

Title	初等及び一般回帰函数の理論とその適用：論理構造論研究I
Sub Title	La theorie des fonctions recursives primitives et generatees et ses applications
Author	大出, 晁(Oide, Akira)
Publisher	三田哲學會
Publication year	1957
Jtitle	哲學 No.33 (1957. 3) ,p.173- 263
JaLC DOI	
Abstract	Cet article a le but d'exposer brievement une partie de la theorie des fonctions recursives primitives et generatees qui se concerne particulierement des etudes metamathematique et metalogique. Les matieres contenues sont suivantes. Introduction, (supprimee) Chapitre Premier. Les fonctions recursives primitives. §1. Definition et exemples. §2. Les schemas reductibles aux schemas de definition de FRP. §3. La definition simplifiee par la methode de R. M. Robinson. §4. L'enumeration de FRP avec un argument. §5. L'existence des fonctions necursives non-primitives et la recursion emboitee. Chapitre 2. Les fonctions recursives generatees. §1. La definition metamathematique. §2. La definition mathematique. §3. La forme normale de Kleene et le theoreme de Tenumeration. §4. La definition simplifiee par la methode de J. Robinson. §5. Classe recursive et classe recursivement enumerable. §6. L'existence des fonctions et predicats qui ne sont pas recursives generatees. Chapitre 3. Les applications de la theorie des fonctions recursives. §1. Le systeme formel et la theorie des fonctions recursives (Les theses de Church). §2. Les theoremes de Godel et ses extensions. §3. Le theoreme de Church et ses extensions. §4. Le systeme formel de la theorie axiomatique du nombre et la theorie des fonctions recursives.
Notes	
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00150430-00000033-0184

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

初等及び一般回帰函数の理論とその適用

— 論 理 構 造 論 研 究 I —

大 出 晃

ま え が き

この小論の目的は、超数学 (Metamathematics) あるいは記号論理学の構造論的 (syntactical) な研究にとって欠くことのできない方法を提供する、回帰函数 (Recursive functions)¹⁾ の理論の要点を明らかにすることにある。この理論はすでに、超数学における二つの最も基本的な著作、即ち Hilbert-Bernays の「数学基礎論」及び Kleene の「超数学入門」²⁾ に詳細に述べられている。しかし前者については、その敘述の複雑さと些か古くなつた理論的な諸成果のゆえに、また後者については、その極めて明晰な敘述にもかかわらず、最近5年間に得られた幾つかの重要な結果のゆえに、我々の要求を完全に満足させるものとは言いがたい。そのうえ、現在までに現れている記号論理学の書物は、高度の技術的な展開を見せているものでも、回帰函数の敘述を欠くゆえに、その「形式的体系」(Formal system) の定義において、また「決定問題」(Problem of decision) の敘述その他において、一種の直観的な説明にたより、厳密な議論については専門的な諸論文の参照を促すのにとどめている。³⁾ この種の困難を避けるためには、回帰函数それ自体の独立した展開ではなく、その応用面との関聯においてなされたできるだけ簡潔な敘述が必要であるように思われる。これがこの小論執筆の動機である。それ故、この論文にはなんらあたらしい結果は含まれていない。たゞ敘述の形式及び順序には幾分の新味が認められるであろう。即ち、1950年前後に相ついで得られた Tarski 学派の理論への手がかりをつけるために、Julia 及び Raphael M. Robinson の結果を大幅にとり入れたことである。しかし、現在なお多くの発展を期待される部分回帰函数 (Partial recursive functions) に関しては触れることはないであろう。これはこの部分が、特に超限順序数への構成可能性の概念の拡張、あるいは直観主義数学の解釈の問題、さらには決定問題の還元等の重要な問題を包括し、それに独立の一章を与えるのが適当と考えたからに他ならない。

註 1) この語の決定的な日本訳が存在するかどうか私は知り得なかつた。この訳語を採用するのは、岩波「数学辞典」に Recursion なる語に対して「回帰」なる語が見出されること、及び私自身は Induction あるいは Inductive なる語に対し

て Recursion もしくは Recursive なる語は厳密に区別さるべきであると考え、前二者に対して、「帰納」あるいは「帰納的」なる訳語をあて、後者には「回帰」及び「回帰的」なる訳語を与えるのが妥当と考えるからである。

2) Hilbert und Bernays, Grundlagen der Mathematik, vol. 1, Berlin, 1934; vol. 2, Berlin, 1939.

S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, Amsterdam, 1952.

3) 例えば Quine, Mathematical logic, Revised ed., Cambridge, 1951. このもつとも標準的な書物の Protosyntax なる節の初めの部分 (291-292 頁) を参照。あるいは、Hermes und Scholz, Mathematische Logik, (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, Heft 1, Teil 1), Leipzig, 1952, 特に 46-52 頁参照。この点でもつとも完全であろうと予想されるのは Church による「数理論理学入門」の第二巻であると思われるが、我々には予定の目次のみが与えられているにすぎない。Church, Introduction to mathematical logic, vol. 1, Princeton, 1956. 尚、決定問題に関する Church の結果については、次書の取扱いは興味ふかい。Rosenbloom, Elements of mathematical logic, New York, 1950.

内 容 目 次

(序 論)¹⁾

記号の説明

第1章 初等回帰函数

第1節 定義及び例

第2節 初等回帰函数に還元可能な定義図式

第3節 定義の単純化

第4節 一変数の初等回帰函数の枚挙

第5節 非初等回帰函数の存在と多重挿入回帰

第2章 一般回帰函数

第1節 超数学的定義

第2節 数学的定義

第3節 Kleene の標準形及び枚挙定理

第4節 定義の単純化

第5節 回帰的集合及び回帰的枚挙可能集合

第6節 非一般回帰函数及び述語の存在

第3章 回帰函数理論の適用

第1節 形式的体系への要求と回帰函数の理論

第2節 Gödel の定理とその拡張

第3節 Church の定理とその拡張

第4節 回帰函数の理論と公理論的数論の形式的体系

む す び

文 献 表

註 1. 序論は紙数の関係で割愛せざるを得なかつた。

記 号 の 説 明

自然数の集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$ を N , n 個の自然数の順序集合 $(x_1, \dots, x_n)$ のすべての集合、 $\{(x_1, \dots, x_n)\}$ を N^n とかく。本論で函数とは、 N^n から N への一意写像を意味し、 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ の如く、ギリシャ小文字を用いる。更に真理値 T (真)、 F (偽) の集合 $\{T, F\}$ を T によつて表わし、 N^n から T への一意写像を (直観的) 述語とよび、アルファベット後部のラテン大文字 $P, Q, R, \dots$ によつて示す。それに対し、形式化された理論における変記号 (variable) は、 $x, y, z, \dots$ 等によつて、また式はアルファベット前部のラテン大文字 $A, B, \dots$, もしくは、ギリシャ大文字 $\Phi, \Psi, \dots$ によつて、更に超数学的述語はドイツ・ゴシック大文字によつて示すものとする、(但し、少数の例外はある)。

直観的な論理の記号としては、Hilbert 学派の記号を用いるが、形式化された論理の記号には下表の右側を用いることとする。

	直観的論理	形式化された論理
and	&	$\wedge$
or	$\vee$	$\vee$
if, then	$\rightarrow$	$\supset$
equivalent	$\equiv$	$\leftrightarrow$
non	—	$\sim$
universal quantifier	(x)	(x)
existential quantifier	(Ex)	$(\exists x)$

尚、形式的体系の対象中、特に formula に対しては「整式」なる訳語をあてる。「論理式」は少し狭すぎ、「式」は少し広すぎるので、Church のいう、well-formed formula によく対応する言葉として、この語を数学から借用する。

第1章 初等回帰函数 (Primitive recursive functions)

回帰函数の理論を述べるには、通常行われているように初等回帰函数、一般回帰函数、部分回帰函数の順序に従うのが最も適當であろう。この順序は理論の歴史的発展に応ずると共に、その体系的拡張とも対応している。

第1節 定義及び例

初等回帰函数¹⁾とは N^n から N への写像で次の5個の定義図式を任意回適用することによって定義されるところの函数である。

$$(I) \quad \varphi(x) = x'.$$

$$(II) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

$$(III) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

$$(IV) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \chi_m(x_1, \dots, x_n)).$$

$$(Va) \quad \varphi(0) = q,$$

$$\varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)).$$

$$(Vb) \quad \varphi(0, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_2, \dots, x_n),$$

$$\varphi(y', x_2, \dots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

これらの定義図式において、 m と n は正の整数、 i は $1 \leq i \leq n$ なる正整数、 q は自然数、 $\varphi, \chi_1, \dots, \chi_m, \chi$ は変数の数の一定な与えられた数函数とする。

図式 (I)–(III) は夫々特定の数函数を与える。(I) は x の次の整数 (即ち $x+1$) を与える函数 (後継者函数) を定義し、以下之を S とかく。(II) は恒常的に零なる数を与える函数 (零函数) を定義し、之を 0_n とかく。(III) は変数の一つを値としてもつ函数 (同一化函数) を定義し、之を U_i^n とかく。

定義図式 (IV) は明らかに函数 φ を $\chi_1, \dots, \chi_m$ と ψ とから代入によつて定義する図式であるから、之を代入図式とよび、 $S_m^n(\varphi, \chi_1, \dots, \chi_m)$ とかくことにする。

定義図式 (V) ((Va) は (Vb) の特殊な場合にすぎぬ) は回帰図式とよばれ、(Va) は一変数の函数 φ を常数 q 、及び二変数の函数 χ とからパラメーターを用いずに定義する。一方 (Vb) は n 変数の函数 φ を $n-1$ 変数の函数 ψ 及び $n+1$ 変数の函数 χ とから $n-1$ 個のパラメーターを用いて定義する。以下、(Va), (Vb) を夫々 (パラメーターなしの) 単純回帰図式、及び ($n-1$ 個のパラメーター附) 回帰図式とよび、 $R_q^1(\chi)$, $R^n(\varphi, \chi)$ と略記することにする。

今、上記の初等回帰函数の直観的な定義を厳密にするために二三の補助的な概念を導入し、定義することにしよう。

原初函数—もしある函数が定義図式 (I), (II), (III) によつて、ある特定の n, q 或は i に対して定義されるならば、その函数は原初函数とよばれる。

直接従属—もしある函数が定義図式 (IV) によつてある特定の m, n に対して、 $\psi, \chi_1, \dots, \chi_m$ の諸函数から定義されるか、或は定義図式 (Va) によつてある常数 q と函数 χ とから、もしくは定義図式 (Vb) によつてある特定の n に対して ψ と χ との二函数とから定義されるならば、その函数は夫々、 $\psi, \chi_1, \dots, \chi_m$; 或は χ ;

或は ϕ, χ の直接従属である (或は、夫々 $\phi, \chi_1, \dots, \chi_m; \chi; \phi, \chi$ に直接に従属する) とよばれる。

以上の定義を用いて次の初等回帰函数の定義を与えることができる。

定義 §1-1-1.

もし、ある函数 φ に対して函数の有限系列 $\varphi_1, \dots, \varphi_k (k \geq 1)$ が存在し、 $\varphi_i (1 \leq i < k)$ は原初函数のひとつであるか、或は $\varphi_{i_{p'}} (1 \leq i_{p'} < i)$ の直接従属であつて、且つ φ_k は φ であるならば、 φ は初等回帰函数であると言われる。

この定義から、直ちに次の定理が得られる。

定理 §1-1-1.

初等回帰函数の変数に他の初等回帰函数を代入することによつて得られる函数は初等回帰である。

このような初等回帰函数の定義によつて、自然数論を構成するのに用いられる多くの函数が初等回帰であることが示されるが、以下その代表的なものを例としてあげよう。

初等回帰函数の表

$$(i) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = q$$

(但し q は任意の常数)

以下函数

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = (\varphi(x))' \end{cases}$$

を 0_q と略記することがある。

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 & (II) \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) &= S(\varphi_1(x_1, \dots, x_n)) & (I)(IV) \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{q+1}(x_1, \dots, x_n) &= S(\underbrace{\dots (S(\varphi_1(x_1, \dots, x_n)) \dots)}_{q \text{ 個}}) \\ &= \underbrace{0'' \dots'}_{q \text{ 個}} & (I)(IV) \end{aligned}$$

$$(ii) \quad a + b$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1: S(a) &= a' & (I) \\ \varphi_2: U_1^1(a) &= a & (III) \\ \varphi_3: U_2^3(b, c, a) &= c & (III) \end{aligned} \right\} \text{原初函数.}$$

$$\varphi_4: \chi(b, c, a) = (U_2^3(b, c, a))' \quad (IV)$$

φ_1 及び φ_3 の直接従属.

$$\begin{aligned} \varphi_5 = \varphi: \varphi(0, a) &= U_1^1(a) \\ \varphi(b', a) &= \chi(b, \varphi(b, a), a) \end{aligned} \quad (Vb)$$

φ_2 及び φ_4 の直接従属.

$$\text{即ち } \begin{cases} a + 0 = a, \\ a + b' = (a + b)'. \end{cases}$$

(iii) $a \cdot d$

$\varphi_1 - \varphi_5$ は (ii) に同じ。

但し、 φ_5 の φ は ψ とかきかえるとする。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_6: & 0_2(d, a) = 0 \quad (\text{II}) \\ \varphi_7: & U_2^3(d, b, a) = b \quad (\text{III}) \\ \varphi_8: & U_3^3(d, b, a) = a \quad (\text{III}) \end{aligned} \right\} \text{原初函数.}$$

$$\varphi_9: \theta(d, b, a) = \psi(U_2^3(d, b, a), U_3^3(d, b, a)) \quad (\text{IV})$$

φ_5, φ_7 及び φ_8 の直接従属.

$$\varphi_{10} = \varphi: \begin{aligned} \varphi(0, a) &= 0_2(d, a), \\ \varphi(d', a) &= \theta(d, \varphi(d, a), a) \end{aligned} \quad (\text{Vb}).$$

φ_6 と φ_9 の直接従属.

$$\text{即ち } \begin{cases} a \cdot 0 = 0, \\ a \cdot d' = a \cdot d + a \end{cases}$$

以下簡単化された定義のみを右側にかくものとする。

- (iv) a^b (或は $a \exp b$) $\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^{b'} = a^b \cdot a. \end{cases}$
- (v) $a!$ $\begin{cases} 0! = 1, \\ a'! = a! \cdot a'. \end{cases}$
- (vi) $Pd(a)$ (或は $a \div 1$) $\begin{cases} Pd(0) = 0, \\ Pd(a') = a. \end{cases}$ 或は $\begin{cases} 0 \div 1 = 0, \\ a' \div 1 = a. \end{cases}$
- (vii) $a \div b$ (或は $a - b$) $\begin{cases} a \div b = a, \\ a \div b' = Pd(a \div b). \end{cases}$
- (viii) $\min(a, b)$ $\min(a, b) = b \div (b \div a).$
- (ix) $\max(a, b)$ $\max(a, b) = (a + b) \div \min(a, b).$
- (x) $\overline{Sg}(a)$ $\begin{cases} \overline{Sg}(0) = 1, \\ \overline{Sg}(a') = 0. \end{cases}$ 或は $\overline{Sg}(a) = 1 \div a.$
- (xi) $Sg(a)$ $\begin{cases} Sg(0) = 0, \\ Sg(a') = 1. \end{cases}$ 或は $\begin{aligned} Sg(a) \\ = \overline{Sg}(\overline{Sg}(a)). \end{aligned}$
- (xii) $|a - b|$ $|a - b| = (a \div b) + (b \div a).$
- (xiii) $rm(a, b) \equiv a_f(a \text{ を } b \text{ でわつた 剰余})$ $\begin{aligned} & \begin{cases} rm(0, b) = 0, \\ rm(a', b) = (rm(a, b))'. \end{cases} \\ & Sg(|b - (rm(a, b))'|). \end{aligned}$
- (xiv) $[a/b]$ $\begin{aligned} & \begin{cases} [0/b] = 0, \\ [a'/b] = [a/b] + \overline{Sg}(|b - (rm(a, b))'|). \end{cases} \end{aligned}$

(xv) $[\sqrt{a}]$

$$\begin{cases} [\sqrt{0}] = 0, \\ [\sqrt{a'}] = [\sqrt{a}] + \overline{\text{Sg}}(|a' - ([\sqrt{a}] + 1)^2|). \end{cases}$$

(xvi) $\text{quadres}(a)$

$$a \div [\sqrt{a}]^2.$$

以上の初等回帰函数の定義を幾分拡張して、次のような「他の函数において初等回帰な」函数 (primitive recursive in) の定義を与えることができる。

定義 §1-1-2.

もしある函数 φ に対して、函数の有限系列 $\varphi_1, \dots, \varphi_k (k \geq 1)$ が存在して、 φ_k は φ であつて、且つ $\varphi_i (1 \leq i \leq k)$ の各々が与えられた函数 $\psi_1, \dots, \psi_l$ (Ψ と略記する) のひとつであるか、或は原初函数のひとつであるか、それとも $\varphi_{i_{p'}} (1 \leq i_{p'} < i)$ の直接従属であるならば、その函数 φ は Ψ において初等回帰であるといわれる。

この定義からして、もし、 Ψ のすべてが初等回帰ならば、 φ も初等回帰、 Ψ のあるものが初等回帰であるならば、 φ は Ψ の他の函数において初等回帰となる。

このように他の函数において初等回帰な函数の例として、次の函数を与えることができる。

(xvii) $\sum_{y < z} \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$

$$\begin{cases} \sum_{y < 0} \varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \\ \sum_{y < z'} \varphi(x_1, \dots, x_n, y) = \\ \sum_{y < z} \varphi(x_1, \dots, x_n, y) + \varphi(x_1, \dots, x_n, z). \end{cases}$$

(xviii) $\prod_{y < z} \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$

$$\begin{cases} \prod_{y < 0} \varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 1, \\ \prod_{y < z'} \varphi(x_1, \dots, x_n, y) = \\ \prod_{y < z} \varphi(x_1, \dots, x_n, y) \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n, y). \end{cases}$$

前者は $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ なる函数の $y < z$ なる y の値に対する値の和 (但し $z=0$ のときは 0) を示し、後者は同じ函数の同様な y に対する値の積 (但し $z=0$ のときは 1) を示している。これら二つの函数が夫々 $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ において初等回帰なることは、定義 §1-1-2 及び初等回帰函数のリスト (ii) (iii) からして明かである。尙これらの函数が容易に $\sum_{y \leq z} \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ 及び $\prod_{y \leq z} \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ の形に拡張できることは明らかである。

いま、ある述語 $P(x_1, \dots, x_n)$ が T (真) なる値をとるとき $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ で、 $P(x_1, \dots, x_n)$ が F (偽) なる値をとるとき $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1$ なる数函数 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ が存在し、且つ $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ は 0, 1 の二つの値しかもたないとき、この $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ を述語 $P(x_1, \dots, x_n)$ の特性函数とよぶこととする。

我々は上述の定義 §1-1-1, 2 を述語の場合にも拡張することによつて、次のような初等回帰述語及び「...において初等回帰な」述語の定義を得ることができる。

定義 §1-1-3.

