Title	Principia Mathematicaにおける命題函数II
Sub Title	La fonction propositionelle de Principia Mathematica II
Author	大出, 晁(Oide, Akira)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1958
Jtitle	哲學 No.35 (1958. 11) ,p.95- 119
JaLC DOI	
Abstract	En suite de deux articles concernant la fonction propositionelle de la premiere edition de Principia Mathematica (PM_1) les caracteres principaux de la FP de la deuxieme edition de Principia (PM_2) sont analyses dans cet article. PM_2 definit la FP de la maniere differente que PM_1 en utilisant 1) le symbole de Sheffer p|q (il n'est pas vrai que p et q sont vrais) et 2) le principe de l'extensionalite de FP qui dit que la FP n'apparait que par ses valeurs dans une fonction composee. Le symbole de Sheffer contribue a simplifier la notion de FP, car il se sert a supprimer l'aspect intensionel de FP qui n'est pas necessaire pour deduire des notions mathematiques. D'autre part, le principe de l'extensionalite de FP a la consequence de remplacer en partie l'axiome de reductibilite; plus en details, a) s'il s'agit de la FP du premier ordre, le principe peut prendre la place de l'axiome en admettant (φ). f!(φ!z, x). ⊃. f!(φ_1z, x) pour une proposition primitive, et b) s'il s'agit des FP de plus hauts ordres, le principe nous offert les raisonnements necessaires aux cas ou la proposition affirmee exprime une verite logique. Le principe d'ailleurs supprime la difference d'entre l'attribut et la classe, mais cet avantage introduit, sans l'axiome de reductibilite, les ordres differencies dans le domaine de classes. Mais les difficultes apparaissent, si l'on considere les cas ou l'on doit substituer des fonctions ou des classes du m^ieme ordre (2≦m) a la matrice ou la classe elementaire apparue dans une fonction qui n'exprime pas la verite logique, et elles nous semblent serieuses, si nous traitons l'induction mathematique et les raisonnements necessaires aux theories du nombre reel. En conclusion, malgre l'effort de reconstituer les demonstrations PM_2 n'est pas capable de surmonter suffisamment les difficultes.
Notes	I 哲学,慶応義塾創立百年記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000035-0100

Principia Mathematica における命題函数 II

大出　晁

私はすでに二つの論文において Principia Mathematica 初版の命題函数の概念を分析した。[1] ここでは前論文にひきつづいて Principia 第二版における命題函数の性格を明らかにするとともに、その難点を論ずることとする。

Principia 第二版における命題函数の定義の変更はヴィットゲンシュタインとラムゼーの批判によるところが多い。そしてこの両者の批判は数学的対象に対するより実在論的な哲学的態度から出ている。だがここではまず、このような批判が Principia の体系内でどのように形式化されているかを論じ、哲学的問題に関する議論は最後の節にゆずることとする。

註1　La fonction propositionelle de Principia Mathematica, Annals of the Japan Association for Philosophy of Science (published by Sobunsha), Vol. 1, pp. 171-186. Principia Mathematica における命題函数 I (近刊「科学哲学への道」所載)。以下この二論文をそれぞれA、Bによって示す。

1　命題構造論の整備

既に他の論文において指摘したように、[1] PM,[2] の命題函数の概念は形式的に全く整備されていない莫然とした命題の概念の上に基礎づけられている。フレーゲのなした「命題」(Gedanke) とそれを表現する「文章」(Satz) との区別も、「文章」の「意味」(Sinn) としての「命題」も、その「指示」(Bedeutung) としての真理値も PM, では全く問題にされていない。PM, の命題とは我々の判断或いは信念の内容となる何かといったものであって、それはまた「これは赤い」といった知覚的な判断内容即ち要素命題の上に結局は根拠づけられるはずの莫然とした何かである。このように不明確な命題の概念は論理学の領域で致命的な欠陥を示す。一つには命題を根拠づけるためには、例えば「これ」が何を示すかという、命題を構成するある部分の指示の問題が解決されねばならぬこととなり、無用な認識論上の議論をくりかえす必要がある。第二には、複合命題を論ずるときに、その構成部分である命題の真理値からだけではその真理値の決定されぬようないわゆる内包的命題、例えば「私は暁の明星と宵の明星が同じでないと信ずる」といった命題も、当然一つの命題として我々の論議の対象とされることとなる。しかし PM, 自体においてもその序論をのぞいてこのような命題は必要とされないのである。[3]

PM, の命題は「命題」と「文章」との差異については全く考察せず、従って第一の点では PM, と異なる所はないが、第二の点では明らかに命題の外延化の方向に進んでいる。この点ではヴィットゲンシュタインの見解に影響されたものと思われるが、他方技術的にはシェッファーの考案した、いわゆる「シェッファーの従棒記号」

'$p|q$'（pはqと両立しない）が外延的命題の形式的整備に大きな役割を果している。通常の論理的結合子'$\sim$'、'$.$'、'$\vee$'、'$\supset$'等がすべてこの'$|$'によって表現可能なることはよく知られている。それ故、我々が幾つかの命題から構成されているある複合命題を考えるとき、その複合命題の真理値が構成肢である命題の真理値からのみ決定される命題、即ち外延的命題であるかぎり、我々は構成の方法としてはただ'$|$'のみを考えれば充分となる。これは命題の構造に関する議論を極度に単純化することは明らかである。

'$|$'を用いた PM_2 の命題概念は次のようになる。

(a) いかなる命題も部分として含まず、また「すべて」とか「或る」とかというういかなる概念も含まぬ命題を原子命題とよぶ。例えば「これは赤い」「これはあれよりも早い」という命題は原子命題である。

(b) 二つの原子命題の間に'$|$'を挿入することによって得られる命題を分子命題という。

(c) 'p'、'q'がそれぞれ原子命題か分子命題であるとき、'$p|q$'は分子命題である。

(d) 原子命題と分子命題をあわせて要素命題とよぶ。[4]

このようにして得られる命題[5]は、いわゆる真理函数的な命題或いは外延的命題のすべてをつくしていることは言うまでもない。このような要素命題の概念に、更にニコーの公理と推論規則を用いれば、命題計算の体系は形式的に極度に簡素化される。その意味で PM_2 の方法は PM_1 に比べはるかに洗練されている。このような命題の規定が命題函数の定義に及ぼす結果については次に述べよう。

註1　前註参照。

註2　論文中において PM_1 は、Russell & Whitehead, Principia Mathematica 初版を、PM_2 は同書第二版を示すも

のとする。

註3　この点についても拙稿二編を参照されたい。

註4　Principia Mathematica, Vol. 1, pp. xv-xvii.

