえば Cantor の定理は若干の修正をしなければ NF において証明できない。Quine, On Cantor's Theorem, Journal of Symbolic Logic, vol. 2, 1937, pp. 120-124.

§ 9.

これまでの議論は次のような基本的な事実を前提してなされている。

- (α) 実数論をふくむ古典的な数学の基礎を与えるにたりるような形式的（公理的）集合論の体系においては，それが集合であるにせよ，集合から区別されている抽象的な対象であるにせよ，「外延」を認めている。
- (β) 外延はこのような体系において，変項——一般にはとくに束縛変項の値となることが前提されている。

いままで考察されてきた体系において，この (α) は (B) という前提をなんらかの形で修正した公理が認められていることのうちにあきらかであるし，また (β) は (B_P), (B), (B_Z), (B_{MF}) における (∃*y*), (B_N) における (∃B) という表現からあきらかである。ところで，このような事実につと，実念論と唯名論との基本的な相異点は次のように要約される。

- (γ) 実念論は，固有名詞がある個体を指示する (denote) のと同様に，外延に対する要現も抽象的な客観的对象としての外延を指示すると考える。したがって，この立場からは，個体を示す変項（個体変項）と外延を示す変項との間には，客観的な対象を指示する変項としての本質的な区別はない。
- (δ) 唯名論は，固有名詞と個体との関係と類似の関係を外延についてはみとめない。すなわち，この立場からは，われわれは個体については何ごとかをのべることはできるが，それと同じように外延についてのべるこ

とはできない。のべるようにみえるのは、のべる方法がそのようにみせかけるのであり、したがって外延を示す変項が個体変項とまったく平行にとり扱われる、とくに束縛変項としても扱われるのは、外延が個体と同様に客観的に確定した対象として扱われることであつて、そのような操作はみとめることができない。

この二つの立場と (α) , (β) , にのべられている事実とを比較してみるとき実念論はこれらの事実を正当化しようとい意図しているのに対して、唯名論は事実とむしろ対立しているところにそれぞれの性格がある。実際、前にのべたいくつかの体系を構成した人々のうちで、Fraenkel, Gödel, Bernays はその実念論的立場—彼らのいうプラトニズム—を公然と表明している¹⁾、Zermelo や von Neumann も彼らと似た見解をもつものと考えても誤りではないであろう。Russell も彼の見解は時代によつてかなり変動するが、Principia の時期においてははつきりと唯名論的立場を表明したわけではなかつた。ただ Quine のみはその点では特異だといえるであろう²⁾。彼はその NF においても ML においても、 (α) , (β) という性格をもつた体系を構成したにもかかわらず、ある時期にはかなりはつきりとその唯名論的見解をのべている³⁾。しかし彼もまた近年かなりその立場を和⁴⁾げている。

実念論的立場には §6 の普遍集合の存在や、§7 の Skolem のパラドックスの問題その他をめぐつて若干の難点がある。しかし、すでに構成されているいくつかの体系の共通的な特徴 (α) , (β) と非述語的定義の問題は、唯名論的な立場の徹底をさまたげる重要な要素である。また唯名論の立場をやわらげて「概念主義」(Conceptualism) —あるいは構成主義—の立場をとつて、個体のみでなくある一定の抽象的对象—たとえば自然数—の存在をみとめ、あとのものは知性の構成したものにすぎぬところの対象であ

るという見解を主張したとしても、体系の相対性の問題には有利ではあつても、とくに非述語的定義の問題はやはり難点としてのこることは §7 からあきらかであろう。

唯名論がすでに構成されている体系の基礎づけを行うことは不可能であるために、現今主張されている唯名論的な立場は、むしろこれらの体系が決して唯名論的解釈をも不可能とするものでないことにむけられている。前述の Quine の主張も、その延長線上にある Henkin の主張も構造論 (syntax) の言語をメタ理論において唯名論的に解釈する可能性を示す点にある。とくに、無限の自然数の存在を認めればこの解釈の範囲は集合論全般におよぶであろう。しかし、この主張は Skolem のパラドックスにおけるように Löwenheim-Skolem の定理に関係し、与えられた体系のそとからなされた体系全体の解釈の問題であつて、ある体系において使用されている変項その他の体系のうちにおける解釈の問題ではない⁵⁾。その意味ではこのような唯名論は前述の実念論とおなじ次元で論じらるべきものではない。しかし、このような解釈が実念論の難点である Skolem のパラドックスと密接に関係し、それを利用している点は興味ふかい。

現在までに提出されている公理論は集合論のうちで (δ) にのべられている唯名論からの反対や、非述語的定義に関する概念主義—構成主義からの反論にもつともよく配慮して構成されているのは、Bernays の Axiomatic Set Theory (1958)⁶⁾ の体系である。そこでは §4 の B の体系のように外延と集合がきつぱり分けられており、さらに教学的対象としての集合と、その理論を展開するための概念的な枠組としての外延の役割が明確にされている。しかも唯名論の主張に対して外延を束縛変項として用いないし、概念主義の主張に対して外延はまったく述語的に定義されるという配慮をしている。おそらくこの体系が現在ある集合論のうちで哲学的配慮のもつともゆきとどいたものといふことができるであろう。