もし述語 $P(x_1, \dots, x_n)$ の特性函数 $\phi(x_1, \dots, x_n)$ が初等回帰であるならば、その述語も初等回帰であるといわれる。

定義 §1-1-4.

もし述語 $P(x_1, \dots, x_n)$ の特性函数 $\phi(x_1, \dots, x_n)$ が、他の述語 $Q_1, \dots, Q_l$ の特性函数 $\phi_1, \dots, \phi_l(\Psi)$ において初等回帰であるならば、その述語は $Q_1, \dots, Q_l$ (或は $\phi_1, \dots, \phi_l$) において初等回帰であるといわれる。

以下初等回帰述語に関する elementary な定理を証明する。

定理 §1-1-2.

述語 $Q(x_1, \dots, x_m)$ の変数 $x_1, \dots, x_m$ に n 変数の函数 $\chi_1, \dots, \chi_m$ を夫々代入して得られる述語 P は $\chi_1, \dots, \chi_m, Q$ において初等回帰である。

(証明)

述語 $Q(x_1, \dots, x_m)$ の特性函数を $\phi(x_1, \dots, x_m)$ とし、 $x_1, \dots, x_m$ に函数 $\chi_1(y_1, \dots, y_n), \dots, \chi_m(y_1, \dots, y_n)$ を代入するとすれば、述語 $P(y_1, \dots, y_n)$ は $Q(\chi_1(y_1, \dots, y_n), \dots, \chi_m(y_1, \dots, y_n))$ となる。この述語の特性函数を φ とすれば明かに $\varphi(y_1, \dots, y_n) = \phi(\chi_1(y_1, \dots, y_n), \dots, \chi_m(y_1, \dots, y_n))$ 。しかるに $\phi(y_1, \dots, y_n)$ は $\phi, \chi_1, \dots, \chi_m$ において初等回帰であるから、述語 P も同様である。

定理 §1-1-3.

(a) 述語 $\overline{Q}(x_1, \dots, x_n)$ は Q において初等回帰である。

(b) 述語 $Q(x_1, \dots, x_n) \vee R(x_1, \dots, x_n)$, $Q(x_1, \dots, x_n) \cdot \& R(x_1, \dots, x_n)$, $Q(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(x_1, \dots, x_n)$ 及び $Q(x_1, \dots, x_n) \equiv R(x_1, \dots, x_n)$ は夫々 Q 及び R において初等回帰である。

(証明)

$\phi(x_1, \dots, x_n)$ 及び $\chi(x_1, \dots, x_n)$ を夫々述語 $Q(x_1, \dots, x_n)$ 及び $R(x_1, \dots, x_n)$ の特性函数とすれば、述語 $\overline{Q}$, $Q \vee R$, $Q \& R$ の特性函数を夫々次のようにかくことができる。

$1 \div \phi(x_1, \dots, x_n)$ (或は $\overline{Sg}(\phi(x_1, \dots, x_n))$).

$(\phi(x_1, \dots, x_n) + \chi(x_1, \dots, x_n)) \div 1$ (或は $\phi(x_1, \dots, x_n) \cdot \chi(x_1, \dots, x_n)$).

$1 \div (1 \div (\phi(x_1, \dots, x_n) + \chi(x_1, \dots, x_n)))$ (或は $Sg(\phi(x_1, \dots, x_n) + \chi(x_1, \dots, x_n))$).

これらの特性函数がすべて、 ϕ , もしくは ϕ 及び χ において初等回帰なることは明かである。

他の二つの述語 $Q \rightarrow R$ 及び $Q \equiv R$ に対しては、命題論理の法則を適用して夫々 $\overline{Q} \vee R$ 及び $(\overline{Q} \vee R) \& (R \vee \overline{R})$ と変形すれば、上記の証明を適用できる。

定理 §1-1-4.

述語 $(\exists y)_{y < z} R(x_1, \dots, x_n, y)$, $(y)_{y < z} R(x_1, \dots, x_n, y)$ (所謂制限量化子) 及び $(\forall y)_{y < z} R(x_1, \dots, x_n, y)$ (最小量化子、即ち $R(x_1, \dots, x_n, y)$ の値が T である如き

(証明)

$\chi(x_1, \dots, x_n, y)$ を $R(x_1, \dots, x_n, y)$ の特性函数とする。そのとき $\prod \chi(x_1, \dots, x_n, y)$

定理 §1—1—5.

次のように定義される函数:

(181)

(但し、 $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ はどの二つも共に T となることはない述語であるとする)
は $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}, Q_1, \dots, Q_m$ において初等回帰である。

(証明)

述語 $Q_1, \dots, Q_m$ の特性函数を夫々 $\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)$ とすれば、函数 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ は次のようにかくことができる。

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \overline{Sg}(\phi_1(x_1, \dots, x_n)) \cdot \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \overline{Sg}(\phi_m(x_1, \dots, x_n)) \cdot \varphi_m(x_1, \dots, x_n) + \phi_1(x_1, \dots, x_n) \cdot \dots \cdot \phi_m(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi_{m+1}(x_1, \dots, x_n).$$

この函数は明かに与えられた条件を満足し、且つ $\phi_1, \dots, \phi_m, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}$ において初等回帰である。従つて $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ は $Q_1, \dots, Q_m, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}$ において初等回帰である。

以上の初等回帰述語に関する定理の他に、後の考察に重要な役割を演ずる若干の初等回帰函数及び述語を、前出の表に附け加えておく必要がある。先づ二数間の相等性及び大小関係を初等回帰函数としてかき表わす。

$$(xix) \quad a = b \quad Sg(a \div b)$$

$$(xx) \quad a < b \quad Sg(a' \div b)$$

$$(xxi) \quad a \mid b \equiv_{df} b \text{ は } a \text{ で割り切れる } (Ec)_{c < b} [ac = b]$$

次に与えられる述語及び函数は、所謂形式的理論の Gödel 化、即ち、形式的体系内の対象と自然数との間の対応関係を導入する場合に要求されるものであるが、その意味は第 4 章において明かにされる。こゝではとりあえず、次の数論の定理をあげ、これに基づいて規定されるいくつかの述語を列記するに止める。任意の自然数 a が与えられた場合、我々は常にこれを、幾つかの素数の積としてかき表わすことができる。即ち (I) $a = p_0^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}$. ここで $p_0, p_1, \dots, p_i$ は、素数を小なるものから並べたもの、つまり、 $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$ を表わすものとする。 $a_0, a_1, \dots, a_i$ は素数 $p_0, p_1, \dots, p_i$ がこの表示で何度現れるかという度数、即ち、冪を示す、もし p_i が一度も現われぬならば $a_i = 0$. 我々はこの方法によつて任意の自然数をユニツクな素数冪の積として表示することができる。この表示に関する述語を導入すれば次の様になる。

$$(xxii) \quad Pr(a) \equiv_{df} a \text{ は素数である} \quad a > 1 \ \& \ (\overline{Ec})_{1 < c < a} (c \mid a)$$

$$(xxiii) \quad p_i \equiv_{df} i+1 \text{ 番目の素数} \quad \begin{cases} p_0 = 2 \\ p_{i'} = \mu x_{p_i < x \leq p_i! + 1} Pr(x) \end{cases}$$

$$(xxiv) \quad (a)_i \equiv_{df} \begin{cases} \text{もし } a \neq 0 \text{ ならば} \\ \text{(I) における } P_i \text{ の冪; } \mu x_{x < a} [p_i^x \mid a \ \& \ \overline{p_i^{x'} \mid a}] \\ \text{もし } a = 0 \text{ ならば, } 0. \end{cases}$$

$$(xxv) \quad Ih(a) \equiv a_f \begin{cases} \text{もし } a \neq 0 \text{ ならば} \\ (I) \text{ における } 0 \text{ でない} \\ \text{素をもつ素数の個数;} \\ \text{もし } a=0 \text{ ならば、} 0. \end{cases} \begin{cases} Ih(0, a) = 0, \\ Ih(i', a) = \begin{cases} Ih(i, a) + 1, & p_i | a \text{ のとき;} \\ Ih(i, a), & \text{その他の場合,} \end{cases} \\ Ih(a) = Ih(a, a) \end{cases}$$

$$(xxvi) \quad a * b = a \cdot \prod_{i < Ih(b)} p_{Ih(a)+i}^{(b)_i}$$

これら函数及び述語がそれぞれ初等回帰であることはその形から明かであるが、(xxiii) の p_i の定義について一言しておく必要がある。ユークリッドの定理により、いかなる素数 p に対しても p より大で $p! + 1$ よりも小な素数の存在することが知られている。この結果を用いれば与えられた定義の意味は明かである。

以上で初等回帰函数及び述語の定義と、以下の研究に必要な例及びそれらに関する定理との敘述を終ることにする。

註 1. この節については、Gödel [1] §2, Skolem [1], L'Abbé [1] §2. 特に Péter [10] §1, 2, Kleene [13] §43-45, Hilbert-Bernays [1] §7, pp. 307-316 を参照。こゝでは Kleene のいう base (B) を採用する。彼の [13] Chap. IX の方法とは (II) においてわづかに異なる。これについては、Kleene [13] Chap. IX, p. 238 Remark を参照。尚、回帰函数を functional として定義する方が形式的にはより整い、且つ部分回帰函数への拡張に便利であると思われるが、こゝではより直観的に近づき安いこの形を採用した。

第2節 初等回帰函数に還元可能な他の定義図式

第1節で初等回帰函数の定義と若干の例を与えたが、一見初等回帰函数より複雑な図式によつて定義されているように見えても、我々は常に初等回帰函数として定義し直すことのできる函数、或は函数を定義する図式—上述の初等回帰函数の定義図式 (I) — (V) と同じ意味で — が存在する。その中でも重要な若干の図式を以下に挙げ、それが初等回帰函数の定義図式に還元される一般的方法を述べることにする。

これら初等回帰図式に還元可能な図式の中で最も重要なのは、次の走値的回帰 (Course-of-values recursion, Wertverlaufsrekursion, recursion (simple) adhérente) の図式である。

(I) 走値的回帰¹⁾

次のような定義図式によつて定義される函数を走値的回帰函数とよぶ。

$$\begin{cases} \varphi(0, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_2, \dots, x_n), \\ \varphi(y', x_2, \dots, x_n) = \chi(y, \prod_{i < y} p_i \varphi(i, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

この定義図式に現れる函数、 $\prod_{i < y} p_i \varphi(i, x_2, \dots, x_n)$ を、 $\tilde{\varphi}(y; x_2, \dots, x_n)$ とおけば、一般に $\tilde{\varphi}(y; x_2, \dots, x_n)$ は $\varphi(y, x_2, \dots, x_n)$ の走値函数とよばれる。それは $\varphi(y, x_2, \dots, x_n)$ の値が単に $\varphi(y-1, x_2, \dots, x_n)$ によつて規定されるばかりでなく y より小なる i における $\varphi(i, x_2, \dots, x_n)$ によつて規定されているからである。それ故 $\tilde{\varphi}(y; x_2, \dots, x_n)$ を用いれば、上の図式は

$$\begin{cases} \varphi(0, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_2, \dots, x_n), \\ \varphi(y', x_2, \dots, x_n) = \chi(y, \tilde{\varphi}(y; x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

となる。

このような函数 $\varphi(y, x_2, \dots, x_n)$ が初等回帰なることは次の考察から明らかである。今 $\tilde{\varphi}(y; x_2, \dots, x_n)$ を次の如く定義する：

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(0; x_2, \dots, x_n) = 1, \\ \tilde{\varphi}(y'; x_2, \dots, x_n) = \tilde{\varphi}(y; x_2, \dots, x_n) \cdot p_y \chi(y-1, \tilde{\varphi}(y-1, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \\ \quad = \tilde{\varphi}(y; x_2, \dots, x_n) \cdot p_y \varphi(y, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

このとき前節の (xxiv) から明らかに

$$\varphi(y, x_2, \dots, x_n) = (\tilde{\varphi}(y'; x_2, \dots, x_n))_y.$$

しかるに $\tilde{\varphi}(y; x_2, \dots, x_n)$ は $\chi(y, z, x_2, \dots, x_n)$ において初等回帰であるから、 $\varphi(y, x_2, \dots, x_n)$ も ψ 及び χ において初等回帰であることが証明される。

(II) 同時的回帰²⁾

次のような定義図式で与えられる函数も初等回帰なることが証明される。

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \\ \varphi_1(x') = \theta_1(\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \\ \varphi_2(x') = \theta_2(\varphi_1(x), \varphi_2(x)). \end{cases}$$

このような二つの函数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ はそれぞれが同時にそれぞれの値を規定しているから、同時的回帰 (simultaneous recursion, simultane Rekursion, récursion simultanée) と名づける。

今これらの函数が一つの函数 $\varphi(x)$ に還元されうることを示すために、次のような函数をとるとする。

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_1(0) = 0, \\ \varphi(1) &= \varphi_2(0) = 0, \\ \varphi(2) &= \varphi_1(1) = \theta_1(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = \theta_1(\varphi(0), \varphi(1)), \\ \varphi(3) &= \varphi_2(1) = \theta_2(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = \theta_2(\varphi(0), \varphi(1)), \\ \varphi(4) &= \varphi_1(2) = \theta_1(\varphi_1(1), \varphi_2(1)) = \theta_1(\varphi(2), \varphi(3)), \\ \varphi(5) &= \varphi_2(2) = \theta_2(\varphi_1(1), \varphi_2(1)) = \theta_2(\varphi(2), \varphi(3)), \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

これをまとめてかくと、

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \\ \varphi(x') &= \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ のとき;} \\ \theta_1(\varphi(x \div 1), \varphi(x)), & x > 0 \text{ で } x \text{ が奇数のとき;} \\ \theta_2(\varphi(x \div 2), \varphi(x \div 1)), & x > 0 \text{ で } x \text{ が偶数のとき.} \end{cases} \end{aligned}$$

ところがこの定義に現れる諸条件は次のように書き表わすことができる。即ち、 $x > 0$ は $1 \div x = 0$ によつて、 x が偶数というのは $rm(x, 2) = 0$, x が奇数というのは $rm(x, 2) = 1$. 従つて

$$\overline{Sg}((1 \div x) + rm(x', 2)) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ で } x \text{ が奇数のとき;} \\ 0, & \text{他の場合.} \end{cases}$$

更に

$$\overline{Sg}((1 \div x) + rm(x, 2)) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ で } x \text{ が偶数のとき;} \\ 0, & \text{他の場合.} \end{cases}$$

この函数を用いると $\varphi(x)$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = \overline{Sg}((1 \div x) + rm(x', 2)) \cdot \theta_1(\varphi(x \div 1), x) \\ \quad + \overline{Sg}((1 \div x) + rm(x, 2)) \cdot \theta_2(\varphi(x \div 2), \varphi(x \div 1)). \end{cases}$$

今、第2式の右辺を簡単化して、 $\chi(x, \varphi(x \div 2), \varphi(x \div 1), \varphi(x))$ とかくと、上の二式は

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = \chi(x, \varphi(x \div 2), \varphi(x \div 1), \varphi(x)). \end{cases}$$

ところが前節(I)の走値函数をとると

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(0) = 1, \\ \tilde{\varphi}(x') = \tilde{\varphi}(x) \cdot p_x \varphi(x). \end{cases}$$

上の第2式は

$$\varphi(x') = \chi(x, (\tilde{\varphi}(x))_{x+2}, (\tilde{\varphi}(x))_{x+1}, (\tilde{\varphi}(x))_x).$$

こゝで

$$\alpha(x, a) = \chi(x, (a)_{x+2}, (a)_{x+1}, (a)_x)$$

とおけば

$$\varphi(x') = \alpha(x, \tilde{\varphi}(x)).$$

上の $\tilde{\varphi}(x)$ の定義の第2式は

$$\tilde{\varphi}(x') = \tilde{\varphi}(x) \cdot p_x \alpha(x, \tilde{\varphi}(x)).$$

こゝで $\alpha(x, a)$ は χ において、従つて θ_1, θ_2 において初等回帰であるから、 $\tilde{\varphi}(x)$ も同様。よつて $\varphi(x)$ も θ_1, θ_2 において初等回帰となる。

ところが $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ は、夫々

$$\varphi_1(x) = \varphi(2x),$$

$$\varphi_2(x) = \varphi((2x)')$$

と定義しうるから、 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ もまた θ_1, θ_2 において初等回帰である。

同様にしてより一般的な次の形の函数も、走值的回帰を用いることによつて初等回帰に還元しうる事が証明される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(0, x_2, \dots, x_n) = \psi_1(x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_k(0, x_2, \dots, x_n) = \psi_k(x_2, \dots, x_n), \\ \varphi_1(y', x_2, \dots, x_n) = \theta_1(y, \varphi_1(y_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(y, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_k(y', x_2, \dots, x_n) = \theta_k(y, \varphi_1(y, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(y, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n). \end{array} \right.$$

(Ⅲ) 挿入回帰³⁾

次のような図式によつて定義される函数は、初等回帰函数の定義図式においてはパラメーターとして現れる x の代りに、函数 $\gamma(y, x)$ が現れている点に特徴がある。

$$(D_1) \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0, x) = \psi(x), \\ \varphi(y', x) = \chi(y, x, \varphi(y, \gamma(y, x))). \end{array} \right.$$

この函数がどんな値をとるかを調べてみると、

$$\begin{aligned} \varphi(0, x) &= \psi(x), \\ \varphi(1, x) &= \chi(0, x, \varphi(0, \gamma(0, x))), \\ \varphi(2, x) &= \chi(1, x, \varphi(1, \gamma(1, x))), \\ \varphi(3, x) &= \chi(2, x, \varphi(2, \gamma(2, x))), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