註5　PM_1 の要素命題は PM_2 の原子命題に当る。この差異には充分注意する必要がある。

2　命題函数の定義の変更

原子命題は一般に次のような形をもつ。

$R_1(x)$　xは述語R_1をもつ

$R_2(x, y)$　xは（内包的）関係R_2をyに対してもつ。

$R_3(x, y, z)$　x、y、zは三項の（内包的）関係R_3をもつ。

ここでPM_2は暗黙のうちに、主語―述語或いはそれに類似の文法的区分を前提として原子命題を性格づけていることは明らかである。そしてこのような原子命題の構造は、次のような個物（individuals）と普遍者（universals）の定義を結果する。

(a)　個物とはどのような形の原子命題の中にも現われうるものである。或いは、

(a′)　個物とは原子命題の主語となりうる何かである。

これに対して

(b)　普遍者とは原子命題中のRの形で現われるところのものである。[1]

さて、「命題函数 φx はその変項 x をある定項 a によっておきかえるとき命題となる何かである」という PM_1 の基本的な定義と、函数の曖昧値と属性との区別は、PM_2 においても変っていない。更に「悪循環原理」を前提とする命題函数の秩序関係の規定も基本的には維持されている。[2]　ただ命題のシンタックスの整備による「要素命題」の新しい定義に基づいて命題函数の秩序関係は次のように変更される。まず、

(c)　マトリックス　要素命題をその値としてもち、全称及び特称量化子の付加による一般化のために用いられる命題函数をマトリックスとよぶ。[3]

従って、$\varphi x, \varphi y, \varphi z, \cdots$; $\psi x, \psi y, \psi z \cdots\cdots$ 等をその値が原子命題となるような命題函数とすれば、$\varphi x \mid (\psi y \mid \varphi z)$, $(\varphi x \mid \varphi y) \mid (\psi y \mid \psi z) \cdots$ 等は分子命題を値とする命題函数であり、またもし $\varphi x, \varphi y, \cdots$; $\psi x, \psi y, \cdots$; $\chi x, \chi y, \cdots$ 等が原子或いは分子命題、即ち要素命題を値とする命題函数とすれば、$\varphi x \mid \chi z$, $(\psi y \mid \psi z) \mid \varphi x$, $(\varphi y \mid \chi z) \mid ((\psi x \mid \psi y) \mid (\varphi x \mid \psi z))$ 等は要素命題を値とする命題函数であるから、いずれの場合にもマトリックスである。それ故、このマトリックスの前に量化子をつけてやれば、与えられた真理函数の全体が量化子の領域に入るようなケースはすべてこのマトリックスの一般化によって得られる。

しかし、もし量化子の支配する領域が真理函数の全部に及ばないときは事情が異なる。そしてこのような場合を考察するに際して、PM_2 は PM_1 と異なる重要な原理と方法を導入している。一つは、変項としての函数の導入であり、他の一つは、「命題函数の外延性原理」である。

今一つのマトリックス（の曖昧値）$\chi_1\hat{x}$, 即ち $\varphi_1\hat{x} \supset . \psi_1\hat{x}$ に相当する $\varphi_1\hat{x} \mid (\psi_1\hat{x} \mid \psi_1\hat{x})$（但し、$\varphi_1, \psi_1$ 従って χ_1

は定項）を考察しよう。この函数の変項 x に定項 a を入れた $\chi_1 a$ は一定の要素命題である。このマトリックスの φ_1 を変項に変えることは PM_1 においては！なる記号の導入と共に implicit になされた。(4) PM_2 においても PM_1 と同様 φ_1 は x と切り離された独立した要素とは認められていないが、(5) その変項としての性格はより積極的に認められている。それ故、$\chi_1 a$ 中の、例えば $\varphi_1 a$ を変項を用いて φa に変えることによってえられる χa（即ち、$\varphi a|(\psi_1 a|\psi_1 a)$）は、（$\varphi a$ が一つのマトリックスであるかぎり）φ に一定値を与えればある要素命題を値としてもつ。しかしこれは $\chi_1 x$ の値である要素命題とは違った種類の一群の要素命題を値としている。即ち、$\chi_1 x$ と χa の値は共に要素命題であるが、$\chi_1 x$ は異なる個物に対して同じ述語をもつ命題の一群を示し、χa は同じ個物に対して異なる述語の一群を示す。従って、「ソクラテスは哲学者である」「プラトンは哲学者である」等々の命題と、「ソクラテスは哲学者である」「ソクラテスはギリシャ人である」等々の命題との間の差異と同様に、同じ要素命題の異なる観点からの分類をこれらの函数は示している。(6)

それ故もし任意の函数を φx とかく場合に、PM_2 においても φx は属性 φx と x との函数として考えられているから、(7) φx の構成の如何によってはその函数の値が要素命題でない場合がありうる。例えば $(\psi)(\psi x|(\chi x|\chi x))$ は φx の形ではあるが、その値は ψ に関する全称量化子の故に要素命題ではなく、従ってマトリックスではない。それ故 PM_1 の記号にならって(8)マトリックスには $\varphi!x$ なる記号が用いられる。

さて、PM_1 においては命題函数を独立変項としてもつ命題函数を考える場合に、それはむしろ属性を独立変項としてもつものと考えられ、函数の曖昧値を独立変項とするものではなかった。しかし PM_2 においてはヴィットゲンシュタインにならって次の「命題函数の外延性原理」がおかれる。即ち、

命題函数の外延性原理　命題函数は任意のマトリックスの中では必ずその値を通して現われる。(9)

この原理の結果我々は $\varphi\hat{x} \mid (\chi\hat{x} \mid \chi\hat{x})$ といった形の函数（属性）を考慮する必要はない。我々は常に $\varphi\hat{x} \mid (\chi\hat{x} \mid \chi\hat{x})$ の形をのみ考えれば充分である。更にこの原理は還元可能公理に関連して重要な役割を果たすが、その議論は後に譲ることとして、命題函数の秩序関係をまず考察しよう。

既に述べたように命題函数の中には、量化子の故に要素命題を値としてもたない、従ってマトリックスでないものが存在する。そのような函数のうちで量化子の支配領域が函数全体におよぶものはマトリックスの一般化によってえられる。それ故

(d)　一般命題　マトリックスのすべての変項に関して全称或いは特称量化子を付すること（一般化）によってえられる命題を一般命題とよぶ(10)

という定義を与えれば、この一般命題を値とする函数に関しては、マトリックスは一般に個物を値とする変項と普遍者を値とする変項をもつと考えられるから、PM。においては次のような秩序関係がえられる。