しかし、この体系に対しても極端な唯名論はその集合の存在をめぐって抗議することは可能である。由来、Zermelo の試み以後、集合論の構成にはどれだけの「要素」—Zermelo のいう Urelement—が必要であるかという問題はしばしば論じられてきた。こゝでいう「要素」とは集合でない（成員をもたない）何らかの対象という意味である。通常、集合論には (1) 空集合とその他の要素、(2) 空集合以外の要素、(3) 空集合のみ、をそれぞれ要素としてもつという三つの可能性が考えられる（空集合も、その他の要素ももたぬ体系は不可能である）。ところで、ZF, B および上述の Bernays の体系はいずれもこの (3) の立場をとる。空集合はいゝかえれば成員をもたぬ集合であり、成員をもたぬという点では「要素」の資格をもっているが、集合である点には変りないから、これらの体系で対象となるのは集合のみである。それに反して Principia, NF, ML においては空集合以外の個体が要素として前提されている。Quine が唯名論的解釈を主張するのほひとつは彼の体系が個体からも出発しうるからであるといつてよいであろう。

さて、Bernays の体系が唯名論的な反論を考慮しているといつても、それが集合から出発する点についてはやはり唯名論者は反対するであろう。この点を実念論的立場にたつ Bernays にとつてはさして問題とならぬであろうが、「要素」についてはもうひとつの重要な問題がある。それは「選択公理」(Axiom of Choice) の独立性 (Independence) の証明は現在のところ無限の要素、もしくはそれに代るものなしにはなされえないという点であつて、これは唯名論との関係とは別に Bernays (その他) の体系に内在する問題といわなければならない。

私はこの論文において意見というよりはむしろ事実をのべた。集合の存在をめぐる議論において概括的にいいうるのは、種々の体系を構成した人々が哲学上の議論においてはしばしば変化し、また自分の立場と相反する

ような数学的方法の分野ですぐれた業績を示しているということである。プラトニストといわれる Gödel や Church が構成主義的見地から主張されるような回帰函教 (recursive function) の理論においてなした業績や、構成主義的にみえる Skolem が Zermelo の体系になした貢献、さらにプラトニズム的といわれる Hilbert のメタ数学における構成主義的な見解など多くの例があげられる。いずれにしろ、数学的存在は無矛盾性を必要条件とするが、充分条件とするかどうかについては、形式主義と直観主義の対立のように異論がある。たとえ、無矛盾性が充分条件であるとしても、数学的对象が無矛盾であるかいなかを決定する一般的で絶対的な意味での方法はないのであるから、数学的对象の構成方法を与えるということはやはり重要な意味をもつてくる。それゆえ、現在ある体系の不完全なうらづけとして、実念論的主張はその正当さをもつが、だからといって構成主義的な、あるいは唯名論的な主張をいきなりすてさることは、このような見解を動因とする数学的な努力をすてさることになろう。現在まで実念論的な立場は対象の世界によりよく適応する言語をつくりあげるという点で積極的な役割を果たした。「公理論的集合論」はそのような立場のもたらした現実の成果である。しかし、すでにのべたような実念論的な見解は完全にわれわれを納得させるものだとはいいきれないことは、すでに指摘した難点からもあきらかである。さりとて唯名論や構成主義はそれ以上の困難をもつということが出来る。しかしこの立場からする努力があらたな知識の獲得に役だたぬとは誰も断言しえぬであろう。それゆえ、一方では現在でもまだあいまいさを伴っている実念論的な諸前提をより一層明確にし、それから生ずる疑点を整理するという努力とともに、より完全な体系の構成がなされねばならぬし、他方では唯名論的あるいは構成主義的な見解から生ずるさまざまな努力に対しても、それが知識に対する積極的な刺激になるかぎり充分評価されねばならぬであろう。現在ある体系の

基礎づけとしては実念論的見解の方がより妥当であると私は考えるが、それはあくまでも現在に関していて、最終的に哲学的な結論をひきだすにはまだ疑点があり、その意味で Curry のいう「寛容へのうったえ」(Plea for tolerance) はきわめて現実的な意味をもつといわねばならない。

註 1. Fraenkel, La notion d'existence, L'enseignement mathématique, tome 34, 1935, p. 18-32.

Bernays, Sur le platonisme dans les mathématiques, *ibid.*, p. 52-68.

Gödel, Russell's Mathematical Logic, The Philosophy of Bertrand Russell, ed. by Schilpp, Tudor, New York, 1944, pp. 123-153, および What is Cantor's Continuum Problem?, The American Mathematical Monthly, vol. 54, 1947, pp. 515-525.

註 2. 彼とならんで Skolem は構成主義的な見解を一貫して主張している。

Skolem, Une relativisation des notions mathématiques fondamentales, texte dactylographié de la communication présentée au 70^e colloque international du CNRS (à Paris), 1955.

註 3. Quine, On Universals, Journal of Symbolic Logic, vol. 12, 1947, pp. 74-84, および Logic and Reification of Universals, From a Logical Point of View, pp. 102-129.

Quine-Goodman, Steps towards a Constructive Nominalism, Journal of Symbolic, vol. 12, 1947, pp. 105-122.

註 4. Quine, Word and Object, Technology Press, Massachusetts, 1960, Chap. VII とくに *Waither Classes* (pp. 266-270) および 243 頁の註を参照。

註 5. Henkin, Some Notes on Nominalism, Journal of Symbolic, vol. 18, 1953, pp. 19-29.

Beth, L'existence en mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1956, Chap. VI.

註 6. Fraenkel-Bernays, Axiomatic Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1958.