したがつて $\varphi(y', x)$ の値を得るためには $\varphi(y, \gamma(y, x))$ の値を知らねばならぬが、この値は、

$$\begin{aligned} \varphi(0, \gamma(0, x)) &= \psi(\gamma(0, x)), \\ \varphi(1, \gamma(1, x)) &= \chi(0, \gamma(1, x), \varphi(0, \gamma(0, \gamma(1, x)))) \\ &= \chi(0, \gamma(1, x), \psi(\gamma(0, \gamma(1, x))))), \\ \varphi(2, \gamma(2, x)) &= \chi(1, \gamma(2, x), \chi(0, \gamma(1, \gamma(2, x)), \varphi(0, \gamma(0, \gamma(1, \gamma(2, x)))))) \\ &= \chi(1, \gamma(2, x), \chi(0, \gamma(1, \gamma(2, x)), \psi(\gamma(0, \gamma(1, \gamma(2, x)))))), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

となる。それ故上の $\varphi(y, x)$ の値は

$$\varphi(0, x) = \psi(x),$$

$$\begin{aligned}\varphi(1, x) &= \chi(0, x, \phi(\gamma(0, x))), \\ \varphi(2, x) &= \chi(1, x, \chi(0, \gamma(1, x), \phi(\gamma(0, \gamma(1, x))))), \\ \varphi(3, x) &= \chi(2, x, \chi(1, \gamma(2, x), \chi(0, \gamma(1, \gamma(2, x)), \phi(\gamma(0, \gamma(1, \gamma(2, x)))))), \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

となる。即ち函数 $\varphi(y, x)$ の特徴は、 χ, ϕ, γ の x の位置に $\gamma(y-1, x), \gamma(1, \gamma(2, \dots, \gamma(y-1, x))\dots)$ 及び $\gamma(0, \gamma(1, \dots, \gamma(y-1, x))\dots)$ が現れることである。この種の函数 $\varphi(y, x)$ を挿入回帰と呼ぶことにすれば、この挿入回帰も初等回帰であることを次に示す。

先づ次のように函数 $\varphi_1(y, x)$ を定義する、

$$\varphi_1(y, x) = \varphi(y, \gamma(y, x)).$$

函数 $\varphi_1(y, x)$ を用いれば (D_1) は次の通りに書ける、

$$(D_2) \quad \begin{cases} \varphi(0, x) = \phi(x), \\ \phi(y', x) = \chi(y, x, \varphi_1(y, x)). \end{cases}$$

ところが、函数 $\delta(z, y, x)$ を次のように定義する、

$$\begin{cases} \delta(0, y, x) = x, \\ \delta(z', y, x) = \gamma(y \div z', \delta(z, y, x)). \end{cases}$$

これを用いると、 $\varphi_1(y, x)$ は

$$\varphi_1(y, x) = \begin{cases} \phi(\delta(y, y, x)), & y=0 \text{ のとき;} \\ \chi(y \div 1, \gamma(y, x), \phi(\delta(y, y, x))), & y > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義しうるが、 $\delta(z, y, x)$ は初等回帰であるから、 $\varphi_1(y, x)$ は ϕ, χ, γ において初等回帰である。

更に次のような値をとる函数 $\theta(y, x)$ を定義する。

$$\begin{aligned}\theta(0, x) &= \phi(x), \\ \theta(1, x) &= \varphi_1(0, x), \\ \theta(2, x) &= \varphi(1, x) = \chi(0, x, \varphi_1(0, x)) = \chi(0, x, \theta(1, x)), \\ \theta(3, x) &= \varphi_1(1, x), \\ \theta(4, x) &= \varphi(2, x) = \chi(1, x, \varphi_1(1, x)) = \chi(1, x, \theta(3, x)), \\ \theta(5, x) &= \varphi_1(2, x), \\ \theta(6, x) &= \varphi(3, x) = \chi(2, x, \varphi_1(2, x)) = \chi(2, x, \theta(5, x)), \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

即ち、次のような $\theta(y, x)$ の定義を与えることができる。

$$(D_3) \quad \begin{cases} \theta(0, x) = \phi(x), \\ \theta(y', x) = \begin{cases} \varphi_1([y/2], x), & y \text{ が偶数のとき;} \\ \chi([y/2], x, \theta(y, x)), & y \text{ が奇数のとき.} \end{cases} \end{cases}$$

それ故既知の回帰函数を用いると、 $\theta(y', x)$ は次のように書き直すことができる。

$$\theta(y', x) = \varphi_1([y/2], x) \cdot \overline{Sg}(2|y) + \chi([y/2], x, \theta(y, x)) \cdot Sg(2|y)$$

函数 $\theta(y, x)$ を用いれば明らかに、

$$\varphi(y, x) = \theta(2y, x)$$

また $\varphi_1(y, x) = \varphi(y, \gamma(y, x)) = \theta(2y, \gamma(y, x))$.

更に $\theta(y, x)$ の走値函数 $\tilde{\theta}(y, x)$ をとれば、

$$\tilde{\theta}(y, x) = p_0^{\theta(0, x)} \cdot p_1^{\theta(1, x)} \cdot \dots \cdot p_y^{\theta(y, x)}.$$

$k \leq x$ なる k に対しては、

$$\theta(k, x) = (\tilde{\theta}(y, x))_k.$$

それ故今函数 $\alpha(y, x, a)$ を次の如く定義するとする、

$$\alpha(y, x, a) = \varphi_1([y/2], x) \cdot \overline{Sg}(2|y) + \chi([y/2], x, (a)_v) \cdot Sg(2|y).$$

そのとき

$$\theta(y', x) = \alpha(y, x, \tilde{\theta}(y, x)).$$

更に次のような函数、

$$\beta(y', x, b) = b \cdot p_{y'}^{\alpha(y, x, b)}$$

をとれば、

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(y', x) &= \tilde{\theta}(y, x) \cdot p_{y'}^{\theta(y, x)} = \tilde{\theta}(y, x) \cdot p_{y'}^{\alpha(y, x, \tilde{\theta}(y, x))} \\ &= \beta(y, x, \tilde{\theta}(y, x)). \end{aligned}$$

従つて

$$\theta(y, x) = (\beta(y, x, \tilde{\theta}(y, x)))_v.$$

それ故 $\theta(y, x)$ は $\beta(y, x, b)$ において、即ち $\alpha(y, x, a)$ において、更にいゝかえれば、 $\chi(y, x, a)$ と $\varphi_1(y, x)$ において初等回帰である。しかるに $\varphi_1(y, x)$ は ψ, χ において初等回帰であるから、 θ も亦同様である。よつて φ も亦 ψ, χ において初等回帰となる。

この証明は次の一般的な場合に拡張することができる。

$$\varphi(0, x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1, \dots, x_n),$$

$$\varphi(y', x_1, \dots, x_n) = \beta(y, x_1, \dots, x_n, \varphi(y, \gamma_{11}(y, x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_{1n}(y, x_1, \dots, x_n)),$$

$$\varphi(y, \gamma_{21}(y, x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_{2n}(y, x_1, \dots, x_n)), \dots,$$

$$\varphi(y, \gamma_{k1}(y, x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_{kn}(y, x_1, \dots, x_n))).$$

(IV) 二重回帰⁴⁾

次のような図式によつて定義される函数 $\varphi(x, y)$ を我々は二重回帰函数とよぶ。

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = \phi_1(y), \\ \varphi(x, 0) = \phi_2(x), \\ \varphi(x', y') = \alpha(x, y, \varphi(x, \beta(x, y)), \varphi(x', y)). \end{cases}$$

但し、 $\beta(x, y) \leq y$ とする。

この函数の特徴は $\varphi(x', y')$ の値が $\varphi(x, \beta(x, y))$ のみならず、 $\varphi(x', y)$ にも依存していることである。このような函数 $\varphi(x, y)$ も亦初等回帰函数なることを次に示そう。

先づ、次のように走値函数 $\theta(x, y)$ を定義する。

$$\theta(x, y) = \prod_{i \leq y} p_i^{\varphi(x, i)}$$

そのとき

$$\theta(0, y) = \prod_{i \leq y} p_i^{\varphi(0, i)} = \prod_{i \leq y} p_i^{\phi_1(i)},$$

$$\begin{aligned} \theta(x', 0) &= \prod_{i \leq 0} p_i^{\varphi(x', i)} = p_0^{\varphi(x', 0)} \\ &= 2^{\phi_2(x')}. \end{aligned}$$

また $u \geq y$ なる u に対しては、

$$\varphi(x, y) = (\theta(x, u))_y,$$

$$\begin{aligned} \theta(x', y') &= \theta(x', y) \cdot p_{y'}^{\varphi(x', y')} \\ &= \theta(x', y) \cdot p_{y'}^{\alpha(x, y, (\theta(x, u))_{\beta(x, y)}, (\theta(x', u))_y)} \end{aligned}$$

(このとき、明らかに $u \geq \beta(x, y)$ である)。それ故、この $\theta(x, y)$ は一般に次の如く定義することができる。

$$\begin{cases} \theta(0, y) = \prod_{i \leq y} p_i^{\phi_1(i)}, \\ \theta(x', 0) = 2^{\phi_2(x')}, \\ \theta(x', y') = \delta(x, y, \theta(x, u), \theta(x', y)). \end{cases}$$

但し、 $\delta(x, y, \theta(x, u), \theta(x', y))$

$$= \theta(x', y) \cdot p_{y'}^{\alpha(x, y, (\theta(x, u))_{\beta(x, y)}, (\theta(x', u))_y)}$$

とする。

それ故 $u \geq \beta(x, y-1)$, 従つて $u \geq \beta(x, y) + \beta(x, y-1)$ なる u に対しては、

$$\theta(x', y) = \delta(x, y-1, \theta(x, u), \theta(x', y-1)) \quad \text{である。}$$

従つて、

$$(1) \quad \theta(x', y') = \delta(x, y, \theta(x, u), \delta(x, y-1, \theta(x, u), \theta(x', y-1))).$$

次に一般に $v \leq y$ なる v に対して $\theta(x', y')$ は次の形をとることを数学的帰納法によつて示そう。

$$(2) \quad \theta(x', y') = \delta_v(x, y, \theta(x, u), \theta(x', y-v)),$$

但しこゝで $u \geq \sum_{i=0}^y \beta(x, y-i)$ とする。

今 $v=0$ に対しては

$$\delta_0(x, y, w_1, w_2) = \delta(x, y, w_1, w_2)$$

なることは、上の $\theta(x', y')$ の定義から明らかである、勿論 $w_1 = \theta(x, u)$, $w_2 = \theta(x', y-v)$ なるものとする。

$v=1$ に対しては

$$\delta_1(x, y, w_1, w_2) = \delta(x, y, w_1, \delta(x, y-1, w_1, w_2))$$

なることも (1) より明らかである。

今、 $v < y$ なる v に対して $\delta_v(x, y, w_1, w_2)$ が既知とし、(2) が成立するものと仮定すれば、 $\theta(x, y)$ の定義の第3式から

$$\theta(x', y-v) = \delta(x, y-v', \theta(x, u), \theta(x', y-v'))$$

但し $u \geq \beta(x, y-v')$ とする。従つて、(2) が成立するという假定から、

$$\theta(x', y') = \delta_v(x, y, \theta(x, u), \delta(x, y-v', \theta(x, u), \theta(x', y-v'))).$$

もし

$$\delta_{v'}(x, y, w_1, w_2) = \delta_v(x, y, w_1, \delta(x, y-v' w_1, w_2))$$

とおけば、(2) は v' に対しても成立する。従つて、もし $\delta_v(x, y, w_1, w_2)$ が次のように定義されるならば、(2) は $v \leq y$ なるすべての v に対して成立し、且つ δ , 従つて α, β において初等回帰である。

$$\begin{cases} \delta_0(x, y, w_1, w_2) = \delta(x, y, w_1, w_2), \\ \delta_{v'}(x, y, w_1, w_2) = \delta_v(x, y, w_1, \delta(x, y-v', w_1, w_2)). \end{cases}$$

特に (2) は $v=y$ に対しても成立する。しかるに $\theta(x', 0) = 2^{\phi_2(x')}$ なる故、

$u = 1 + \sum_{i=0}^y \beta(x, y-i) = 1 + \sum_{i=0}^y \beta(x, i)$ に対しても (2) は成立して、

$$\theta(x', y') = \delta_y(x, y, \theta(x, 1 + \sum_{i=0}^y \beta(x, i)), 2^{\phi_2(x')})$$

とかきうる。それ故、次のように函数 $\chi(x, y)$ を定義すれば、

$$\begin{cases} \chi(0, y) = \phi_1(y), \\ \chi(x', y) = \delta_y(x, y, \chi(x, \sum_{i=0}^y \beta(x, i)), 2^{\phi_2(x')}), \end{cases}$$

この函数は $\alpha, \beta, \phi_1, \phi_2$ において初等回帰である。この函数 $\chi(x, y)$ を用いれば、

$$\theta(x, y) = \begin{cases} 2^{\phi_2(x')}, & y=0 \text{ のとき;} \\ \chi(x, y+1), & \text{その他のとき,} \end{cases}$$

及び

$$\varphi(x, y) = (\theta(x, y))_y$$

の如く定義することができるが、このとき、 $\theta(x, y)$ 及び $\varphi(x, y)$ は共に $\chi(x, y)$,

$\phi_2(x')$ において、従つて $\alpha(x, y, u, w)$, $\beta(x, y)$, $\phi_1(y)$, $\phi_2(x)$ において初等回帰である。

我々は、この証明を次のような一般的な場合に拡張することができる。即ち

$$\begin{aligned}\varphi(0, x_2, \dots, x_k) &= \alpha_1(x_2, \dots, x_k) \\ \varphi(x_1', 0, x_3, \dots, x_k) &= \alpha(x_1, x_3, \dots, x_k), \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(x_1', x_2', \dots, x_{k-1}', 0) &= \alpha_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}), \\ \varphi(x_1', x_2', \dots, x_k') &= \beta(x_1, x_2, \dots, x_k, \varphi_1, \dots, \varphi_k),\end{aligned}$$

但し、 $i = 1, 2, \dots, k$ に対して

$$\varphi_i = \varphi(x_1', \dots, x_{i-1}', x_i, \gamma^{(i)}(x_1, \dots, x_k), \dots, \gamma_{k-i}^{(i)}(x_1, \dots, x_k))$$

の如く定義される函数 $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ も初等回帰である。

註 1. これについては、Péter [2] §1, [10] §3. Kleene [13] §46. Hilbert u. Bernays [1] §7, pp. 326-327 参照。

註 2. Péter [10] §4. Hilbert u. Bernays [1] §7, pp. 320-321, pp. 328-329 を参照。

註 3. Péter [2] §2, [10] §5, 一般的なケースの証明については、Péter [2] §2 参照。

註 4. Péter [5] §3, [10] §6, 一般的なケースの証明については、Péter [5] §3 参照。

第3節 定義の単純化

我々は第1節に与えた定義に従つて、いかなる函数が初等回帰であるかという問題をとり扱つてきた。しかしながら第1節の定義に関しては、そこにあげられた定義図式のすべてが、果してすべての初等回帰函数よりなる集合を与えるのに不可欠であるかどうかという問題が生ずる。事実次の考察の示すように、我々は原初函数の定義を拡張し、その数をふやすことによつて第1節に与えられた定義図式のあるものを省略しても、第1節の意味で定義された初等回帰函数のすべてを得ることができる。この節では、かゝる意味での初等回帰函数の定義の単純化の問題をとり扱うこととする。

先づ、二つの自然数の順序集合 (x, y) と自然数の集合との一意写像として、次のような函数を定義するとする。

$$\begin{aligned}\iota(x, y) &= z, \\ \kappa(z) &= x, \text{ 及び } \lambda(z) = y.\end{aligned}$$

このような函数、 ι, κ, λ を用いれば、我々は $n-1$ 個のパラメーターをもつ定義図式

(Vb) を容易に 1 個のパラメーターをもつ次の定義図式に還元することができる。

$$(Vb') \quad \begin{cases} \varphi(0, x) = \psi(x), \\ \varphi(y', x) = \chi(y, \varphi(y, x), x). \end{cases}$$

今例としてふたつのパラメーター x, y をもつ函数 $\varphi(z, x, y)$ が、次のように定義されているとする。

$$\begin{cases} \varphi(0, x, y) = \alpha(x, y), \\ \varphi(z', x, y) = \beta(z, \varphi(z, x, y), x, y). \end{cases}$$

函数 κ, λ を用いて次の函数を定義すると、

$$\psi(z, x) = \varphi(z, \kappa(x), \lambda(x)).$$

この函数は、

$$\begin{aligned} \psi(0, x) &= \varphi(0, \kappa(x), \lambda(x)) = \alpha(\kappa(x), \lambda(x)) \\ \psi(z', x) &= \varphi(z', \kappa(x), \lambda(x)) \\ &= \beta(z, \varphi(z, \kappa(x), \lambda(x)), \kappa(x), \lambda(x)) \\ &= \beta(z, \psi(z, x), \kappa(x), \lambda(x)). \end{aligned}$$

$\psi(z, x)$ は明らかに β, κ, λ において初等回帰である。更に $\varphi(z, x, y)$ は ϵ を用いることによつて、次の如くに得られる。

$$\begin{aligned} \varphi(z, x, y) &= \varphi(z, \kappa(\epsilon(x, y)), \lambda(\epsilon(x, y))) \\ &= \psi(z, \epsilon(x, y)). \end{aligned}$$

従つて、我々は定義図式 (IV), (Vb') 及び $\epsilon, \kappa, \lambda$ を用いることによつて、 $\varphi(z, x, y)$ を定義することができる。パラメーターが 2 個以上の場合についても全く同様な手続きをくり返せばよい。

我々が函数 $\epsilon, \kappa, \lambda$ を用いるならば、図式 (Vb') 中のパラメーター x をも追いつだして、図式 (Va) に還元することもできる。即ち、函数 $\varphi_1(y, x)$ を次の如く定義すると、

$$\varphi_1(y, x) = \epsilon(x, \varphi(y, x)),$$

明らかに

$$x = \kappa(\varphi_1(y, x)), \quad \varphi(y, x) = \lambda(\varphi_1(y, x))$$

である。そのとき (Vb') の x の代りに $\kappa(\varphi_1(y, x))$, $\varphi(y, x)$ の代りに $\lambda(\varphi_1(y, x))$ とかくことができる。しかるに $\varphi_1(y, x)$ は、