(e)　第一次函数　マトリックスが個物を値とする変項のみをもつとき、その変項の幾つか（全てではなく）に関して量化子を付することによってえられる函数は第一次函数とよばれる。

(f)　第一次命題　第一次函数の変項をすべて一般化することによってえられる命題を第一次命題とよぶ。

(g)　第二次函数　マトリックスが函数を独立変項としてもつとき、その変項である函数の幾つか（全てではなく）に関して量化子を付することによってえられる函数は第二次函数とよばれる。

(h)　第二次命題　第二次函数のすべての変項を一般化することによってえられる命題を第二次命題とよぶ。(11)

さて、今 $p, q, r, \ldots$ を要素命題、$\varphi!\hat{x}, \psi!\hat{x}, \ldots$ 等を要素命題を値とする属性とする。ある要素命題を他の要素命題から構成する方法は「｜」を挿入することしかないから、p、q、r……から成る要素命題を $F(p, q, r, \ldots)$ とかけば一般にマトリックスは外延性の原理からこの p、q、r……に属性 $\varphi!\hat{x}, \psi!\hat{x}, \chi!\hat{x}, \ldots$ の値を代入することによってえられる。それ故、$F(p, q, r)$ を $p|(q|r)$ とすれば、$\varphi!x|(\psi!y|\chi!z), \varphi!a|(\psi!x|\chi!b)$ 等はそれに対応するマトリックスである。しかしマトリックスの場合、函数の曖昧値 $\varphi!x, \psi!x$ 等は PM_2 においても、それぞれ $\varphi!\hat{z}, x; \psi!\hat{z}, x$ 等の函数と考えられているから、その記号はむしろ $f!(\varphi!\hat{z}, \psi!\hat{z}, \chi!\hat{z}, x, y, z, \ldots)$ となる。この f の後の ! はその値がやはり要素命題なることを示す。この考察において、F と $f!$ は共に変項としての性質をもちうることも注意されねばならない。我々は、$p|(q|r), (p|q)|r$ 従って $\varphi!x|(\psi!y|\chi!z), (\varphi!x|\psi!y)|\chi!z$ の構造上の差異の可能性も F、$f!$ を変項とみることによって一般的考察の中に含めている。

ところが、もし我々がマトリックスにかぎらず一般に属性 $\varphi\hat{x}, \psi\hat{x}, \chi\hat{x}\ldots$ というとき、その値は要素命題にかぎらず、従ってその構造を一般的に分析する手県りをもたない。それ故、$(\varphi).f!(\varphi!\hat{z}, x)$、例えば $(\varphi)(\varphi!x|(\varphi!x|\varphi!x))$ のような函数に現われる全称量化子はマトリックスのすべてを意味するが、一般命題を値とする函数は含んでいない。PM_2 の重要な課題の一つは、『命題函数の値が要素命題或いは一般命題となるとき、マトリックスに対する演繹方法をどこまでこの函数に拡張しうるかということ、いいかえれば函数の値が要素命題である場合は自明であるから、マトリックスに関する演繹方法を一般命題を値とする函数にまで及ぼしうるか』ということである。これが還元可能公理の省略可能性と結びつく PM_2 の基本的な課題に他ならない。この問題については次節において考察するとして、ここでは PM_2 のいわゆる「論理的マトリックス」について一言しておく必要がある。

論理的真理は周知のように命題間の構造関係から結果される真理であり、従って個々の命題自体の内部構造或いは真理性によって左右されない。その限り論理学の対象とされるのは、ある特定の変項によって決定される特殊性から結果される真理ではなく、変項の値のいかんにかかわらず成立するところの真理である。それ故、例えば $\varphi x|(\varphi x|\varphi x)$ $(\varphi x.\supset.\varphi x)$ が論理的に真であるのは、φx がいかなる値をもつかにかかわらず、$(-)|((-)|(-))$ という図式によって表現される命題函数の関係からである。今マトリックスの中でいかなる定項をも含まぬものを論理的マトリックスとよべば、他のマトリックスは論理的マトリックスの変項を定項におきかえることによってえられる。この論理的マトリックスには $f!(\varphi!\hat{z})$ の形のものはありえない。$f!(\varphi!\hat{z})$ は $\varphi!a, \varphi!b, \cdots$ を"|"によって結びつけたものであろうが、これは定項 a、b、c 等を含んでいる。従って論理的マトリックスは一般に $f!(\varphi!\hat{z}, x)$ のような形をとる。そしてこの場合、$\varphi x|(\varphi x|\varphi x)$ の例に見られるように、この第二次函数は函数間のある関係を示している。このように論理的マトリックスの構造関係上の差異点を変項としての第二次函数は示しているということができる。[12]

註1　これらの定義については PM, Vol. 1, p. xix.
註2　属性と曖昧値については拙稿Bを参照。悪循環原理と命題函数の秩序関係についても同論文を参照。
註3　PM, Vol. 1, p. xxii.
註4　拙稿Bを参照。
註5　この問題については拙稿A pp. 172-173 及びBを参照。
註6　PM, Vol. 1, p. xxix.
註7　拙稿Bを参照。

註8　拙稿Bを参照。

註9　PM, Vol. 1, p. xxix.

註10　PM, Vol. 1, p. xxiii.

註11　これらの定義は PM_2 においては明確に与えられていないが、PM_1 にならってこのような定義を前提としていることは集合その他に関する議論からして明らかである。

註12　PM, Vol. 1, pp. xxx–xxxiii.

3　還元可能公理について

命題計算において証明されるところの定理は、それを構成する命題のいかんをとわず成立し、且つ PM_2 の定義からして要素命題を値とする函数即ちマトリックスの一種であることは明らかである。（例えば、$p|(p|p)$ 即ち $p \supset p$）。それ故一般に定理は $\vdash . F(p, q, r, \cdots\cdots)$（但し p、q、r……は要素命題とする）とかくことができる。この p、q、r……の代りにマトリックスを代入してえられるものも定理となることには問題はない。(1)

それに反して、ある論理的マトリックスが定理であるとき、即ち

$\vdash . f!(\varphi!\hat{z}, x)$

なるとき、マトリックスでない函数の函数に対して推論することが可能であろうか。その場合二つのケースが問題となる。即ち第一の場合とは

$\vdash . \varphi!x \,|\, (\varphi!x \,|\, \varphi!x)$

から

$\vdash .(y).\varphi!(x,y)\,|\,((y).\varphi!(x,y)\,|\,(y).\varphi!(x,y))$

をうるときのように代入される函数が第一次函数の場合で、この場合の方法は PM_2 においても通常の（制限された）述語計算の方法とほぼ等しい。しかしそれに対して第二の第二次もしくはそれ以上の函数が代入される場合、この種の推論の可能性をどのようにして保証するかは、PM_2 の命題函数の定義からして当然解明されねばならぬ問題となる。