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, x) &= \epsilon(x, \varphi(0, x)) = \epsilon(x, \psi(x)) \\ \varphi_1(y', x) &= \epsilon(x, \varphi(y', x)) = \epsilon(x, \chi(y, \varphi(y, x), x)) \\ &= \epsilon(\kappa(\epsilon(x, \varphi(y, x))), \chi(y, \lambda(\epsilon(x, \varphi(y, x))), \kappa(\epsilon(x, \varphi(y, x)))) \\ &= \epsilon(\kappa(\varphi_1(y, x)), \chi(y, \lambda(\varphi_1(y, x))), \kappa(\varphi_1(y, x))). \end{aligned}$$

従つて次の函数を定義すると、

$$\phi_1(x) = \epsilon(x, \phi(x)),$$

$$\chi_1(y, x) = \epsilon(\kappa(x), \chi(y, \lambda(x), \kappa(x))),$$

ϕ_1 及び χ_1 はそれぞれ、 ϕ, ϵ 及び $\chi, \epsilon, \kappa, \lambda$ において初等回帰である。そしてこれらの函数を用いることによつて次の図式を得る。

$$(A) \quad \begin{cases} \varphi_1(0, x) = \phi_1(x) \\ \varphi_1(y', x) = \chi_1(y, \varphi_1(y, x)). \end{cases}$$

我々は、更に、図式 (A) の第一式の右辺が、より簡単な次の図式 (B) によつて定義される函数 $\varphi_2(y, x)$ から、 $\varphi_1(y, x)$ を定義することができる。

$$(B) \quad \begin{cases} \varphi_2(0, x) = x, \\ \varphi_2(y', x) = \chi_1(y, \varphi_2(y, x)). \end{cases}$$

即ちこの函数を用いると、

$$\varphi_1(y, x) = \varphi_2(y, \phi_1(x))$$

なる関係を得る。事実、

$$\varphi_1(0, x) = \phi_1(x) = \varphi_2(0, \phi_1(x)),$$

$$\varphi_1(y', x) = \chi_1(y, \varphi_1(y, x)) = \chi_1(y, \varphi_2(y, \phi_1(x))) = \varphi_2(y', \phi_1(x))$$

である。

以上の結果から、図式 (B) 中のパラメーター x を追いだすことができればよい。それには、 $\kappa, \lambda, \epsilon$ を用いて、

$$\theta(y) = \varphi_2(\kappa(y), \lambda(y))$$

を定義すれば、

$$\theta(0) = \varphi_2(\kappa(0), \lambda(0)),$$

もし、 $\kappa(0) = \lambda(0) = 0$ ならば、明らかに、

$$\theta(0) = \varphi_2(0, 0) = 0.$$

次に $\theta(y)$ の定義を求めると、(B) から

$$\theta(y') = \varphi_2(\kappa(y'), \lambda(y')) = \begin{cases} \lambda(y'), & \kappa(y') = 0 \text{ のとき;} \\ \chi_1(\kappa(y')-1, \varphi_2(\kappa(y')-1, \lambda(y'))), & \text{その他のとき.} \end{cases}$$

今、我々は $\theta(y)$ を初等回帰として定義しようとするのであるから、 κ, λ を x のより小さい値によつて決定されるように、次の如くにとる。

(a) $\kappa(y') \neq 0$ に対しては、 $\kappa(y')-1 = \kappa(y)$ 及び $\lambda(y') = \lambda(y)$ 。

そのとき $\kappa(y) \neq 0$ に対しては、

$$\varphi_2(\kappa(y')-1, \lambda(y')) = \varphi_2(\kappa(y), \lambda(y)) = \theta(y).$$

それ故、もし次の如き函数をとれば、

$$\chi_2(y, x) = \begin{cases} \lambda(y'), & \kappa(y') = 0 \text{ のとき;} \\ \chi_1(\kappa(y')-1, x), & \text{その他のとき.} \end{cases}$$

$\chi_2(y, x)$ は χ_1, κ, λ において初等回帰であり、 $\theta(y)$ は次の如く定義される。

$$(C) \quad \begin{cases} \theta(0) = 0, \\ \theta(y') = \chi_2(y, \theta(y)). \end{cases}$$

この図式は図式 (Va) の特殊な形、即ち $q = 0$ である。 $\varphi_2(y, x)$ は $\theta(y)$ から次の如く定義される。 $\varphi_2(y, x) = \varphi_2(\kappa(\iota(y, x)), \lambda(\iota(y, x))) = \theta(\iota(y, x))$ 。以上の考察から、我々は次の定理を得る。

定理 §1-3-1.

もし原初函数に上記の制限をもつ函数 $\iota(x, y), \kappa(x), \lambda(x)$ をつけ加えるならば、定義図式 (Vb) を省いて、定義図式 (I)-(Va) のみによつてすべての初等回帰函数を定義し得る。

それ故次の問題は函数 $\iota(x, y), \kappa(x), \lambda(x)$ がどのようにして定義され得るかである。そのために上記の考察中でこれらの函数に課せられた条件をあげてみると、

$$(1) \quad \kappa(\iota(x, y)) = x, \quad (2) \quad \lambda(\iota(x, y)) = y,$$

及び (a) から、 $\kappa(z') \neq 0$ に対しては、

$$(3) \quad \kappa(z') - 1 = \kappa(z), \quad (4) \quad \lambda(z') = \lambda(z).$$

既に前にあげた初等回帰函数の表の中に、条件 (3) を充たすものを見出すことができる。即ち、もし z' が平方数でなければ、 $\text{quadres}(z') \neq 0$ で、 $[\sqrt{z'}] = [\sqrt{z}]$ であるから、

$$\begin{aligned} \text{quadres}(x) &= z \div [\sqrt{z}]^2 = z - [\sqrt{z}]^2 = z - [\sqrt{z'}]^2 \\ &= z' - [\sqrt{z'}]^2 - 1 = (z' - [\sqrt{z'}]^2) - 1 \\ &= \text{quadres}(z') - 1. \end{aligned}$$

(4) に課せられた条件 $\kappa(z') \neq 0$ からして、 $\lambda(z')$ は、 z' が平方数でないという条件を充たさねばならない。従つてもし、 λ が $[\sqrt{z}]$ に依存する函数として定義されたとすれば、 z' が平方数でないときは、 $\lambda(z') = \lambda(z)$ となしうるのであろう。それ故このような $\lambda(z)$ を定義すればよい。しかし、今 $\lambda(z)$ を定義する前に先づ $\iota(y, z)$ を求めることとしよう。

もし

$$\iota(y, x) = ((y+x)^2 + x)^2 + y$$

とすれば、 $((y+x)^2 + x)^2 + y$ (即ち $\iota(y, x)$) と、 $[\sqrt{((y+x)^2 + x)^2 + y}]^2$ (即ち、 $[\sqrt{\iota(y, x)}]^2$) との差は y となる。何故なら、 $\iota(y, x)$ が平方数でない限り、 $((y+x)^2 + x)^2 = ((y+x)^2 + x)^2 + 2(y+x)^2 + 2x + 1 > ((y+x)^2 + x)^2 + y \geq ((y+x)^2 + x)^2$ であるから。

それ故、

$$y = \iota(y, x) - [\sqrt{\iota(y, x)}]^2 = \text{quadres}(\iota(y, x)) = \kappa(\iota(y, x)).$$

更に x は、もし $\epsilon(y, x)$ が平方数でないならば、 $[\sqrt{\epsilon(y, x)}]$ と $[\sqrt{[\sqrt{\epsilon(y, x)}]^2}]$ との差である。何故なら、 $((y+x)')^2 = (y+x)^2 + 2(y+x) + 1 > (y+x)^2 + x \geq (y+x)^2$ であるから。

それ故

$$x = [\sqrt{\epsilon(y, x)}] - [\sqrt{[\sqrt{\epsilon(y, x)}]^2}] = \text{quadres}([\sqrt{\epsilon(y, x)}]).$$

従つて、我々は $\lambda(n) = \text{quadres}([\sqrt{n}])$ と定義し得る。即ち、この場合は、

$$\lambda(\epsilon(y, x)) = \text{quadres}([\sqrt{\epsilon(y, x)}]) = x.$$

それ故、我々の要求する三つの函数は夫々次のごとく定義される。

$$\epsilon(y, x) = ((y+x)^2 + x)^2 + y,$$

$$\kappa(z) = \text{quadres}(z), \quad \lambda(z) = \text{quadres}([\sqrt{z}]).$$

これらの函数は、 $x+y$, $x \cdot y$, x^2 , $Sg(x)$, $\overline{Sg}(x)$, $x \div y$, $[\sqrt{x}]$ によつて定義される初等回帰函数なることは、その定義からして明らかであるから、我々は次の定理を得ることができる。

定理 §1-3-2.

初等回帰函数 $x+y$, $x \div y$, $x \cdot y$, x^2 , $Sg(x)$, $\overline{Sg}(x)$, $[\sqrt{x}]$ を原初函数に加えることによつて、全ての回帰函数を 定義図式 (I) - (Va) によつて得ることができる。

さて上の定理中の定義図式 (Va) の代りに、我々は、もし $\epsilon(x, y)$, $\kappa(x)$, $\lambda(x)$ を有しているならば、次の図式 (Va') を用いることによつてすべての初等回帰函数を定義することができる。

$$(Va') \quad \begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = \chi(\varphi(x)). \end{cases}$$

この図式は反復図式 (schema of iteration) とよばれるが、その方法は次の通りである。定理 §1-3-1 の証明中で、我々は函数 $\theta(y)$ を図式 (C) によつて定義した。即ち、

$$(C) \quad \begin{cases} \theta(0) = 0, \\ \theta(y') = \chi_2(y, \theta(y)). \end{cases}$$

今 $\theta_1(y) = \epsilon(y, \theta(y))$ とおけば、

$y = \kappa(\theta_1(y))$ 及び $\theta(y) = \lambda(\theta_1(y))$ が成立する。更に $\theta_1(y)$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= \epsilon(0, \theta(0)) = \epsilon(0, 0) = 0, \\ \theta_1(y') &= \epsilon(y', \theta(y')) = \epsilon(y', \chi_2(y, \theta(y))) \\ &= \epsilon((\kappa(\theta_1(y)))', \chi_2(\kappa(\theta_1(y)), \lambda(\theta_1(y))))). \end{aligned}$$

それ故もし一変数の函数 $\chi_3(y)$ を次の如く定義すると、

$$\chi_3(y) = \epsilon((\kappa(y))', \chi_2(\kappa(y), \lambda(y))),$$

$\theta_1(y)$ はこれによつて次のように定義される。

$$\begin{cases} \theta_1(0) = 0, \\ \theta_1(y') = \chi_3(\theta_1(y)). \end{cases}$$

更に $\theta(y)$ は $\theta_1(y)$ から次の如く得られる。

$$\theta(y) = \lambda(\theta_1(y)).$$

それ故、上の二定理に次のような変更を加えることができる。

定理 §1-3-3.

定理 §1-3-1, 2 において、定義図式 (I)-(Va) の代りに (I)-(Va') とかき直すことができる。

次に定理 §1-3-2 中に現れる函数の数を減少し得るか否かという問題を考察しよう。これは実際可能であつて、我々はたゞ二つの函数 $x+y$ と $\text{quadres}(x)$ を原初函数につけ加えれば、他の函数は図式 (I) (Va') によつて定義し得ることを次に示そう。先づ

$$(i) \quad x \cdot y = \left[\frac{((y+x)^2 \div y^2) \div x^2}{2} \right]$$

と定義すれば、我々の必要とするのは、 $x+y$, $x \div y$, x^2 , $\left[\frac{x}{2} \right]$ のみである。更に

(ii) $x \div y$ に関しては上述の $\epsilon, \kappa, \lambda$ を定義するために必要とされる $x \div y$ は常に $x \geq y$ の場合のみであつた。それ故、我々は $x \geq y$ の場合に対して $x \div y$ を定義し得ればよい。しかるに、 $x \geq y$ のとき $x \div y$ は $x-y$ に等しいから、もし $((x+y)')^2 + (x-y) = z$ とすれば、 $x \geq y$ に対して、今、次のような函数を定義する。

$$\begin{aligned} x[\div]y &= \text{quadres}(z) = \text{quadres}(((x+y)')^2 + (x-y)) \\ &= \text{quadres}((x+y)^2 + 3x+y)' = x-y. \end{aligned}$$

従つて $x[\div]y$ は $x+y$, x^2 及び $\text{quadres}(x)$ によつて定義され、 $a=b$ のとき、且つそのときに限り $a[\div]b=0$ なることは明らかである。

(iii) $\overline{Sg}(x)$ も $1 \geq Sg(x)$ であるから $\overline{Sg}(x) = 1[\div]Sg(x)$ として定義される。

(iv) $[x/2]$ なる函数は $0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$ という値をとるのは明らかである。それ故、今次のように函数 $\varphi(x)$ を定義すると、

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = \overline{Sg}(\varphi(x)), \end{cases}$$

この函数は $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ という値をとる。そこで他の函数

$$\begin{cases} \psi(0) = 0, \\ \psi(x') = \psi(x) + \varphi(x) \end{cases}$$

を定義すれば $\psi(x)$ は次のような値をとる、 $0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots$ 。従つて $\psi(x)$ は求

める函数であるが、この函数を更に図式 (Va') によつて定義するには、先づ

$$\chi(x) = \overline{Sg}(x) + 2 \overline{Sg}(x[\div]1)$$

を定義すると、この函数は次の値をとる。

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \text{ のとき;} \\ 2, & x=1 \text{ のとき;} \\ 0, & x>1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

即ち、1, 2, 0, 0, 0, 0,

更に

$$\begin{cases} \alpha(0) = 0, \\ \alpha(x') = \chi(\alpha(x)) \end{cases}$$

を定義すると、この函数は 0, 1, 2, 0, 1, 2, ... なる値をとる。今次の函数を定義すれば、

$$\begin{cases} \beta(0) = 0, \\ \beta(x') = (\beta(x))' + \alpha(\beta(x)), \end{cases}$$

この函数は、 $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して、0, 1, 3, 4, 6, 7 ... なる値をとる。それ故、我々は求める値を $0-0, 1-1, 3-2, 4-3, 6-4, 7-5, \dots$ の如く得ることができるから、

$$[x/2] = \beta(x)[\div]x$$

と定義し得る。しかるに $\beta(x)$ は定義図式 (I)-(Va') 及び $x+y$ とから定義可能である。

(V) x^2 は次のように定義しうる。

先づ $(x')^2 = (x^2 + 2x)'$ 。

それ故、 $\varphi(x) = x + 2[\sqrt{x}]$ とおけば、 x^2 は図式 (Va') によつて、

$$\begin{cases} 0^2 = 0, \\ (x')^2 = (\varphi(x^2))' \end{cases}$$

と定義される。 $\varphi(x)$ を定義するには、

$$\varphi(x') = x' + 2[\sqrt{x'}]$$

なる故、

$$[\sqrt{x'}] = \begin{cases} [\sqrt{x}]', & x' \text{ が平方数のとき;} \\ [\sqrt{x}], & \text{しからざるとき.} \end{cases}$$

従つて、

$$\begin{aligned} \varphi(x') &= (x + 2[\sqrt{x}] + 2 \text{quad}(x'))' \\ &= (\varphi(x) + 2 \text{quad}(x'))' \end{aligned}$$

但し、 $\text{quad}(x') = \overline{Sg}(\text{quadres}(x'))$ とする。 $\varphi(x)$ を更に図式 (Va') によつて定

義するには、 x' は x が m^2+2m の形のときに、且つその時にのみ平方数であり得るから、 $\varphi(x)=x+2[\sqrt{x}]$ の形から

$$\varphi(x) = (m^2+2m) + 2m = m^2+4m$$

とかくと、そのときはまた逆に $\varphi(x) = x+2[\sqrt{x}] = m^2+4m$ から $m^2 \leq x < (m')^2$ を、従つて $[\sqrt{x}] = m$ を推論することができる。それ故、これは結局 $\varphi(x)+4$ が平方数であるというに等しい。かくて、

$$\text{quad}(x') = \text{quad}(\varphi(x)+4)$$

であり、従つて $\varphi(x)$ は次のように図式 (Va') によつて定義しうる。

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = (\varphi(x) + 2 \text{quad}(\varphi(x)+4))'. \end{cases}$$

(vi) $[\sqrt{x}]$ は上で定義した函数

$$\varphi(x) = x + 2[\sqrt{x}]$$

を用いることによつて、

$$[\sqrt{x}] = \left[\frac{\varphi(x) [\div] x}{2} \right]$$

と定義される。

さて残るところは

(vii) $Sg(x)$ であるが、これは明らかに我々の有する定義図式から

$$\begin{cases} Sg(0) = 0, \\ Sg(x') = 1 \end{cases}$$

と定義することができる。

従つて我々は次の定理を得る。

定理 §1-3-4.

原初函数に二つの函数 $x+y$ 及び $\text{quadres}(x)$ をつけ加えれば、すべての初等回帰函数は定義図式 (I) — (Va') によつて得られる。²⁾

さて、もし我々が原初函数として一変数の函数しかもたぬならば、この函数から定義図式 (VI) 或は (Va') によつて構成し得るのは常に一変数の函数にとゞまる。従つて多変数の函数を得るためには少くとも1個の二変数の函数、即ち $x+y$ を有するか、或は一つのパラメーターをもつ定義図式、即ち (Vb') を有していなければならない。更にその場合、我々は先づ $\iota(x, y)$ を定義し、それを用いることによつて多変数の函数から一変数の函数を定義することもできるが、このような迂路を経ずに直接一変数の函数を定義してゆくことも勿論可能である。そのためには、上の定理中の $x+y$ は二変数の函数としては必要とされぬ故、一変数の初等回帰函数に関しては次の定理が得られる。

定理 §1-3-5.³⁾

一変数のみの初等回帰函数は、原初函数として $S(x)$ 及び $\text{quadres}(x)$ を有するならば、次の図式によつてすべて定義され得る。

$$(I) \quad \varphi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x),$$

$$(II) \quad \varphi(x) = \psi_2(\psi_1(x)),$$

$$(III) \quad \begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = \psi_2(\varphi(x)). \end{cases}$$

(証明)

上の議論からして、零函数と、同一化函数を (I)–(III) によつて定義すればよい。まづ自然数 q は、

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = S(\varphi(x)) \end{cases}$$

として定義される。更に零函数及び同一化函数に関しては、

$$\begin{cases} 0_1(0) = 0, \\ 0_1(x') = 0, \end{cases}$$

また

$$\begin{cases} U_1^1(0) = 0, \\ U_1^1(x') = S(x) \end{cases}$$

と explicite に定義されるから、定理は成立する。

註 1. この問題に関しては、R. M. Robinson [1] 及び Péter [2] §1-11, [10] §7. を参照。

註 2. この定理中の $x+y$, $\text{quadres}(x)$ を夫々次の函数とおきかえることができる。 $|x-y|$, $\text{quad}(x)$. その方法に関しては上述の R. M. Robinson の論文、特に §6 を参照。

註 3. もし、 $\iota(x, y) = (x+y)^2 + 3x+y$ と定義し、 $\kappa(\iota(x, y)) = x$, $\lambda(\iota(x, y)) = y$ とすれば、定理中の $\text{quadres}(x)$ を $\kappa(x)$ 或は $\lambda(x)$ とおきかえることができる。その方法に関しては、R. M. Robinson [5] を参照。尙註 2 と同様の理由から定理中の $\text{quadres}(x)$ を $\text{quad}(x)$ におきかえ、(I) を (I') $\varphi(x) = |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$ とおきかえることもできる。これについては R. M. Robinson [1] を参照。更に上述のような $S(x)$ 及び $\kappa(x)$ (もしくは $\lambda(x)$) を原初函数として有するときは、同じ $\iota(x, y)$ を用いて、定理中の図式 (I) を次のように直すことができる。(I'') $\varphi(x) = \iota(\psi_1(x), \psi_2(x))$. (R. M. Robinson [5]) この図式 (I) を全く省略する方法に関しては (原初函数により複雑な函数を加えて)、J. Robinson [4] を参照。

第4節 一変数の初等回帰函数の枚举

前節に証明された定理 §1-3-5 によつて、我々は一変数の初等回帰函数は $S(x)$ 及び $\text{quadres}(x)$ を原初函数として認めれば、次の三つの定義図式の適用によつて得られることが分つた。

$$(I) \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad (II) \quad \varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$$

$$(III) \quad \begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(x') = \varphi_2(\varphi(x)). \end{cases}$$

それ故、今次のような函数を定義する。¹⁾

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} x', & m=0 \text{ のとき;} \\ \text{quadres}(x), & m=1 \text{ のとき;} \\ \varphi_{(m)_1}(x) + \varphi_{(m)_2}(x), & m>1 \text{ で } (m)_0=0 \text{ のとき;} \\ \varphi_{(m)_2}(\varphi_{(m)_1}(x)), & m>1 \text{ で } (m)_0=1 \text{ のとき;} \\ 0, & m>1, (m)_0>1 \text{ で } x=0 \text{ のとき;} \\ \varphi_{(m)_2}(\varphi_m(x-1)), & m>1, (m)_0>1 \text{ で } x \neq 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

この函数は次のような値をとる、

$$\varphi_0(x) = x' = S(x),$$

$$\varphi_1(x) = \text{quadres}(x).$$

そして $\varphi_1(x) = \varphi_k(x)$, $\varphi_2(x) = \varphi_l(x)$ とおけば、もし $m = 2^0 \cdot 3^k \cdot 5^l \cdot 7$ ならば、 $m>1$ で $(m)_0=0$ であるから、

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= \varphi_{2^0 \cdot 3^k \cdot 5^l \cdot 7}(x) = \varphi_{(m)_1}(x) + \varphi_{(m)_2}(x) \\ &= \varphi_k(x) + \varphi_l(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \end{aligned}$$

更にもし $m = 2^1 \cdot 3^k \cdot 5^l$ ならば、 $m>1$ で $(m)_0=1$ であるから、

$$\varphi_m(x) = \varphi_{2^1 \cdot 3^k \cdot 5^l}(x) = \varphi_{(m)_2}(\varphi_{(m)_1}(x)) = \varphi_l(\varphi_k(x)) = \varphi_2(\varphi_1(x)).$$

最後にもし、 $m = 2^2 \cdot 5^l$ ならば $m>1$ で $(m)_0>1$ であるから、

$$\varphi_m(x) = \varphi_{2^2 \cdot 5^l}(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \text{ のとき;} \\ \varphi_{(m)_2}(\varphi_m(x-1)) = \varphi_l(\varphi_m(x-1)) \\ & = \varphi_2(\varphi_m(x-1)), & x \neq 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

即ち、
$$\begin{cases} \varphi_m(0) = 0, \\ \varphi_m(x') = \varphi_2(\varphi_m(x)). \end{cases}$$

従つてこの函数は $m=1, 2, 3, \dots$ に対して一変数のすべての初等回帰函数を(くり返しを含めて)枚举することとなる。

函数 $\varphi_m(x)$ を用いてすべての一変数の初等回帰函数を枚举すれば、与えられた一変数の初等回帰函数は次の表のどこかに現れねばならない。

$\varphi_0(x): \varphi_0(0), \varphi_0(1), \varphi_0(2), \varphi_0(3), \dots$

$\varphi_1(x): \varphi_1(0), \varphi_1(1), \varphi_1(2), \varphi_1(3), \dots$

$\varphi_2(x): \varphi_2(0), \varphi_2(1), \varphi_2(2), \varphi_2(3), \dots$

$\varphi_3(x): \varphi_3(0), \varphi_3(1), \varphi_3(2), \varphi_3(3), \dots$

.....

.....

.....

.....

$\varphi_m(x): \varphi_m(0), \varphi_m(1), \varphi_m(2), \varphi_m(3), \dots$

.....

.....

このとき次のように定義された函数

$$\varphi(m, x) = \varphi_m(x)$$

をとると、 $\varphi(m, x)$ は初等回帰函数ではあり得ない。何故なら、もし $\varphi(m, x)$ が初等回帰函数であるとすれば、対角線論法によつて得られる（即ち $m=x$ とおくことによつて得られる）函数 $\varphi(x, x)$ は初等回帰函数、それも一変数 x の初等回帰函数でなければならない。それ故 $(\varphi(x, x))'$ も一変数の初等回帰函数として上述の枚挙のうちに現れねばならぬこととなる。即ち、ある m に対して

$$(\varphi(x, x))' = \varphi_m(x) = \varphi(m, x)$$

でなければならない。しかるにこれは $x=m$ に対しては不可能である。それ故帰謬法によつて $\varphi(m, x)$ は初等回帰函数ではあり得ない。

一般に初等回帰でない函数の存在を論ずるために次節でより複雑な形の、しかし初等的ではないが、回帰的な図式によつて定義される函数について考察しよう。

註 1. この函数については、Péter [3] §2, [10] §11, Robinson [2] 参照。

第5節 非初等回帰函数の存在¹⁾と多重挿入回帰函数²⁾

既に我々は第2節において二重(多重)回帰函数及び挿入回帰函数が、それぞれ初等回帰函数として定義され得ることを示した。しかし、次にあげるようなこれら両函数の特質を併せもつ函数は、初等回帰函数ではないことを以下に論ずることとする。例えば我々は次の図式によつて定義される函数を二重挿入回帰函数と呼ぼう。

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = \alpha(y), \\ \varphi(x', y) = \beta(\varphi(x, \gamma(x))), \\ \varphi(x', y') = \theta(x, y, \varphi(x, \psi(x, y, \varphi(x', y))), \varphi(x', y)). \end{cases}$$

一般に k -重挿入回帰函数を上例にならつてあげ得るが、 $k=3$ の例を示せば、

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, & x \cdot y \cdot z = 0 \text{ のとき;} \\ \varphi(x', y', z') = \beta(x, y, z, \varphi(x, \gamma_1(x, y, z, \varphi(x', y', z)), \gamma_2(x, y, z, \varphi(x', y', z))), \\ \varphi(x', y, \gamma_3(x, y, z, \varphi(x', y', z))), \varphi(x', y', z)). \end{cases}$$

これらの函数は、明らかに前述の挿入回帰函数と二 (k) 重回帰函数の特性を有している。これらの函数が一般に初等回帰函数でないことを示すために、次のような二重挿入回帰函数をとろう。

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = x', \\ \varphi_m'(0) = \varphi_m(1), \\ \varphi_m'(x') = \varphi_m(\varphi_m'(x)). \end{cases}$$

この函数は次の特質をもつ：もし任意の初等回帰函数 $\theta(x)$ をとるならば、すべての x に対して

$$(1) \quad \theta(x) < \varphi_m(x)$$

なる関係の成立するようなある整数 m が存在する。これを証明するために、先づ $\varphi_m(x)$ が x に関して単調増大函数であること、即ち、

$$(i) \quad \varphi_m(x) > x \quad \text{或は} \quad \varphi_m(x) \geq x'$$

の成立することを示そう。 $m=0$ のときは定義から $\varphi_0(x) = x'$ 。次に、ある m 及び任意の x に対して $\varphi_m(x) \geq x'$ が成立すると仮定しよう。そのとき、定義の第2、第3式から、 $x=0$ に対しては、

$$\varphi_m'(0) = \varphi_m(1) \geq 2 > 1$$

が成立する。更に、 $\varphi_m'(x) \geq x'$ がその同じ m とある x に対して成立すると仮定すれば、

$$\varphi_m'(x') = \varphi_m(\varphi_m'(x)) \geq (\varphi_m'(x))' \geq (x')'.$$

それ故、もしある m 及び任意の x に対して $\varphi_m(x) \geq x'$ なる関係が成立するならば、 $\varphi_m'(x) \geq x'$ である。それ故 (i) は任意の x とすべての m に対して成立する。従つて、

$$\varphi_0(x) = x' \quad \text{及び} \quad \varphi_m'(x') = \varphi_m(\varphi_m'(x)) > \varphi_m'(x)$$

が成立するから、 $\varphi_m(x)$ は x に関して単調増大函数である。

次に $\varphi_m(x)$ は m に関して単調増大函数なること、即ち

$$(ii) \quad \varphi_m'(x) \geq \varphi_m(x')$$

の成立することを、ある一定の m に対して x に関する帰納法を用いて証明しよう。 $x=0$ に対しては (ii) は定義の第2式から成立する。今 (ii) を x のある値 n に対して仮定すれば、 $\varphi_m(x)$ は x に関して単調増大だから、

$$\varphi_m'(n') = \varphi_m(\varphi_m'(n)) \geq \varphi_m(\varphi_m(n')),$$

しかるに (i) から

$$\varphi_m(n') \geq (n')',$$

よつて $\varphi_{m'}(n') \geq \varphi_m(\varphi_m(n')) \geq \varphi_m((n'))'$.

よつて (ii) は証明された。

上述の結果と第3節の定理 §1—3—5 の quadres (x) の代りに quad (x), $\phi_1(x) + \phi_2(x)$ の代りに $|\phi_1(x) - \phi_2(x)|$ を用いて次に (1) なる関係を証明しよう。

(I) $\theta(x) = S(x)$ の場合。

$\varphi_m(x) > \theta(x)$ なる $\varphi_m(x)$, 即ち、 $\varphi_1(0) = 2 > 1$, $\varphi_1(1) = 3 > 2 \dots$ が存在する。

(II) $\theta(x) = \text{quad}(x)$.

quad (x) の性質からその値は 0 か 1. それ故、 $\text{quad}(x) \leq x' = \varphi_0(x) < \varphi_1(x)$.
従つて、 $S(x)$, quad (x) に対しては $\varphi_1(x)$ が既に要求を充たす。

(III) $\theta(x) = |\phi_1(x) - \phi_2(x)|$ の場合、但し $\phi_1(x) < \varphi_k(x)$, $\phi_2(x) < \varphi_l(x)$ とする。このときは、(ii) を用いて、

$$\begin{aligned}\theta(x) &= |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq \max(\phi_1(x), \phi_2(x)) \\ &< \max(\varphi_k(x), \varphi_l(x)) \leq \varphi_n(x)\end{aligned}$$

但し $n = \max(k, l)$ とする。よつて $\varphi_m(x) > \theta(x)$ なる $\varphi_m(x)$ が存在する。

(IV) $\theta(x) = \phi_2(\phi_1(x))$ の場合、但し $\phi_1(x) < \varphi_k(x)$, $\phi_2(x) < \varphi_l(x)$ とする、このときは、

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \phi_2(\phi_1(x)) < \varphi_l(\phi_1(x)) < \varphi_l(\varphi_k(x)) \\ &< \varphi_{\max(k, l)}(\varphi_{\max(k, l)}(x)) = \varphi_{\max(k, l)'}(x').\end{aligned}$$

しかるに $\varphi_{\max(k, l)'}(x') \leq \varphi_{((\max(k, l))')'}(x)$.

従つて、 $\theta(x) < \varphi_m(x)$ なる $\varphi_m(x)$ が存在する。

(V) $\theta(0) = 0$ 且つ $\theta(x') = \phi_2(\theta(x))$ なる場合。但し $\phi_2(x) < \varphi_l(x)$ とする。このときは、

$$\varphi_m(x) \geq x' > 0, \text{ 故に } \varphi_m(x) > \theta(0).$$

更に、 $\theta(x) < \varphi_m(x)$ が任意の x に対して成立するような m を常に我々は見出すことができる。何故なら、 $x = 0$ に対してはすべての m がそれである。もし任意の x に対して $\theta(x) < \varphi_m(x)$ が成立するときは、

$$\theta(x') = \phi_2(\theta(x)) < \varphi_l(\theta(x)) < \varphi_l(\varphi_m(x))$$

である。そのとき $m = l'$ にとれば、

$$\varphi_l(\varphi_m(x)) = \varphi_l(\varphi_{l'}(x)) = \varphi_{l'}(x')$$

であるから

$$\theta(x') < \varphi_{l'}(x') \text{ である。}$$

以上の考察から $\theta(x)$ が一変数の初等回帰函数なるとき、 $\varphi_m(x)$ が (1) なる関係を充たすある m が常に存在することが示された。

しかしながらこの函数 $\varphi_m(x)$ 自体は初等回帰函数ではない。何故なら、もしも

それが初等回帰函数ならば、 $m=x$ において得られる函数 $\varphi_x(x)$ は一変数の初等回帰函数となるから、

$$\varphi_x(x) < \varphi_m(x)$$

なる関係がすべての x について成立せねばならぬ。しかるに $x=m$ なるときこれは明らかに不合理である。よつて $\varphi_m(x)$ は初等回帰函数ではあり得ない。

さて、我々がもし函数の函数なる概念を用いれば、一般に多重挿入回帰函数を、単純な形の回帰図式によつて定義し直すことができる。

例えば

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = \varphi(x', 0) = 0, \\ \varphi(x', y') = \beta(x, y, \varphi(x, \gamma(x, y, \varphi(x', y))), \varphi(x', y)) \end{cases}$$

なる函数を単純な回帰図式に直すには、函数の函数 B 及び ϕ を次のように定義する、

$$\begin{cases} B(x, 0, f(z)) = 0, \\ B(x, y', f(z)) = \beta(x, y, f(\gamma(x, y, B(x, y, f(z)))), B(x, y, y, f(z))). \end{cases}$$

更に、 $\phi(x, z)$ なる函数を $B(x, y, f(z))$ によつて定義して、

$$\begin{cases} \phi(0, y) = 0 \\ \phi(x', y) = B(x, y, \phi(x, z)) \end{cases}$$

とする。このとき、すべての x と y に対して $\phi(x, y) = \varphi(x, y)$ なることを証明し得るが、それには我々は次の形の超限帰納法 (ω^2 までの) を用いねばならない。即ち、先づ上の関係は $(0, 0)$ に対して成立する。つまり、

$$\phi(0, 0) = 0 = \varphi(0, 0).$$

更にもし上の関係が (x', y') に先だつすべての (m, n) について成立するならば (x', y') についても成立することを証明するが、ここで (x', y') に先立つ (m, n) とは、 $m \leq x'$ 或は $n \leq y'$ がなり立つすべての (m, n) とする。 $m=0$ に対しては、

$$\phi(0, n) = 0 = \varphi(0, n).$$

且つ $n=0$ に対しては、

$$\phi(m', 0) = B(m, 0, \phi(m, z)) = 0 = \varphi(m', 0).$$

今帰納法の仮定として $\phi(m, n) = \varphi(m, n)$ が (x', y') に先だつすべての (m, n) について成立するとすれば、

$$\begin{aligned} \phi(x', y') &= B(x, y', \phi(x, z)) \\ &= \beta(x, y, \phi(x, \gamma(x, y, B(x, y, \phi(x, z)))), B(x, y, \phi(x, z))) \\ &= \beta(x, y, \phi(x, \gamma(x, y, \phi(x', y))), \phi(x', y)) \\ &= \beta(x, y, \varphi(x, \gamma(x, y, \varphi(x', y))), \varphi(x', y)) \\ &= \varphi(x', y'). \end{aligned}$$

この節で述べたような初等回帰でないが、尙回帰的な図式によつて定義される函数については、我々は次章において回帰函数の定義を更に拡張することによつて、一般的な考察を加えることとする。

註 1. これについては、R. M. Robinson [2], Péter [3], [10] §9, Ackermann [2] 参照。

註 2. Ackermann [1], Péter [10] §13.