今、$(\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x)$, $(\exists\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x)$ なる形の函数を考察しよう。これらは共に x の函数ではあるが、その値は要素命題ではなく、従ってマトリックスではない。このように $\varphi!\hat{z}$ に関する量化子を含む函数を変項 φ_2 によって示すならば、我々は全く同様に、$(\varphi_2).f!(\varphi_2\hat{z},x)$, $(\exists\varphi_2).f!(\varphi_2\hat{z},x)$ 等の函数をうることができる。この考察を拡張すれば一般に $(\varphi).f!(\varphi\hat{z},x)$, $(\exists\varphi).f!(\varphi\hat{z},x)$ は決して $\varphi!x$ の値となることはできない。（この考察は明らかに命題函数に関する「悪循環原理」を前提としている。）

さて $\vdash .(\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x)$ から $\vdash .(\varphi).f!(\varphi\hat{z},x)$ にどのようにして推論しうるであろうか。そのために先ず第一次函数 $\varphi_1 x$ の場合をとろう。例えば、$\vdash .(\varphi)(\varphi!x\,|\,(\varphi!x\,|\,\varphi!x))$ から $\vdash .(\varphi_1)(\varphi_1 x\,|\,(\varphi_1 x\,|\,\varphi_1 x))$ を推論するためには、

$\vdash .(\varphi)(\varphi!x\,|\,(\varphi!x\,|\,\varphi!x)).\supset .(\varphi_1)(\varphi_1 x\,|\,(\varphi_1 x\,|\,\varphi_1 x))$ (1)

が証明される必要がある。ところが $\varphi_1 x$ は $\varphi!x$ には含まれぬ $(y).\varphi!(x,y)$, $(\exists y).\varphi!(x,y)$, $(y,z).\varphi!(x,y,z)$ 等々の形の函数を含んでいるから、

$\vdash:(\varphi_1)(\varphi_1 x|(\varphi_1 x|\varphi_1 x)).\supset.(\varphi)(\varphi!x|(\varphi!x|\varphi!x))$

は容易に得られる[2]のに反して、(1)の成立は自明ではない。このようなケースに対して PM_2 は非形式的な議論によって、その可能性を論証しようとする。その論証の基本的な方法は、$\varphi_1 x$ の形を適宜きめることによって個々のケースについて論証してみせることである。例えば(1)については、$\varphi_1 x=(\exists y).\varphi!(x,y)$ ととれば、

$$\vdash:(\varphi)(\varphi!x|(\varphi!x|\varphi!x)).\supset.\varphi!(x,y)|(\varphi!(x,y)|\varphi!(x,y)).$$

$$\supset.(\exists z,u)(\varphi!(x,y)|(\varphi!(x,z)|\varphi!(x,u)))\quad(2)$$

$$[(y).2\supset]\ \vdash:(\varphi)(\varphi!x|(\varphi!x|\varphi!x)).\supset:(y).(\exists z,u)(\varphi!(x,y)|(\varphi!(x,z)|\varphi!(x,u)))\quad(3)$$

(3)の右辺は定義によって $(\exists y).\varphi!(x,y)|((\exists y).\varphi!(x,y)|(\exists y).\varphi!(x,y))$ に他ならない。[3]

このように個々のケースをくりかえして証明する手段は、PM_2 の函数概念が PM_1 に比較して一応整備されたとはいえ、尚その形成規則が充分に形式化されていないために厳密なメタ―論理的な証明となることができない。この点は通常の述語計算と異なっている。そのために我々はこのような証明が $\varphi_1 x$ がどのような形をとろうとも可能であろうとは予測しえても、一般に

$$(\varphi_1).f!(\varphi_1\hat{z},x).\equiv.(\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x)$$

を形式的に証明することができない。このため、PM_2 においてはこのような結果が常にえられるように

$$\vdash:(\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x).\supset.f!(\varphi_1\hat{z},x)$$

が公理としておかれる。[4] この公理が認められれば、マトリックス $\varphi!\hat{z}$ について成立することは第一次函数についても成立する。他方 PM_1 の還元可能公理はすべての函数に対して、従って第一次函数に対してもそれと等値な

述語函数の存在を保証するから[5]、今論じられているような例は当然還元可能公理を前提することによって解決される。それ故、PM_2 の新しい公理が還元可能公理にまさる理由は、この公理が個々のケースに対する証明をもつという点で我々がそれを措定するのに充分な経験的根拠を有している点に他ならない。

しかし我々が $\varphi_1 x$ の代りに $\varphi_2 x$ を考える場合には事情は異なる。我々はどのようにして $\vdash.(\varphi).g!(\varphi!\hat{z},x)$ から $\vdash.g!(\varphi_2\hat{z},x)$ を、従って

$$\vdash:(\varphi).g!(\varphi!\hat{z},x).\supset.g!(\varphi_2\hat{z},x) \qquad (A)$$

を証明することができるであろうか。前例にならって $g!(\varphi!\hat{z},x)$ を $\varphi!x.\supset.\varphi!x$ とおこう。

$$\begin{aligned}\vdash:.(\varphi):\varphi!x.\supset.\varphi!x:\supset:(\varphi).\varphi!x.\supset.(\varphi).\varphi!x:(\exists\varphi).\varphi!x.\supset.(\exists\varphi).\varphi!x:\\ \supset:(\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x).\supset.(\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x):\\ (\exists\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x).\supset.(\exists\varphi).f!(\varphi!\hat{z},x):\\ \supset:\varphi_2 x.\supset.\varphi_2 x.\\ \supset.g!(\varphi_2\hat{z},x)\end{aligned}$$ [6]

だが常にこのように(A)が証明されうるとは限らない。例えば $g!(\varphi!\hat{z},x)$ が $\varphi!x\vee\varphi!x$ の形の場合、

$$(\varphi).\varphi!x\vee\varphi!x.\supset.(\varphi).\varphi!x.\vee.(\varphi).\varphi!x$$