第2章 一般回帰函数

既に第1章の終り第4, 5節において、初等回帰函数の回帰的な定義図式、即ち、(Va), (Vb) に類似した定義図式によつて定義されながら、初等回帰ではない函数の存在することを示した。しかしながら、これら初等回帰でない函数も、次の意味では尙回帰函数とよばれるに値することは明らかである。即ち、

(I) それが一群の方程式によつて表現され、その値を求めるには変数に一定数値を代入すること、及び、既知の函数値を一定数値によつて置換することが許されればよい。

(II) それは例外的な場合 (即ち、*explicite* に与えられている場合) を除いて、数学的帰納法による定義によつて与えられる。

このような意味での回帰的な図式によつて定義される函数は、その値を実際に計算することが可能であるから、回帰的な語の意味を明かにし、同時に「実際に計算可能な」函数の範囲をはつきりと規定するには、第1章の考察からして初等回帰函数の概念だけからでは不十分なることは明らかである。それ故 Gödel が Herbrand の示唆によつて構成した一般回帰函数の定義は、我々が直観的に「回帰的」或は「実際に計算可能」と言いならわしている概念から (I) なる側面を抽出して明確な規定を与え、充分な形式化を施したものに他ならない。¹⁾

Gödel によつて与えられ、Kleene によつて手の加えられた一般回帰函数の定義は、ある直観的な函数のもつ特質ではなく、すべての回帰的な函数のもつ特質を、それを規定する方程式群の存在という面から定義しようとするものであるから、直観的な函数を充分形式的に定義しうるひとつ形式的な体系を構成し、このような形式的体系に関する考察を導入する必要がある。それ故、先づ回帰函数に対してこの種の超数学的定義を与え、後にこれと等値な純数学的定義の存在を示すこととしよう。

註 1. この問題の歴史的な、且つ *informal* な説明については Kleene [13] §55 参照。

第1節 超数学的定義¹⁾

定義を与える前に、回帰函数の理論に充分な形式的な体系 S_R を構成する必要がある。

回帰函数の形式的体系 S_R .

I. 記 号

$=$	$'$	0	$(\quad)$	,	(定 記 号)			
a	b	c		a_1		a_2		(可変数記号)
f	g	h		f_1		f_2		(函 数 記 号)

II. 数 記 号

1. 0 は数記号である。
2. r が数記号であるならば、 r' は数記号である。
3. 1-2 に定義されるもののみが数記号である。

この定義から $0, 0', 0'', 0''' \dots$ 等が数記号とよばれ、形式的体系 S_R 内で直観的な数 $0, 1, 2, 3, \dots$ を表現するが、我々は数記号を直観的な数と区別するために、 $0, 1, 2, 3, \dots$ なる省略記号を用いて、夫々直観的な数 $0, 1, 2, 3, \dots$ に対応する上記の数記号を示すものとする。一般に、変数 $x, y, z, \dots$ 等によつて示される自然数に対応する数記号を $x, y, z, \dots$ とかくことにする。

III. 項

1. 数記号は項である。
2. 可変数記号は項である。
3. もし r が項であるならば、 r' は項である。
4. もし F が函数記号であり、 $r_1, r_2, \dots, r_n$ が項であるならば、 $F(r_1, r_2, \dots, r_n)$ は項である。
5. 1-4 によつて得られるもののみが項である。

IV. 方 程 式

1. もし r と s とが項であるならば、 $r=s$ は方程式である。
2. 1 によつて得られるもののみが方程式である。

V. 方程式体系

方程式 $e_0, e_1, \dots, e_n$ の有限系列は方程式体系である。

VI. 演 釈 規 則

R1. 代入規則

方程式 e から、 e のある可変数記号 (y) に、ある数記号 (y) を代入することによつて方程式 e_1 を得ることができる。

R2. 置換規則

可変数記号をもたぬある方程式 $r = s$ (大前提) と方程式 $F(z_1, \dots, z_n) = z$ (小前提) とから、第一方程式の右辺 s 中に現れる $F(z_1, \dots, z_n)$ を z によつて置換して、他の方程式を得ることができる。

VII. 演 積

ある方程式 e が方程式体系 E から演積可能であるのは次の場合であり、かつその場合に限る。方程式の有限系列 $e_0, e_1, \dots, e_n$ が存在して、

1. e_n が方程式 e であり、
2. $1 \leq i \leq n$ なる i に対して、 e_i は E のひとつの方程式であるか、 $e_j (j < i)$ から R1 によつて得られるか、或は、 $e_j, e_k (j < i, k < i)$ から R2 によつて得られるかのいずれかであるとき。

方程式 e が方程式体系 E より演積可能なることを、我々は $E \vdash e$ とかくことにする。更にもしも方程式体系 E の最後の方程式 e (主要方程式) の左辺に現れる唯一の函数記号が f なるとき、我々はこの方程式体系を E_f と記すこととし、 f をこの方程式体系 E の主要函数記号とよぶ。更に E なる方程式体系に属する方程式の右辺に現れる函数記号を $g_1, \dots, g_n$ とすれば、これらは所与函数記号と呼ばれるものとする。

以上に構成された形式的体系と直観的な回帰函数の理論とが、互いにいかなる関係にあるかをみるために、次の例をとろう。二数の積 $x \cdot y$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x, \\ \varphi(x, y') = (\varphi(x, y))', \\ \psi(x, 0) = 0, \\ \psi(x, y') = \varphi(y, \psi(x, y)). \end{cases}$$

今この定義を形式化すると、

$$\begin{cases} f(a, 0) = a, \\ f(a, b') = (f(a, b))', \\ g(a, 0) = 0, \\ g(a, b') = f(b, g(a, b)). \end{cases}$$

勿論こゝで f, g なる函数記号はそれぞれ φ, ψ に対応するものとする。上の方程式体系 E_g から、 $g(2, 3)$ は演積可能である。即ち、

$$E_g \vdash g(2, 3) = 6.$$

一般的に、 $m_1, \dots, m_l$ の変数をもつ函数 $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ から出発して、新しい函数を定義するとき " $E_{\varphi_1, \dots, \varphi_l}^{g_1, \dots, g_l}$ " によつて、 m_j 個の自然数のすべての組 $\{(y_1, \dots, y_{m_j})\} (j = 1, \dots, l)$ に対して $g_j(y_1, \dots, y_{m_j}) = y$ なる方程式の集合を表わすと

すれば (但し、ここで、 $j=1, \dots, l$ に対して、 $\phi_j(y_1, \dots, y_{m_j}) = y$ で、 $y_1, \dots, y_{m_j}, y$ は $y_1, \dots, y_{m_j}, y$ に対する数記号とする)、 $l > 0$ のとき、 $E_{g_1, \dots, g_l}^{\phi_1, \dots, \phi_l}$ は方程式の無限個の集合であり、 $l = 0$ のときは空である。この記号を用いれば、上の関係はまた、

$$E_f^{\phi}, E_g \vdash g(2, 3) = 6$$

とすることが出来る (但しこのとき E_g は上の定義の下二つの方程式から成る)。

さて、我々の目的は、方程式群の存在によつて回帰函数を特徴づけることにあつたのであるから、もし回帰函数 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ が与えられていたならば、我々は上に示したような手続きでこれを形式化し、 φ に対応する函数記号 f に対してある方程式体系 E が存在し、 $E \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x$ なることを要求する。そのために先づ我々は次の定義を与えることとする。

定義 §2—1—1.

方程式体系 E は次の場合に函数 φ を $\phi_1, \dots, \phi_l$ から回帰的に定義すると言われる：

n 個の自然数のすべての組 $\{(x_1, \dots, x_n)\}$ に対して、 $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x$ の場合、且つその場合に限り、

$$(1) \quad E_{g_1, \dots, g_l}^{\phi_1, \dots, \phi_l}, E \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x$$

である。但し、 f は E の主要函数記号、 $g_1, \dots, g_l$ は所与函数記号 (その現れる順序で) $x_1, \dots, x_n, x$ は $x_1, \dots, x_n, x$ に対応する数記号とする。

勿論我々の形式的体系への要求からして、 $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x$ なるときは必ず $f(x_1, \dots, x_n) = x \in E_f^{\phi}$ 及びその逆が成立せねばならぬから、定義は次のように書きかえることも出来る。

定義 §2—1—2.

方程式体系 E は次の場合に函数 φ を $\phi_1, \dots, \phi_l$ から回帰的に定義すると言われる：

$f(x_1, \dots, x_n) = x \in E_f^{\phi}$ なる場合、且つその場合にかぎり、

$$E_{g_1, \dots, g_l}^{\phi_1, \dots, \phi_l}, E \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x$$

である。但し、 $f, g_1, \dots, g_l, x_1, \dots, x_n, x$ については定義 §2—1—1 の如くとする。

しかしながら、我々は直観的な回帰函数の性質からして、回帰函数の形式的体系については次の二つの要求を有する：

(A) n 個の自然数のすべての組 $\{(x_1, \dots, x_n)\}$ に対して、 $f(x_1, \dots, x_n) = x$ なる形の方程式が少くともひとつの x に対して E から演算可能であること、(完全性の条件)。

(B) $f(x_1, \dots, x_n) = x$ なる形の方程式は、精々ひとつの x に対して E から演算可能であること、(無矛盾性の条件)。

今 (A) なる条件が充たされていれば、 E_f^φ の定義からして、 $f(x_1, \dots, x_n) = x \in E_f^\varphi$ のときは (1) が成立する。他方 (B) なる条件が充たされているときは、もし (A) が既に成立していれば、 $f(x_1, \dots, x_n) = x \in E_f^\varphi$ をなるときにのみ (1) が成立する。

この二つの条件中 (A) を我々の回帰函数の形式的体系が充たしているという証明は、容易に与えられる。それが (B) の条件をも充たしているという証明については事態はより複雑であるが、こゝでは細かい議論には立入らない。唯々、上記の形式的体系はその演算規則、R2 において Gödel の最初の体系よりはるかに弱い、即ち、置換は方程式の右側の項についてしか許されていないことから、その証明は極めて簡単化されていることのみを指摘しておくに止める。²⁾

さて上記の函数を回帰的に定義する方程式体系の定義を用いて、当初の目的に応じて次の一般回帰函数の定義を導入する。

定義 §2-1-3.

もし函数を回帰的に定義する方程式体系 E が存在するならば、函数 φ は一般回帰函数とよばれる。

このときは、定義 §2-1-1 において明らかに $l=0$ である。 $l>0$ なるときは、初等回帰函数におけると同様、次の定義を与える。

定義 2-1-4.

もし函数 φ を $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ から回帰的に定義する方程式体系 E が存在するならば、函数 φ は $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ において一般回帰なる函数とよばれる。

この函数に関する定義は特性函数をとることによつて容易に、述語の場合にも適用される。

定義 §2-1-5.

その特性函数が一般回帰である述語は、一般回帰述語といわれる。他の述語もしくは函数において一般回帰なる場合も同じ。

これらの定義からして次の定理を証明することができる。

定理 §2-1-1.

すべての初等回帰函数 (述語) は一般回帰函数 (述語) である。

(証明)

すべての初等回帰函数に対して、それを回帰的に定義する方程式体系の存在することが示されれば、定義 §2-1-3 からして定理は成立する。

(I) 与えられた初等回帰函数が原初函数なるときは、定義図式 (I)-(III) を形式的体系に翻訳すれば、定理は明らかである。

(II) 初等回帰函数 φ が与えられた初等回帰函数、 $\psi, \chi_1, \dots, \chi_m$ から (IV) によつて定義されているとし、 $\psi, \chi_1, \dots, \chi_m$ に対しては定理は成立すると仮定し (数学的帰納法の仮定)、定理が φ に対しても成立することを証明する。仮定により、 φ に対応する函数記号を f として φ を定義する方程式を形式的体系内に翻訳すれば、

(1) $f(a_1, \dots, a_n) = g(h_1(a_1, \dots, a_n), \dots, h_m(a_1, \dots, a_n))$ となる (但し、 $g, h_1, \dots, h_m$ は $\psi, \chi_1, \dots, \chi_m$ に対応する所与函数記号とする)。帰納法の仮定により、任意の $(y_1, \dots, y_m)$ 及び $(x_1, \dots, x_n)$ に対して、 $g(y_1, \dots, y_m) = x (\varepsilon E_g^\psi)$ 及び $h_i(x_1, \dots, x_n) = y_i (\varepsilon E_{h_i}^{\chi_i}) (1 \leq i < m)$ が成立する。

ところが (1) から R1 によつて

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)).$$

このとき、上の前提と R2 から、

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(y_1, \dots, y_m),$$

更に R2 を用いて

$$f(x_1, \dots, x_n) = x$$

が成立するような x, y_i が存在する。即ち (1) を E とかけば、

$$E_{g, h_1, \dots, h_m}^{\psi, \chi_1, \dots, \chi_m}, E \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x.$$

更に我々の置換規則は唯々一通りしか行われないから、数記号 x は唯々一通りに決定される。

(III) 初等回帰函数 φ が (V) によつて定義されている場合も、(IV) と全く同様に証明される。

従つて定理は証明された。³⁾

この証明の方法は、 φ が他の函数 $\psi_1, \dots, \psi_l$ において初等回帰である場合も、本質的な変化を加えることなく適用されるから、この場合には次の形の定理を得る。

定理 §2-1-2.

すべて $\psi_1, \dots, \psi_l (Q_1, \dots, Q_l)$ において初等回帰なる函数 φ (述語 P) に対して、 φ を $\psi_1, \dots, \psi_l (Q_1, \dots, Q_l)$ から回帰的に定義する方程式体系 E が存在する。

言いかえれば、 φ は $\psi_1, \dots, \psi_l$ において一般回帰なる函数である。¹⁾

註 1. この節で与えた S_R の構成、およびそれに基づく一般回帰函数の定義その他は Kleene [7] 及び [13] §54 による。これよりはるかにつよい system については、Kleene [3]. 即ちこゝでは、規則は R1, 2 に止まらない。或は Hilbert-Bernays [2] Supplement II.

註 2. R2 の簡単化による無矛盾性の証明に関する議論については Kleene [7] §8 を参照。

註 3. 尙定理 §2-1-2 の完全な証明については Kleene [7] 或は [13] pp. 267-269.

第2節 数 学 的 定 義

第1節においては所謂「回帰的」なる直観的概念の形式的な定義を与えることに努力したが、この定義は形式的体系 S_R に関する命題として与えられたが故に、超数学的性格のものであつた。またそれによつて初等回帰ではないが、尙回帰的図式によつて定義される函数を包括する一般回帰函数の概念に到達したが、それでは、この一般回帰函数の超数学的定義と等値な数学的定義が存在するかどうかを研究するのが、この節の課題である。

今与えられた一般回帰函数 φ がある $(x_1, \dots, x_n)$ に対して y なる値をとつたとする、即ち $\varphi(x_1, \dots, x_n) = y$. 今この関係を述語 $R(x_1, \dots, x_n, y)$ によつて表現すれば、 $R(x_1, \dots, x_n, y)$ の特性函数 $\chi(x_1, \dots, x_n, y)$ は $\varphi(x_1, \dots, x_n) = y$ なるときに 0, その他のときに 1 となる。我々の回帰函数 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ に対する要求は、 $\varphi(x_1, \dots, x_n) = y$ なる値がすべての $(x_1, \dots, x_n)$ に対して夫々一通りづつ存在し、且つ我々がそれを見出しうることである。いゝかえれば、 $R(x_1, \dots, x_n, y)$ なる y が存在すると共に、この y が計算可能なることである。それ故、そのような y が存在するという前提の下で次のような μ -演算子を導入する。

$\mu y P(y) \equiv \text{af}\{P(y) \text{ が真であるような最小の数 } y\}$

そのとき、我々の φ に対する条件は次のようにかくことができる。

(1a) $(x_1) \dots (x_n) (Ey) R(x_1, \dots, x_n, y)$ が成立し、且つ

(VIa) $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \mu y R(x_1, \dots, x_n, y)$.

或は特性函数 χ をつかつてかき直せば、

(1b) $(x_1) \dots (x_n) (Ey) [\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ で、且つ

(VIb) $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \mu y [\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$.

これら二組の条件中のいずれかの組が成立すれば、我々の一般回帰函数に対する直観的な要求は当然充たされていることは明らかである。

それ故問題は、上の (VIb) (もしくは (VIa)) を (1b) ((1a)) と共に第1章第1節の (I)-(V) なる図式につけ加えることによつて定義される函数の集合と、第1節に定義された一般回帰函数の集合との間に、どのような関係が存在するかということである。先づ次のような定理は証明し得る。

定理 §2-2-1.