は明らかに証明不可能である。即ち、$g!(\varphi!\hat{z},x)$ は、'｜' による函数 $F(p,q,r,\cdots)$ の p、q、r 等に $\varphi!x$, $\varphi!a$, $\varphi!b$ 等を代入することによってえられるが、この函数が p、q、r……のすべての値に対して真なるが故に、$(\varphi).g!(\varphi!\hat{z},x)$ が真である場合にのみ、$g!(\varphi_2\hat{z},x)$ も亦真であり、従って $(\varphi_2).g!(\varphi_2\hat{z},x)$ も真となる。しかしその

他の場合は $g!(\varphi\hat{z}, x)$ への推論は常に真とは限らない。このような場合、その正否はそれぞれのケースの特殊性に依存している。このような場合の最も重要な例は数学的帰納法であるが、その前に集合の理論についてふれておく必要がある。

註1　PM_2 においては PM_1 と異なり現在通常行われているように $\vdash.F(p,q,r)$ と $\vdash.(p,q,r).F(p,q,r)$ 或いは $\vdash.\varphi!(x,y)$ と $\vdash.(x,y).\varphi!(x,y)$ との間の差別は行われていない。

註2　この証明については PM, Vol. 1, pp. xxxv-xxxvii. その方法は適当な手段によって第一次函数をマトリックスにかきかえてしまうことである。

註3　この量化子の展開の方法については PM, Vol. 1, Appendix A を参照。

註4　PM, Vol. 1, p. xxxvii.

註5　この問題については拙稿Bを参照。

註6　この証明は正確には PM_2 の方法を踏襲していない。$\varphi!x \mid (\varphi!x \mid \varphi!x)$ を $\varphi!x.\supset.\varphi!x$ とよむ方がわかりやすいのでこのような方法で記した。

4　集合及び関係の理論

PM_2 の命題函数は、PM_1 と異なり、「|」によってその部分である命題函数から構成されている。即ち真理函数的なものに限られている故に、$\varphi\hat{z}$, $\psi\hat{z}$ から構成されている函数を $f(\varphi\hat{z})$, $f(\psi\hat{z})$ とすれば、「外延性の原理」から、$f(\varphi\hat{z})$, $f(\psi\hat{z})$ において属性 $\varphi\hat{z}$, $\psi\hat{z}$ はその値を通してのみ現われるから、$f(\varphi\hat{z})$, $f(\psi\hat{z})$ は φx, ψx の真

理函数となる。それ故、

$$\vdash : \varphi x \equiv \psi x . \supset . f(\varphi \hat{z}) \equiv f(\psi \hat{z}) \qquad (1)$$

が成立することは容易に理解できる。更に

$$[(f).1 \supset] \vdash : \varphi x \equiv \psi x . \supset . (f) . f(\varphi \hat{z}) \equiv f(\psi \hat{z})$$
$$\supset . \varphi \hat{z} = \psi \hat{z}$$

従って、PM_1 においては集合においてのみ認められていた外延性、即ち

$$\varphi x \equiv \psi x . \supset . \hat{x}(\varphi x) = \hat{x}(\psi x)$$

は属性に対しても成立するから、集合と属性との間に差別を設ける必要は全くなくなる。関係についても事情は全く同じである。

ところが、もし還元可能公理を廃止すれば、前の節で述べた議論から、我々はマトリックスによって定義される集合 $\hat{x}(\varphi ! x)$ に関する定理を $\hat{x}(\varphi_1 x)$ には拡張しえても、一般に $\hat{x}(\varphi_2 x), \hat{x}(\varphi_3 x)$ 等に拡張することはできない。いいかえれば、函数の次元の区別は、そのまま集合の理論にもちこまれることとなる。PM_1 においては還元可能公理によってこのような事態はさけられていた。それ故 PM_2 の命題函数の理論が還元可能公理を廃止することができるかどうかは、PM_2 の理論が $\hat{x}(\varphi_2 x)$ その他に関する理論を果してどこまで可能にしうるかにかかっている。

既に述べたように、$(\varphi) . f(\varphi ! \hat{z}, x)$ が論理的に真なる場合には $f ! (\varphi_2 \hat{z}, x)$ は真といえるから、集合に関する論理的に真なる性質は一般的にすべての集合に及ぼすことができる。例えば

$(\alpha\cap\beta)\cup\gamma=(\alpha\cup\gamma)\cap(\beta\cup\gamma)$

$\alpha\subset\beta.\beta\subset\alpha.\supset.\alpha=\beta$

$\alpha\subset\beta.\beta\subset\gamma.\supset.\alpha\subset\gamma$

等の性質は、α、β、γがどのような函数によって定義されていようと一般的に成立する。しかし、その他の場合には種々の困難が生ずる。その典型的な例は

$p‘\kappa=\hat{x}(\alpha\varepsilon\kappa.\supset_{\alpha}.x\varepsilon\alpha)$　　Df

$s‘\kappa=\hat{x}\{(\exists\alpha).\alpha\varepsilon\kappa.x\varepsilon\alpha\}$　　Df

に関する場合である。もしαが $\hat{x}(\varphi!x)$ ならば、$p‘\kappa, s‘\kappa$ は共に $\hat{x}(\varphi_2 x)$ である。それ故、$(\alpha).f\alpha$ から $f(p‘\kappa)$ 或いは $f(s‘\kappa)$ に推論することは許されなくなる。

これに対して

$\mathrm{D}‘\mathrm{R}=\hat{x}\{(\exists y).x\mathrm{R}y\}$　　Df

$\text{ᗡ}‘\mathrm{R}=\hat{x}\{(\exists y).y\mathrm{R}x\}$　　Df

$\overrightarrow{\mathrm{R}}‘x=\hat{y}(y\mathrm{R}x)$　　Df

$\overleftarrow{\mathrm{R}}‘x=\hat{y}(x\mathrm{R}y)$　　Df

等については、R が $\hat{x}\hat{y}(\varphi!(x,y))$ の形ならば、それぞれ $\hat{x}(\varphi_1 x)$, $\hat{x}(\varphi!x)$ であるから、$(\alpha).f\alpha$ から $f(\text{ᗡ}‘\mathrm{R})$, $f(\overrightarrow{\mathrm{R}}‘x)$ 等について推論することができる。

さて、$(\alpha).f\alpha$ から $f(p‘\kappa)$ への推論と類似のケースが問題となるのは、Schröder-Bernstein の定理、Cantor

の定理及び主として数学的帰納法の適用の場合である。Schröder-Bernstein の定理については PM_2 において可能な別証明が与えられているので、[1] ここではふれない。数学的帰納法については次節であらためて論ずることとして、ここでは Cantor の定理について簡単に述べよう。

Cantor の定理とは「いかなる集合Mをとっても、そのすべての部分集合の集合 (UM) の濃度はMの濃度より大である ($\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{UM}}$)」を指す。この定理の証明は PM_1 においては通常の直観的証明と同様に、Mの濃度と UM の濃度が等しい場合を仮定して帰謬法を用いる。そのとき「Mの部分集合のある集合Sの濃度がMの濃度と等しければ、Sには属さぬMのある部分集合Tが存在する」という補助定理が用いられる。この集合Tは、Mの成員でかつ与えられた 1-1 対応Rによってそれに対応するMの部分集合 α ($\alpha\varepsilon S$) に属しないような x の集合、即ち $\hat{x}(x\varepsilon M : xR\alpha .\supset_\alpha . x\sim\varepsilon\alpha)$ ととられ、$T\sim\varepsilon S$ を示すことによって補助定理は証明される。[2] このとき $T\subset M$ であるから、$T\varepsilon S$ と仮定すれば、$y\varepsilon M . yR(T)$ なる y に対して α をTととると、

$$y\varepsilon T . \equiv : y\varepsilon M : yR\alpha .\supset_\alpha . y\sim\varepsilon\alpha :$$

$$\supset : y\varepsilon M : yR(T) .\supset . y\sim\varepsilon T .$$

ところが $y\varepsilon M$ で $yR(T)$ であるから $y\varepsilon T .\supset . y\sim\varepsilon T$ 従って $T\sim\varepsilon S$ この証明中でMを $\hat{x}(\varphi ! x)$、α を $\hat{x}(\psi ! x)$ なる集合ととれば、Tは $\hat{x}(x\varepsilon\hat{x}(\varphi ! x) : xR\hat{x}(\psi ! x) .\supset_\psi . x\sim\varepsilon\hat{x}(\psi ! x))$ となり、明らかに $\hat{x}(\chi_2 x)$ の形である。従って証明中で α をTととるためには、$(\varphi) . f!(\varphi ! x)$ から $f!(\chi_2 x)$ へと推論する必要がある。ここでは特に $(\varphi) . f!(\varphi ! x)$ は論理的に真ではないから、前に述べたようにどのようなTに対してもこの推論が可能だということはできない。

同様な事例はα、β間の濃度の相等性についても見られる。例えば

$$\alpha\ sm\ \beta .\equiv (\exists R).R\varepsilon 1\rightarrow 1.\alpha = D\text{‘}R.\beta = \text{Ɑ‘}R$$

（α、βの間には一対一の対応がある）は、明らかに $R_2(\alpha,\beta)$ である。[3] Cantor の定理の証明においても UM*sm*M を仮定し、補助定理のSを UM ととることによって矛盾が導きだされるが、結論である

$$\sim(UM\,sm\,M).\equiv.\sim(\exists R).R\varepsilon 1\rightarrow 1.UM = D\text{‘}R.M = \text{Ɑ‘}R$$

は明らかに一種の R_2[4] であって、それ故このような場合に我々は常に定義中に現われるRよりも高い次数の関係を与えることができる。今、添字によって関係の次数を明示して、

$$\alpha\ sm_n\beta.\equiv.(\exists R_n).R_n\varepsilon 1\rightarrow 1.\alpha = D\text{‘}R_n.\beta = \text{Ɑ‘}R_n$$

とすれば $\sim(\alpha\ sm_n\beta)$ は一つの R_{n+1} であり、従ってα、βが有限の場合をのぞき、一般に全ての n に対して $\sim(\alpha\ sm_n\beta)$ なることを証明することができないのは今迄の議論から明らかである。

かくして、還元可能公理を用いない PM_2 の基本的難点の一つは、このように超限的なカーディナル数の存在に関して現われることとなる。

註1　PM, Vol. 1, pp. xi-xii.

註2　PM, Vol. 2, ∗102. 71, ∗102. 72 及び Vol. 1, pp. xxlii-xxliii.

註3　この記法は正確でないが、定義中に現われるRに規定される成員よりも一次上の次数をもつと解されたい。

註4　前註参照。

5　数学的帰納法

PM_2 の最大の難点は数学的帰納法の適用の問題である。既に前の論文で述べたように、PM_2 の数学的帰納法の適用は、次のような帰納的関係

$$xR_*y . \equiv : x\varepsilon C`R : \breve{R}``\mu\subset\mu . x\varepsilon\mu . \supset_\mu . y\varepsilon\mu$$

の相続集合 $\breve{R}``\mu\subset\mu$ の μ に適当な集合をとることによってなされる。ところが PM_2 においては集合の次元によってはこの種の推論をなすことが不可能な場合がある。それ故、後の考察のために μ の次元を添字によって示して、次のような定義をする。

$$*86.01.\quad xR_{*m}y = : x\varepsilon C`R : \breve{R}``\mu_m\subset\mu_m . x\varepsilon\mu_m . \supset_{\mu_m} . y\varepsilon\mu_m \qquad \mathrm{Df}$$

難点とは例えば次のような場合 ($*90.17$)[1] である。

$$yR_{*m}z . \supset : \breve{R}``\overleftarrow{R}_{*m}`x\subset\overleftarrow{R}_{*m}`x . y\varepsilon\overleftarrow{R}_{*m}`x . \supset . z\varepsilon\overleftarrow{R}_{*m}`x \qquad (1)$$

を導き出す場合に、$\overleftarrow{R}_{*m}`x$ は $\hat{y}(xR_{*m}y)$ であるから $xR_{*m}y$ の定義中の $\mu_m$ という量化子の故に $m+1$ 次の集合である。従って、先件の $\mu_m$ を $m+1$ 次の $R_{*m}`x$ に個別化することになるが、それは前節に述べた理由からして一般には不可能である。このような推論を可能にするために、PM_2 では次のような方法がとられる。我々は先ず $\kappa=\hat{\mu}_m(\breve{R}``\mu_m\subset\mu_m . x\varepsilon\mu_m)$ なる集合をとると、[2]

$$\overleftarrow{R}_{*m}`x = \hat{y}(xR_{*m}y) = \hat{y}\{\breve{R}``\mu_m\subset\mu_m . x\varepsilon\mu_m . \supset_{\mu_m} . y\varepsilon\mu_m\}$$

$$=\hat{y}\{\mu_m\varepsilon\kappa.\supset_{\mu_m}.y\varepsilon\mu_m\}=p\text{‘}\kappa$$

であるから、

$$\mu_m\varepsilon\kappa.\supset.x\varepsilon\mu_m:\mu_m\varepsilon\kappa.\supset.\breve{R}\text{“}\mu_m\subset\mu_m$$