(1b) ((1a)) なる条件を附された (VIb) ((VIa)) なる図式によつて、 $\chi(R)$ から定義される函数 φ は $\chi(R)$ において一般回帰である。

(証明)

今 φ を定義する図式 (VIb) に対して次の方程式¹⁾を導入する。

$$(VI') \quad \begin{cases} \sigma(0, x_1, \dots, x_n, y) = y, \\ \sigma(\chi(x_1, \dots, x_n, y'), x_1, \dots, x_n, y'), \\ \varphi(x_1, \dots, x_n) = \sigma(\chi(x_1, \dots, x_n, 0), x_1, \dots, x_n, 0). \end{cases}$$

先づ直観的に図式 (VIb) は (VI') と等値なることを示そう。ある与えられた $(x_1, \dots, x_n)$ に対して、(1b) から $(Ey)[\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ であるから、もしこのような y が 0 であるとすれば、

$$\chi(x_1, \dots, x_n, 0) = 0.$$

そのとき、(VI') から

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sigma(\chi(x_1, \dots, x_n, 0), x_1, \dots, x_n, 0) \\ &= \sigma(0, x_1, \dots, x_n, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ところが 0 は明らかに $\mu y(\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$ なる y である。もし $\chi(x_1, \dots, x_n, m') = 0$ とすれば、同様に、(VI') から

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sigma(\chi(x_1, \dots, x_n, m'), x_1, \dots, x_n, m') \\ &= \sigma(0, x_1, \dots, x_n, m') \\ &= m'. \end{aligned}$$

他方、もし $\chi(x_1, \dots, x_n, 0) = n (n \neq 0)$ ならば、

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sigma(n, x_1, \dots, x_n, 0) \\ &= \sigma(\chi(x_1, \dots, x_n, 1), x_1, \dots, x_n, 1). \end{aligned}$$

それ故、 $\chi(x_1, \dots, x_n, 1) = 0'$ なる場合にのみ、 $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1$ 。且つこのとき 1 は明らかに $\mu y[\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ なる y である。 $\chi(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$ でないときは、我々は全く同様の手続きを、 $\varphi(x_1, \dots, x_n) = y$ なるある y の値まで続けてゆくことができる。そして $\chi(x_1, \dots, x_n, m) = 0$ ならば、常に $\varphi(x_1, \dots, x_n) = m$ 。従つて、(1b) なる条件の下では必ず (VI') によつて求める y の値を得ることができる。

それ故 (VI') を適宜 S_R 内に翻訳して得られる方程式体系を E とすれば、 $(Ey) R(x_1, \dots, x_n, y)$ なる条件の下で、

$$E_h^\chi, E_f \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x$$

が $x = \mu y R(x_1, \dots, x_n, y)$ のとき、且つそのときにかぎり成立することがすべての $(x_1, \dots, x_n)$ について言われればよい。

ところが (VI') の上の二式については、明らかに定理 §2-1-1 が成立するから、 σ を回帰的に定義する方程式体系が存在する。故に、今それを E_1 とする。そのとき、

$$E_h^x E_1 \vdash g(z, x_1, \dots, x_n, y) = u$$

は、 $g(z, x_1, \dots, x_n, y) = u \in E_g^\sigma$ なるときにのみ成立する。今 (VI') の最後の式を S_R 内に翻訳することによつて得られる方程式体系を E_2 とすれば、

$$E_g^\sigma, E_2 \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x$$

が、すべての $(x_1, \dots, x_n)$ について、 $x = \mu y [\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ のときにのみ言えることは、上の直観的な議論から明らかである。従つて E を E_1, E_2 とおけば、

$$E_h^x, E \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x$$

が $x = \mu y [\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ のとき、且つそのときにのみ言えることは明らかである。よつて E は $\mu y [\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0]$ (或は $\mu y R(x_1, \dots, x_n, y)$) を $\chi(R)$ から回帰的に定義する。従つて定理は成立する。

この定理によつて、我々は $(Ey) R(x_1, \dots, x_n, y)$ なる条件が充たされるならば、

$$(1) \quad E_h^x, E \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x$$

が、ある x に対して成立することが証明されたが、逆に (1) がある x に対して成立するならば、明らかに、 $(Ey) R(x_1, \dots, x_n, y)$ も成立する。それ故

(2) $(Ey) R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \{\text{ある } x \text{ に対して } E_h^x, E \vdash f(x_1, \dots, x_n) = x\}$ なる関係が存在する。この関係は次節で重要な意味をもつであろう。

更にこの定理と定理 §2—1—1 とから我々は次の定理を得ることができる。

定理 §2—2—2,

定義図式 (I)–(VI) (条件 (1) と共に) の一連の適用によつて定義される函数は一般回帰函数である。

それでは、このような数学的定義が超数学的定義によつて与えられた、すべての一般回帰函数を定義し得るかどうかについては、次節の終りでふれることとする。

註 1. こゝでは、Kleene [7] の方法を採用する。他の方法については Kleene [13] pp. 279–280. 参照。

第3節 Kleene の標準形及び枚举定理

この節では、任意の一般回帰函数 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ に対して、必ず

$$(1) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \phi(\mu y R(x_1, \dots, x_n, y))$$

なる関係の成立する初等回帰函数 ϕ が存在することを示すこととする。(但し、(1) において、 $(x_1) \dots (x_n) (Ey) R(x_1, \dots, x_n, y)$ とする。

そのために超数学的述語 $\mathfrak{E}_n(Ef, x_1, \dots, x_n, Y)$ を導入し、これは「 Y は方程式 $f(x_1, \dots, x_n) = x$ の E からの最短の演算である」ということを意味するものとする。更に $\mathfrak{D}(Y)$ なる超数学的函数は、その値として「 Y の最後の方程式の右辺の数記号に対応する数」(もしそのような数が存在するならば)、然らざるときは 0 をと

るものとする。従つていま、 Y の最終方程式が $f(x_1, \dots, x_n) = x$ ならば $\mathcal{D}(Y) = x$ である。

そのとき、一般回帰函数の定義からして $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ には次のことが成立する。

$$(2) \quad (x_1) \dots (x_n) (EY) \mathfrak{T}_n(E_f, x_1, \dots, x_n, Y),$$

$$(3) \quad (x_1) \dots (x_n) (Y) (\mathfrak{T}_n(E_f, x_1, \dots, x_n, Y) \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{D}(Y)).$$

さて、こゝで第2章第1節の S_R は Gödel の方法によつて数論化されたとする。即ち、 S_R の対象 (記号、数記号、方程式、演算、その他) と自然数との間に 1-1 の対応がつけられたとする。そのとき、 S_R の各対象はそれぞれ、それに対応する一定の自然数をもつが、その自然数を S_R の対象のもつ Gödel 数とよぶこととする。¹⁾

この Gödel 数によつて我々は上述の超数学的述語および函数は、 S_R の対象の代りにその Gödel 数をとれば、それぞれに対応する直観的数論の述語または函数の形に直すことができる。即ち、

(i) $\mathfrak{T}_n(E_f, x_1, \dots, x_n, Y)$ には $T_n(e, x_1, \dots, x_n, y)$ が対応して「 y は $f(x_1, \dots, x_n) = x$ なる方程式の、 e なる Gödel 数をもつ E_f からの最短の演算の Gödel 数である」を意味する。

(ii) $\mathcal{D}(Y)$ には函数 $\delta(y)$ が対応して「もし y がその最終方程式が $t = x$ なる演算の Gödel 数ならば、 x ; 然らざれば 0」なる値をとる。

このときは、上の (4), (5) に対応して、

$$(4) \quad (x_1) \dots (x_n) (Ey) T_n(e, x_1, \dots, x_n, y),$$

$$(5) \quad (x_1) \dots (x_n) (y) (T_n(e, x_1, \dots, x_n, y) \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = \delta(y)).$$

(但し e は E_f の Gödel 数とする) が成立する。ところが今 (4) なる条件の下では、

$$(6) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \delta(\mu y T_n(e, x_1, \dots, x_n, y))$$

が成立する。しかるに δ は初等回帰函数、 T_n は初等回帰述語なることが証明されるから²⁾、次の Kleene の標準形定理を得る。

定理 §2-3-1.³⁾

いかなる一般回帰函数 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ が与えられても、次の諸関係の成立するある数 e が見出される。

$$(4) \quad (x_1) \dots (x_n) (Ey) T_n(e, x_1, \dots, x_n, y),$$

$$(5) \quad (x_1) \dots (x_n) (y) (T_n(e, x_1, \dots, x_n, y) \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = \delta(y)),$$

$$(6) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \delta(\mu y T_n(e, x_1, \dots, x_n, y)).$$

但し、こゝで、 δ, T_n はそれぞれ上に定められた一定の初等回帰函数および述語とする。

この定理によつて、超数学的定義によつて与えられるすべての一般回帰函数の集合は、その数学的定義によつて与えられる函数の集合と等値なることが明らかである。従つて、定理 §2—2—2 の逆を次の如くに得る。

定理 §2—3—2.

すべての一般回帰函数は定義図式 (I) — (VI) によつて定義され得る。

更にこの定理の証明を用いて、前節の (2) から

$$(7) \quad (Ey) R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv (EY) \mathfrak{F}_n(E_f, x_1, \dots, x_n, Y).$$

従つて Gödel 数を用いることによつて、

$$(8) \quad (Ey) R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv (Ey) T_n(e, x_1, \dots, x_n, y)$$

が成立する。それ故 R が一般回帰函数ならば、必ず (8) を成立せしめるようなある e が、すべての R に対して存在することとなる。いゝかえれば、 $(Ey) T_n(e, x_1, \dots, x_n, y)$ は $e=0, 1, 2, \dots$ なる値をとることによつて、すべての $(Ey) R(x_1, \dots, x_n, y)$ を枚挙すると考えられる。

よつて次の Kleene の枚挙定理を得る。

定理 §2—3—3.⁴⁾

すべての $n \geq 0$ に対して、いかなる一般回帰述語 $(Ey) R(x_1, \dots, x_n, y)$ が与えられようと、必ずある数 e が存在して、次の関係が成立する。

$$(8) \quad (Ey) R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv (Ey) T_n(e, x_1, \dots, x_n, y).$$

註 1. 我々は先づ S_R の記号に一定の自然数に対応させ、次に、これら記号から構成される S_R の対象、即ち項、方程式、代入、置換、方程式体系、演算等に唯一つの自然数に対応するような、一定の方法を定める。通常は、第 1 章第 1 節に述べられた素数の理論を用いる。だが、Gödel 数の理論の本質的な条件は、この自然数との 1 対 1 の対応によつて、例えば、「 E は方程式体系である」というような述語がある数に関する述語となると共に、それが初等もしくは一般回帰であることである。逆にいえば、Gödel 数の定め方には任意性はあるが、その結果得られた数論的な述語が初等もしくは一般回帰であるという条件は充たしていなければならない。

註 2. 詳しくは、Gödel [1] §2, Kleene [3], [7], [13] §51. Hlibert-Bernays [2] §4, 1. を参照。簡単にいえば、これら述語および函数を定義するに必要な述語と函数が、すべて初等回帰なることを示すことによつて、結局、これらもまた初等回帰なることが言われうる。それ故、現在の我々の必要からのみ言えば、註 1 における Gödel 数の条件は、Gödel 数が δ と T_n とをそれぞれ初等回帰ならしめうるよう構成されねばならぬということである。尙この種の一般的条件については後節、Gödel の定理とその拡張を参照されたい。

註 3. Kleene [13] Th. IV, [7] Th. IV. 前者は ε によつてかゝられている、こゝ

では後者を採用する。全く同一の形の定理は Kleene [13] Th. IX. 尚、 T_n の定義中に現れる「最短の」という表現は直観的にすぎるが、その意味については、Kleene [7] §7, [13] §58 参照。

註 4. Kleene [7] Th. IV, [13] Th. IV. これと全く等値ではないが、一般回帰函数の枚挙については、Kleene [13] §1 参照。

第 4 節 一般回帰函数の定義の単純化¹⁾

既に第 3 節において得られた Kleene の標準形によつて、すべての回帰函数は定義図式 (I)–(VI) の一連の適用によつて得られることが明らかとなつた。この節でとり扱う問題は、これら定義図式のすべてが果して一般回帰函数の定義に不可欠であるかどうかということである。従つてこの節は第 1 章第 3 節と類似の性格を有する。

この節で我々の証明する三つの主要なことがらは、(i) もし我々が μ -演算子を有するならば、回帰図式 (図式 (V)) は一般回帰函数の定義から消去することができる、(ii) もし適当な函数を原初函数につけ加えてやれば、すべて一変数の一般回帰函数は簡単な図式から得られること、(iii) Kleene の標準形定理の、超数学的議論を借りぬ直接的な数学的証明とである。

以下順を追つてその方法を述べよう。先づこの節において重要な役割を演ずる Gödel の β -函数をこゝで定義しておくこととする。いかなる有限個の自然数からなる系列 $a_0, a_1, \dots, a_y$ も、一定数 u を $1+v(z+1)$ ($z=0, 1, \dots, y$) でわつた時の剰余として得られる。即ち、 $rm(u, 1+v(z+1))=a_z$ が $0 \leq z \leq y$ に対して成立する、いゝかえれば、

$$u \equiv a_z \pmod{1+v(z+1)}, \quad a_z < 1+v(z+1)$$

なる条件を充たすような自然数 u, v が、いかなる $a_0, \dots, a_y$ にも見出されうる。このとき $v_z = 1+v(z+1)$ は $z=0, 1, \dots, y$ に対して互いに素である。今 $\beta(u, v, z) = rm(u, v_z)$ とおいて、 $\beta(u, v, z)$ を Gödel の β -函数²⁾ と名づける。

更にこの節全般にわたつて第 1 章第 3 節に導入した函数 $\iota(x, y)$, $\kappa(z)$, $\lambda(z)$ を随時使用することとする。即ち $\iota(x, y)=z$ のとき、 $\kappa(z)=x$, $\lambda(z)=y$ である。

さて、 $w = \iota(u, v)$ とおくと、上述の自然数系列 $a_0, a_1, \dots, a_y$ は一個の数 w から決定される。即ち $T_z w = rm(\kappa(w), 1+\lambda(w) \cdot z')$ と略記すれば、

$$a_z = T_z w$$

が $z=0, 1, \dots, y$ に対して成立する。

上記の (i) を証明するために φ を次のように定義されているとする。

$$\begin{cases} \varphi(0, x_2, \dots, x_n) = \phi(x_2, \dots, x_n), \\ \varphi(y', x_2, \dots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

φ の値の系列、

$$\varphi(0, x_2, \dots, x_n), \varphi(1, x_2, \dots, x_n), \varphi(2, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi(y, x_2, \dots, x_n)$$

は上述の $T_z w$ を用いて次のようにかける。

$$\begin{aligned} \varphi(y, x_2, \dots, x_n) = T_y \mu w \{ T_0 w = \varphi(x_2, \dots, x_n) \& (z) [z < y \rightarrow \\ T_z w = \chi(z, T_z w, x_2, \dots, x_n)] \} \end{aligned}$$

(但し w には可能なる最小の値を選ぶとする)、これは亦、

$$\begin{aligned} \varphi(y, x_2, \dots, x_n) = T_y \mu w \{ T_0 w = \varphi(x_2, \dots, x_n) \& \mu z [T_z w \\ \neq \chi(z, T_z w, x_2, \dots, x_n) \vee z = y] = y \} \end{aligned}$$

とかき直せるのは、その意味からして明らかである。この式は函数 ϕ, χ および μ -図式を二度適用することによつて得られる。この式は上と同様に $\iota(w, z) = t$ とおけば、最小の t は最小の w に対応して、

$$\begin{aligned} \varphi(y, x_2, \dots, x_n) = T_y \kappa [\mu t \{ T_0 \kappa(t) = \varphi(x_2, \dots, x_n) \& [(T_{\lambda(t)})' \kappa(t) \neq \chi(\lambda(t), \\ T_{\lambda(t)} \kappa(t), x_2, \dots, x_n) \vee \lambda(t) = y] \& \lambda(t) = y] \& \kappa(t) = w \} \end{aligned}$$

とかき直せるが、これは更に、

$$\begin{aligned} \varphi(y, x_2, \dots, x_n) = T_y \kappa [\mu t \{ |T_0 \kappa(t) - \varphi(x_2, \dots, x_n)| + \overline{Sg}(T_{\lambda(t)})' \kappa(t) - \chi(\lambda(t), \\ T_{\lambda(t)} \kappa(t), x_2, \dots, x_n) \cdot |\lambda(t) - y| + |\lambda(t) - y| + |\kappa(t) - w| = 0 \} \end{aligned}$$

と変形することができる。この式には明らかに回帰図式は現れていない。しかるに第1章第3節の定理 1-3-2 におけるように、 $\iota(x, y), \kappa(x), \lambda(z)$ は $x+y, x-y, x \cdot y, x^2, Sg(x), \overline{Sg}(x), [\sqrt{x}]$ から定義されうる。よつて上述の変形も亦、これら函数と T_z を定義するに要する $rm(x, y)$ とを原初函数につけ加えれば可能である。従つて、回帰図式を、消去するには上記の諸函数を原初函数につけ加えてやればよい。

次に我々は一般回帰函数は原初函数に、 $x+y$ と $quadres(x)$ をつけ加えてやれば、図式 (IV) と、次の図式 (VII)

$$(VII) \quad \varphi^{-1}(x) = \mu y \{ \varphi(y) = x \}$$

とから定義されうることを示そう。

数個の変数をもつ函数は ι, κ, λ によつて 1 個の変数をもつ函数に帰着せしめることができるから、我々はこの場合のみを考察すればよい。先づ、次の図式 (VI) の特殊ケース、

$$(VI') \quad \varphi(x) = \mu y [\chi(x, y) = 0]$$

と、

$$(A) \quad \theta(x) = \mu z [\psi(z) = x]$$

との間の関係を考察しよう。 ι, κ, λ の性質から、 $\iota(x, y) = z$ とおけば、ある一定の x に対しては、最小の y は最小の z に対応するから、

$$\varphi(x) = \lambda[\mu z\{\chi(\kappa(z), \lambda(z)) = 0 \ \& \ \kappa(z) = x\}]$$

は明らかである。更に

$$\lambda[\mu z\{\overline{Sg}(\chi(\kappa(z), \lambda(z))) \cdot \kappa(z) = x\}] = \begin{cases} \varphi(x), & x \neq 0 \text{ のとき;} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

それ故、 $\varphi(z) = \overline{Sg}(\chi(\kappa(z), \lambda(z))) \cdot \kappa(z)$ とおけば、(A) から、

$$\phi(x) = \lambda(\theta(x)) + \overline{Sg}(x) \cdot \varphi(0)$$

従つて $\varphi(x)$ は $x+y$, $\overline{Sg}(x)$, $x \cdot y$, $\lambda(z)$ と (A) とから得られる。しかるに (VII) から、

$$\theta(x) = \phi^{-1}(x)$$

であるから、 $\varphi(x)$ は上記の函数 (変形の途中で ι 及び κ も必要であるが) と図式 (VII) によつて得ることができる。

上の二つの結果から、もし我々が原初函数に、 $x+y$, $x-y$, x^2 , $[\sqrt{x}]$, $Sg(x)$, $\overline{Sg}(x)$ をつけ加えれば、 ι , κ , λ を夫々定義できると共に、回帰図式を一般回帰函数の定義図式のうちから消去できる。更に図式 (VI) は、その特殊な形である (VII) によつておきかえられることが明らかである。従つて次に上述の (ii) を次の形で証明することができる。

定理 §2-4-1.