故に

$$\mu_m\varepsilon\kappa.\supset_{\mu_m}.x\varepsilon\mu_m:\mu_m\varepsilon\kappa.\supset.\breve{R}\text{“}\mu_m\subset\mu_m$$

$$x\varepsilon p\text{‘}\kappa:\mu_m\varepsilon\kappa.\supset.\breve{R}\text{“}\mu_m\subset\mu_m$$

従って

$$\mu_m\varepsilon\kappa.\supset:x\varepsilon p\text{‘}\kappa.\breve{R}\text{“}\mu_m\subset\mu_m.x\varepsilon\mu_m$$

$$\mu_m\varepsilon\kappa.\supset:x\varepsilon p\text{‘}\kappa.xR_{*m}y.\supset.y\varepsilon\mu_m$$

$$xR_{*m}y.x\varepsilon p\text{‘}\kappa:\supset:\mu_m\varepsilon\kappa.\supset.y\varepsilon\mu_m$$

$$xR_{*m}y.x\varepsilon p\text{‘}\kappa:\supset:\mu_m\varepsilon\kappa.\supset_{\mu_m}.y\varepsilon\mu_m$$

$$xR_{*m}y.x\varepsilon p\text{‘}\kappa:\supset.y\varepsilon p\text{‘}\kappa$$

従って

$$yR_{*m}z.y\varepsilon\overrightarrow{R_{*m}}\text{‘}x.\supset.z\varepsilon\overrightarrow{R_{*m}}\text{‘}x \qquad (2)$$

(1)における $\breve{R}\text{“}\overrightarrow{R_{*m}}\text{‘}x.\supset.\overrightarrow{R_{*m}}\text{‘}x$ は *90.163 において証明されているから、(2)は(1)と等値となる。

このような場合には、今述べた方法で我々は PM_2 においても別証明を与えることができるが、数学的帰納法に関する基本的な困難は、

*90.112.　$\vdash:xR_*y:\varphi z.zRw.\supset_{z,w}.\varphi w:\varphi x:\supset.\varphi y$

或いはそれを集合の形にかいた

$*90.111.\ \vdash :: x R_* y . \equiv :. x \epsilon C\text{'}R :. z \epsilon \mu . zRw . \supset_{z,w} . w \epsilon \mu : x \epsilon \mu : \supset_\mu . y \epsilon \mu$

の集合 μ、或いは函数 φ にそれぞれ次元を与えねばならぬところにある。即ち、例えば、

$z \epsilon \hat{z}(\varphi ! z) . zRw . \supset_{z,w} . w \epsilon \hat{z}(\varphi ! z) : x \epsilon \hat{z}(\varphi ! z) : \supset_\varphi . y \epsilon \hat{z}(\varphi ! z)$

から直ちに

$z \epsilon \hat{z}(\varphi_2 z) . zRw . w \epsilon \hat{z}(\varphi_2 z) : z \epsilon \hat{z}(\varphi_2 z) : \supset . y \epsilon \hat{z}(\varphi_2 z)$

を推論することは許されない。もし $\varphi_2 z = (\varphi) . f!(\varphi ! \hat{z}, z)$ 或いは $\varphi_2 z = (\exists \varphi) . f!(\varphi ! \hat{z}, z)$ の場合には還元可能公理の節で述べたのと類似の方法で解決しうる場合もあるが一般には不可能である。この制限は数学的帰納法の適用の範囲を著しく狭くする。(3) そのため PM_2 においては、帰納的な関係に関しては、その次数が5、即ち R_{*5} とすれば、どのような次数をもつ相続集合に対しても、(1)と同じ性質が証明されることを示そうとしている。即ち、

$89.34.\ \vdash : y R_{*5} x . x \epsilon \lambda . R\text{“}\lambda \subset \lambda . \supset . y \epsilon \lambda .$

これが証明されれば、勿論 R_* を R_{*5} と解することによって数学的帰納法に関する制限は、全く存在せぬこととなる。その証明の方法にまで立入る暇はないが、PM_1 の証明は成功していない。*89.34 を証明する上で重要な役割を演ずる「第三次の帰納的集合 γ の部分集合 α がどのような次数をもとうと、α も又第三次の帰納的集合である」という定理（*89.16, *89.17）の証明には納得しえぬ点がある。

$*89.16.\ \vdash : \alpha \sim \epsilon \text{Cls induct}_3 . \gamma \epsilon \text{Cls induct}_3 . \supset . \exists ! \alpha - \gamma .$

$*89.17.\ \vdash : \gamma \epsilon \text{Cls induct}_3 . \alpha \subset \gamma . \supset . \alpha \epsilon \text{Cls induct}_3 .$

*89.17 は *89.16 から容易にえられるが、この *89.16 の証明は完全とはいえない。この証明は、先ず $\exists ! \alpha - \Lambda$

を与えられた前提から証明し、次に $\exists!\alpha-\gamma$ を仮定すれば $\exists!\alpha-(\gamma\cup\iota'y)$ なることを証明して完成するところの帰納法による証明を用いている。ところがこの $\exists!\alpha-\gamma$ は α の次数が3より大ならばその次数も当然3より大である。それ故我々はこの場合に帰納法を適用しうるいかなる保証ももっていない。かくして *89.34 の証明は完全ではない。[(4)]

それ故数学的帰納法に関するこの困難は未解決といわねばならない。更に数学的帰納法に止まらず、前の論文で論じたデデキントの切断に関する多くの定理も又、今迄述べた $p'\kappa, s'\kappa$ について $(\alpha).f\alpha$ から直ちに $f(p'\kappa)$, $f(s'\kappa)$ を推論しえぬという困難から証明不可能となる。[(5)] かくして結論的にいえば PM_2 の命題函数の理論は還元可能公理をとり去った場合、数学を充分にその内部で構成することはできないと言わねばならない。還元可能公理より弱く、しかも数学の構成に充分な公理も未だに課題として残されているのである。

註1　*90.17 の証明における三行目、*90.163 の μ に $\overleftarrow{R_*}'x$ を代入する点が当面の問題であるが、この証明中で $\frac{\overleftarrow{R}'x}{\mu}$ は明らかに $\frac{\overleftarrow{R_*}'x}{\mu}$ の誤りである。

註2　$xR_{*m}y$ の定義中の $x\epsilon C'R$ は以下関係がないので省略する。

註3　相続集合が要素的であるか、或いは要素的な相続集合から構成されている必要がある。この点については PM. Vol. 1, pp. xiii–xiv 参照。

註4　この帰納法の欠陥の他に *89.16 の証明の式(3) $\exists!\alpha-\gamma.\alpha\subset\gamma\cup\iota'y.\supset.\alpha=\gamma\cup\iota'y$ は α が $\iota'y$ で γ が Λ でないとき明らかに誤りである。それ故ゲーデルの言うように $\exists!\alpha-\gamma$ の代りに $\alpha-\gamma\sim\epsilon$ Cls induct_2 と読みかえたとしても事態は改善されない。尚このように読みかえたときの証明は明らかでない。これについては

K. Gödel, Russell's Mathematical Logic, The Philosophy of B. Russell, edited by P. Schilpp, New York, pp. 127—128 参照。尚この論文の $\alpha-\beta\sim\epsilon$ Induct_2 は当然 $\alpha-\beta\sim\epsilon$ Cls induct_2。

(5) 例えば ＊211. 64. ⊢ $\lambda \subset D$'P_ε .⊃. s'$\lambda \varepsilon D$'P_ε この証明では、⊢. $\lambda \subset D$'P_ε .⊃. s'$\lambda = P$''s'P_ε''λ をえた後に ＊211. 11. ⊢. $\alpha \varepsilon D$'P_ε .≡. $(\exists \beta)$. $\alpha = P$''β を適用して α に s'λ を代入するが、この α と s'λ との次数はある特殊な事情によらぬかぎり一般には同じではない。この ＊211. 64 の実数論における役割については拙稿B参照。尚整列系列に対しても全く同様な事態が生ずる。PM, Vol. 1, pp. xiv–xv.

6 批判的考察

最後に PM_2 の命題函数に関して若干の批判的考察を加えて結論としたい。PM_2 の第二次までの命題函数はより厳密な記法を用いれば次の如くになる。個物を示す変項を x、y、z……、函数を示す定項に F^1、G^2、H^3……、[1] 変項に φ、ψ、χ……等を用いるとする。

(a) $F^i(x_1,\cdots,x_i)$ は命題函数である。

(b) $\varphi^i(x_1,\cdots,x_i)$ は命題函数である。

(c) $\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$ が命題函数なるとき、$\mathfrak{A}|\mathfrak{B}$ は命題函数である。

(d) $\mathfrak{A}$ が n 個の個体変項のみをもつ命題函数なるとき、$(x_j)\mathfrak{A}\ (1\leqq j<n)$ は命題函数である。

(e) $\mathfrak{A}$ が n 個の個体変項と m 個の函数変項とをもつ命題函数なるとき、$(\varphi_j)(x_k)\mathfrak{A}\ (0\leqq j<m,\ 0\leqq k\leqq n)$ は命題函数である。[2]

既に同名の論文Iで PM_1 の「悪循環原理」が命題函数に適用されるためには「すべての函数はその値を前提

とする」という考察が前提されていると同時に、この「すべて」という語が明確にされていないことが重要な役割を演じていることを示した。今、(c)の方法によってえられる或る命題函数をメター論理的に $\Gamma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ によって表わし、簡単のために $\Gamma(\mathfrak{A})$ の場合をとろう。$\mathfrak{A}$ が $(x).\varphi^1 x$ なる形のとき、これを Φ_1 によって示せば、PM_2 のいう $f!((x).\varphi!x)$ 即ち $f!(\varphi_1 \hat{x})$ は $\Gamma(\Phi_1)$ である。他方 $\mathfrak{A}$ が、$(\varphi^1).\varphi^1 x$ のときこれを $\Phi_2 \alpha$ によって示せば、$f!((\varphi).\varphi!x)$ 即ち $f!(\varphi_2 \hat{x})$ は $\Gamma(\Phi_2 \alpha)$ である。我々はこのとき容易に $\Gamma(\Gamma(\Phi_1))$, $\Gamma(\Gamma(\Phi_2 \alpha))$ 等の形をとる命題函数を構成することができるが、これらすべての命題函数を表現するためにはメター論理的な変項と量化子を必要とし、対象―論理の中では形式化が不可能である。それ故、$PM_{1,2}$ に現われる議論の混乱は全く $f!(\varphi!\hat{z}, x)$ といった対象論理とメター論理を区別しない記号上の不正確に由来している。かくして、対象―論理とメター論理との区別は「悪循環原理」の命題函数に対する適用の根拠を否定することとなる。(3)

更に、PM_2 の命題の理論は、PM_1 が「還元可能公理」を前提して始めて許した $p'\kappa\epsilon\kappa$, $s'\kappa\epsilon\kappa$ といった種類の循環的な表現を「還元可能公理」を措定せずに用いていることからして、命題函数に対する「悪循環原理」は実際的には適用されていないということができる。

PM_2 の新しく措定した「函数の外延性原理」は、「還元可能公理」よりはるかに説得力があり、独断的な性格をもたない。この原理の結果、属性 $\varphi\hat{z}$ の存在はシンタックス上のある構造を示すこと以外大した役割をもたぬこととなり、理論的重要性を著しく失ったといえよう。そして属性は形式的にも集合の存在と全く等価となり、その区別の必要のないことは既に述べた。しかし、このようにもし $\varphi\hat{z}$ が $\varphi x, \varphi y, \varphi z, \cdots; \varphi a, \varphi b, \varphi c, \cdots$ と同一視されうるならば、$\varphi\hat{z}$ がその値と全く独立に知られうるものであるという PM_1 の認識論的規定をのぞいて、$\varphi\hat{z}$ を

その値の総体と区別する必要はないと思われる。そのとき、命題函数とはある真理値の組み合せの表現であるというヴィットゲンシュタインの理論とも、またそれに影響されたラムゼーの$(x).\varphi x$を$\varphi a, \varphi b, \varphi c, \dots$の$a$、$b$、$c$…が無限の場合に対する単なる便宜的表現手段とみなす態度とも殆ど異なる処はないと思われる。従って、PM.は依然として函数の秩序関係を認めているにかかわらず、技術的にも理論的にも、もはやそれを認めない「単純な階型論」に極めて近いものといわねばならない。そしてこのような「分枝的階型論」と「単純な階型論」の中間的な試みは、その数学的帰納法、従って自然数論の困難と実数論の不可能性とから否定的に解答されたと結論さるべきだと思われる。

註1　右肩の添数字は変項の数を示す。

註2　このケースは(a)(b)をも含む。従ってこの規則は完全ではないが以下の考察には充分である。

註3　或いはむしろメタ一論理的な考察から、より厳密に「悪循環原理」の目的に適う形式的体系を構成しうるともいいうるであろう。

本稿は慶応義塾学事振興資金の補助によって成れる研究の一部である。