もし原初函数に二つの函数 $x+y$ と $\text{quadres}(x)$ とがつけ加えられるならば、すべての一般回帰函数はこれらの函数から図式 (IV) 及び (VII) の適用によつて得られる。

(証明)

上の結果から、 $x-y$, x^2 , $x \cdot y$, $[\sqrt{x}]$, $Sg(x)$, $\overline{Sg}(x)$ が定理の要求を充たしていればよい。

(1) $x \cdot y$ については

$$x \cdot y = [(((x+z)^2 - x^2) - y^2)/2]$$

と定義し得るから、上記の函数中、 $x+y$, $x-y$, x^2 と $[x/2]$ から定義できる。

(2) $x-y$ については、

$$\begin{aligned} \text{quadres}^{-1}(2x) &= \mu y [\text{quadres}(y) = 2x] \\ &= x^2 + 2x \end{aligned}$$

を用いると、もし $x \geq y$ ならば、

$$\begin{aligned} &\text{quadres}(\text{quadres}^{-1}(2x+2y)+3x+y+4) \\ &= \text{quadres}\left(\left(\frac{2x+2y}{2}\right)^2 + (2x+2y) + 3x+y+4\right) \\ &= \text{quadres}((x+y+1)^2 + 3x+y+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{quadres}((x+y+2)^2+(x-y)) \\
&= x-y
\end{aligned}$$

である。

(3) x^2 については、

$$x^2 = \text{quadres}^{-1}(2x) - 2x$$

と定義しうることは $\text{quadres}^{-1}(2x)$ の性質からして明らかである。

(4) $Sg(x)$ については、

$$Sg(x) = \text{quadres}((x^2)')$$

と定義しうる。

(5) $\overline{Sg}(x)$ については、

$$\overline{Sg}(x) = 1 - Sg(x).$$

(6) $[x/2]$ 及び $[\sqrt{x}]$ については、

先づ、 $Pd(x)$ を次のように定義する、

$$Pd(x) = \text{quadres}(\mu y \{ \text{quadres}(y') = x \}).$$

更に、「 x は偶数である」の特性関数は次のように定義できる。

$$\overline{Sg}(\text{quadres}((\text{quadres}^{-1}(x))'')),$$

即ち、この関数は x が偶数なるときは 0, 他るときは 1. これを用いると、関数 $\text{quadres}(x)$ は x のすべての値に対して $\text{quadres}(x) = y$ なる値を確定するから、 μ -演算を適用して、

$$[x/2] = \text{quadres}(\mu y \{ 2 \text{quadres}(y) + \overline{Sg}(\text{quadres}((\text{quadres}^{-1}(y))'')) = x \})$$

と定義しうる。更に、平方数である x に対しては、明らかに、

$$\sqrt{x} = \left[\frac{\text{quadres}(Pd(x))}{2} \right] + Sg(x)$$

が成立するから、

$$[\sqrt{x}] = \sqrt{x - \text{quadres}(x)}$$

と定義しうる。

以上によつて必要な関数はすべて定理の条件を充たすように定義されるから、定理は証明された。

さて、最後に上述の (iii) に入る前に、上の定理を用いて第 1 章第 3 節の定理 §1-3-5 に対応する次の結果を証明しておこう。

定理 §2 4-2.

すべての一変数の一般回帰関数は、原初関数として $S(x)$ 及び $\text{quadres}(x)$ のみから出発し、次の図式のいずれかを既知の関数 $\phi(x)$, $\chi(x)$ から新しい関数を定義するのに用いることによつて得られる。

(I) $\varphi(x) = \psi(x) + \chi(x)$ (II) $\varphi(x) = \chi(\psi(x))$ (III) $\varphi(x) = \chi^{-1}(x)$
 (但し、 $(x)(Ey)[\chi(x)=y]$ とする。)

(証明)

既に述べたことからして、定理 §1-3-5 の図式 (III) が上の図式 (III) によつておきかえられることは明らかである。更に、一般回帰函数に関する定理 §2-4-1 からして、すべての一般回帰函数は定義図式 (I)-(IV) 及び (VII) と $S(x)$, $\text{quadres}(x)$ とから得られる。従つて一変数の一般回帰函数を定義するのに、多変数の回帰函数を通して定義するという迂路を通らず直接に定義するとすれば、定理は、原初函数中の同一化函数及び零函数を除いて明らかに成立する。これらの二函数に関しては、

$$U_1 = \text{quadres}(\text{quadres}^{-1}(x)) \text{ 及び}$$

$$0_x = \text{quadres}((\text{quadres}^{-1}(x+x))')$$

と定義しうるから、定理は成立する。

これらの結果を用いて、次に Kleene の標準形定理の純数学的証明を与えることとする。

定理 §2-4-3.

すべての一般回帰函数 φ は次の形で表示しうる、

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(\mu y \{ (x_1, \dots, x_n, y) = 0 \}).$$

但しこゝで ψ, χ は共に初等回帰函数で、すべての $(x_1, \dots, x_n)$ に対し、 $\chi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ を満足させる夫々唯々一つの y が存在するものとする。

(証明)

ι, κ, λ の適用によつて、我々は定理を $n=1$ の場合、則ち、

$$\varphi(x) = \psi(\mu y \{ \chi(x, y) = 0 \})$$

の場合に還元することができる。次にこの場合に対して、定理 §2-4-2 を適用する。

(1) もし $\varphi(x)$ が初等回帰ならば、

$$\varphi(x) = \varphi(\mu y \{ |x-y| = 0 \})$$

とおくことができるから、定理は成立する。更に、定理 §2-4-2 の (I) それ自体は、初等回帰であるから、定理が、図式 (II) と (III) の適用から生ずる函数に対して成立することを示せばよい。そこで次の二つの場合を考察する。

(2) 図式 (II) の場合、

$$\varphi_1(x) = \psi_1(\mu y \{ \chi_1(x, y) = 0 \}) \text{ 及び}$$

$$\varphi_2(x) = \psi_2(\mu y \{ \chi_2(x, y) = 0 \}) \text{ を假定する。}$$

但し、 $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ はすべて初等回帰函数とする。そのとき、

$$\begin{aligned}\varphi_1(\varphi_2(x)) &= \phi_1(\mu z \{ \chi_1(\varphi_2(x), z) = 0 \}) \\ &= \phi_1(\mu z \{ \chi_1(\phi_2(\mu y \{ \chi_2(x, y) = 0 \}), z) = 0 \}).\end{aligned}$$

この式において、 y, z は x によつてたゞ一通りにきまる。 $w = \iota(y, z)^{21}$ を入れると、

$$\varphi_1(\varphi_2(x)) = \phi_1(\lambda(\mu w \{ \chi_1(\phi_2(\kappa w), \lambda(w)) = 0 \ \& \ \chi_2(x, \kappa(w)) = 0 \})).$$

ここで、 $\chi_1, \chi_2, \phi_2, \lambda, \kappa$, はそれぞれ初等回帰であるから、 μw 以下の括弧の内部は初等回帰となり、 $\&$ をとり去つて標準形に直すのは容易である。従つて、定理は成立する。

(3) 図式 (III) の場合、

こゝでも、

$$\varphi(x) = \phi(\mu y \{ \chi(x, y) = 0 \})$$

を仮定する。

(a) まづ $\chi(x, y) = 0$ が x の単調非減少函数として y を決定すると仮定する。このとき、

$$\varphi^{-1}(z) = \mu x \{ \varphi(x) = z \} = \mu x \{ \phi(\mu y \{ \chi(x, y) = 0 \}) = z \}$$

が成立するが、 y は x によつて唯々一通りにきまり、且つ x と共に増大するから、 $w = \iota(x, y)$ についても同様である。それ故、最小の w は最小の x に対応して、

$$\varphi^{-1}(z) = \kappa(\mu w \{ \phi(\lambda(w)) = z \ \& \ \chi(\kappa(w), \lambda(w)) = 0 \}) \quad \text{となる。}$$

よつて定理は成立する。

(b) もし $\chi(x, y)$ が x の単調函数として y を決定しない場合にも、 $\varphi(x)$ の表示を見出すことができる。与えられた x に対して、ある u を選び、

$$\kappa(u), \kappa(\lambda(u)), \kappa(\lambda(\lambda(u))), \dots, \kappa(\overbrace{\lambda(\dots(\lambda(u))\dots)}^{x \text{ 個}})$$

が既知の値をとるようにすると、可能な最小の u は上の値の各々と共に増加する。上記の最後の函数を $\kappa(\lambda^x(u))$ とかけば、

$$\varphi(x) = \phi(\kappa(\lambda^x(\mu u \{ \chi(0, \kappa(u)) = 0 \ \& \ \chi(1, \kappa(\lambda(u))) = 0 \ \& \ \dots \ \& \ \chi(x, \kappa(\lambda^x(u))) = 0 \}))),$$

或は

$$\varphi(x) = \phi(\kappa(\lambda^x(\mu u \{ \theta(x, u) = 0 \})))$$

(但し、 $\theta(x, u) = \sum_{n=0}^x \chi(n, \kappa(\lambda^n(u)))$ とする) とかくことができる。

上述のように u にはより強い条件が課せられているから、 $\theta(x, u) = 0$ なる u は明らかに x と共に増加する。今 $v = \iota(2^x u, \lambda^x(u))$ とおくと、 $\iota(2z, 0) \geq \iota(z, z)$ であるから、 v は亦、 x と共に増加する。従つて、

$$\varphi(x) = \phi(\kappa(\lambda(\mu v \{ \theta(x, [\kappa(v)/2^x]) = 0 \ \& \ \lambda(v) = \lambda^x[\kappa(v)/2^x] \}))).$$

ところが、 μv 以下の括弧内の函数は、すべて初等回帰であり、 v は x と共に増加するという条件を充たしている。これを、定理中の表示のようにかきかえるのは

容易であるから、定理は成立する。

註 1. J. Robinson [3] 参照。これから得られる初等回帰函数に関する結果は、同じく J. Robinson [4]. 更に数論の形式的体系との関聯については第 4 章第 4 節及び Tarski - Motoswski - Robinson [1].

註 2. 以下の議論では、 ι, κ, λ を次のように定義するものとしておく。

$$\iota(x, y) = (x+y)^2 + 3x + y$$

$$\kappa(z) = \overline{Sg}(\text{quadres}((\text{quadres}^{-1}(8z+1))^n) \cdot \text{quadres}(8z+1) \\ + (\text{quadres}((\text{quadres}^{-1}(8z+1))^n) \cdot ((8z+1) - ([\sqrt{8z+1}] - 1)^2))$$

$$\lambda(z) = \kappa(Pd(z - \kappa(z))) + \kappa((z - \kappa(z))') - \kappa(z).$$

これらの定義が定理 §2-4-1 の要求を充していることは明らかである。

第 5 節 回帰的集合及び回帰的枚举可能集合¹⁾

この節では、主として第 3 節の結果を用いて、超数学的研究に重要な役割を演ずる二三の定義と定理とを述べることとする。

定義 §2-5-1.

自然数の集合 B は、もしその要素を枚举する（くり返しを許して）一般回帰函数 φ が存在するならば、即ち、もし $\varphi(0), \varphi(1), \dots$ が B の要素の枚举であるならば、回帰的枚举可能であるといわれる。

これに対応して次の回帰的集合の定義も与えておく。

定義 §2-5-2.

自然数の集合 B の任意の要素 x に対して、ある一般回帰述語 $R(x)$ が存在し、

$$(x \in B) \equiv R(x)$$

なる関係が成立するとき、 B は回帰的集合といわれる。

さてこれらの定義と、第 3 節の結果を用いて容易に次の定理を証明することができる。

定理 §2-5-1.

空ならざる自然数の集合 B が回帰的に枚举可能であるのは、次の場合で且つその場合にかぎる。

述語 $x \in B$ に対して、

$$(x \in B) \equiv (Ey) R(x, y)$$

なる関係の成立する一般回帰述語 R が存在する。

(証明)

集合 B は回帰的枚举可能であるから、ある一般回帰函数 φ が存在して、 φ は B を枚举する。それ故、 B のすべての要素 x に対して、

$$(x \in B) \equiv (Ey)(x = \varphi(y))$$

が成立する。しかるに $\varphi(y)$ は一般回帰函数であるから $x = \varphi(y)$ を $R(x, y)$ とおけば、 R は一般回帰述語で、且つ $x \in B \equiv (Ey) R(x, y)$.

逆に、もし、 $(x \in B) \equiv (Ey) R(x, y)$ なる R が存在するならば、 B は空でないからその要素の数を m とし、

$$\varphi(x) = \mu y \{ (R(\kappa(x), \lambda(x)) \& y = \kappa(x)) \vee (\bar{R}(\kappa(x), \lambda(x)) \& y = m) \}$$

とおけば、 φ は一般回帰函数で、 B の要素を枚挙することは明らかである。(但し、 κ, λ は自然数と2個の自然数の組との間の写像とする。)

この定理の後にすべての回帰的集合は、回帰的枚挙可能な集合であることを次に証明しておく。

定理 §2-5-2.

空ならざる集合 B が回帰的集合なるとき、 B 及びその補集合 $\bar{B}$ は回帰的枚挙可能な集合である。

(証明)

B は回帰的集合なる故、

$$(x \in B) \equiv R(x)$$

なる一般回帰述語 R が存在する。今、

$$R(x, y) = R(x) \& y = y$$

とおけば、明らかに、 $R(x, y)$ は一般回帰述語で、

$$R(x) \equiv (Ey) R(x, y).$$

従つて、

$$(x \in B) = (Ey) R(x, y),$$

よつて B は回帰的に枚挙可能である。

$\bar{B}$ に対しては全く同様に、

$$(x \in \bar{B}) \equiv (Ey) R'(x, y) = (Ey)(\bar{R}(x) \& y = y)$$

とおけば、定理は成立する。

更にまた次の定理を証明しうる。

定理 §2-5-3.

もし集合 B 及びその補集合 $\bar{B}$ が共に回帰的枚挙可能な集合ならば、 B は回帰的集合である。

(証明)

B 及び $\bar{B}$ は回帰的枚挙可能であるから、一般回帰述語 R 及び S が存在して、

$$(x \in B) \equiv (Ey) R(x, y) \quad (x \in \bar{B}) \equiv (Ey) S(x, y)$$

が夫々成立する。そのとき、

$$(x \varepsilon B) \equiv R(x, \mu y (R(x, y) \vee S(x, y)))$$

なる関係が成立するが、 R は一般回帰述語であるから、定理は成立する。

上の結果からしてすべての回帰的集合は回帰的枚举可能であるが、この逆は成立しない。即ち回帰的枚举可能な集合は必ずしも回帰的集合ではない。この問題については次節にふれられるが、Gödel の定理その他に関連して、超数学的考察に極めて重要な役割を演ずるであろう。

註 1. この節に関しては、Kleene [3] [13] §60, Rosser [2] (Kleene [3] の結果の拡張)、Post [3] §1. L'Abbé [1] §IV.

第 6 節 非一般回帰函数及び述語の存在¹⁾

第 1 章の終りで述べたのと同様な議論を展開することによつて、我々は非一般回帰函数の存在を示すことができる。即ち、第 3 節の結果からして、与えられた任意の一般回帰函数 $\varphi(z)$ に対して、次の関係をみたすある数を見出すことができる。

$$(1) \quad \varphi(z) = \delta(\mu y T_1(e, z, y)),$$

即ち、 e は φ を回帰的に定義する方程式体系の Gödel 数である。今、

$$\psi(x, z) = \delta(\mu y T_1(z, x, y))$$

なる函数 $\psi(x, z)$ をとり、これを一般回帰函数だと仮定する。そのとき、

$$\varphi(z) = \psi(z, z) + 1$$

とおくと、これも亦一般回帰函数となる。そのとき (1) から

$$\varphi(z) = \psi(z, z) + 1 = \delta(\mu y T_1(e, z, y)).$$

しかるに $\psi(x, z)$ の定義から、

$$\delta(\mu y T_1(z, z, y)) + 1 = \delta(\mu y T_1(e, z, y))$$

ところがこの関係は $z=e$ になるとき明らかに不合理である。それ故 ψ は一般回帰函数ではない。同様に

$$\mu y T_1(z, z, y)$$

も亦一般回帰函数ではない。

この議論は一般回帰述語にも適用することができる。既に第 3 節において述べられたように、一般回帰述語 $R(x, y)$ に対して、次の関係をみたすある e を見出すことができる、

$$(Ey) R(x, y) \equiv (Ey) T_1(e, x, y).$$

この関係において $x=e$ を代入すると、

$$(2) \quad (Ey) R(e, y) \equiv (Ey) T_1(e, e, y).$$

それ故、古典論理学の変形法を用いて、

$$(Ey) R(e, y) \equiv (\overline{Ey}) T_1(e, e, y) \equiv (y) \overline{T}_1(e, e, y)$$

同様に (2) から

$$(y) \bar{R}(e, y) \equiv (\bar{E}y) T_1(e, e, y) \equiv (y) \bar{T}_1(e, e, y) \equiv (Ey) T_1(e, e, y).$$

$\bar{R}(e, y) \equiv S(e, y)$ とおけば、

$$(y) S(e, y) \equiv (Ey) T_1(e, e, y).$$

この考察から容易に次の二つの定理を証明しうる。

定理 §2-6-1.²⁾

回帰的枚举可能ではあるが、回帰的ではない集合が、 $C = \{x | (Ey) T_1(x, x, y)\}$ ³⁾ を例として存在する。

(証明)

C が回帰的集合であると仮定しよう。そのとき、ある一般回帰述語 R が存在して、

$$(x \in C) \equiv R(x) \equiv (Ey) T_1(x, x, y)$$

である。そこから、

(3) $(Ey) T_1(x, x, y) \equiv (y)(R(x) \& y = y)$ を得る。

今 $(R(x) \& y = y) \equiv S(x, y)$ とおけば、 $S(x, y)$, 従つて $\bar{S}(x, y)$ も一般回帰述語であるから、定理 §2-3-2 によつて、

$$(Ey) \bar{S}(x, y) \equiv (Ey) T_1(e, x, y).$$

こゝで上と同様の議論を適用すると、

$$(y) S(e, y) \equiv (\bar{E}y) T_1(e, e, y)$$

$$(y) S(e, y) \equiv (Ey) T_1(e, e, y).$$

しかるにこれは (3) と矛盾する。従つて C は回帰的集合ではない。しかし C は回帰的枚举可能ではある。何故なら、

$$(x \in C) \equiv (Ey) T_1(x, x, y)$$

であつて、 T_1 は初等回帰述語であるから、定理 §2-5-2 を適用しうる。

更に我々はもう一箇の重要な定理を証明することができる。

定理 §2-6-2.⁴⁾

回帰的枚举可能でない集合が、 $D = \{x | (y) \bar{T}_1(x, x, y)\}$ を例として存在する。

(証明)

$$(4) (y) \bar{T}_1(x, x, y) \equiv (\bar{E}y) T_1(x, x, y)$$

なる関係からして、D は定理 §2-6-1 の集合の補集合 $\bar{C}$ に等しい。それ故、

$$x \in D \equiv x \in \bar{C}$$

であるが、今、D が回帰的枚举可能だとすれば、

$$x \in D \equiv (Ey) S(x, y) \equiv (Ey) T_1(e, x, y)$$

が、ある e に対して成立する。そのとき、

$$(Ey) S(e, y) \equiv (Ey) T_1(e, e, y)$$

となるが、他方

$$x \in D \equiv (y) \bar{T}_1(x, x, y) \equiv (Ey) S(x, y)$$

及び (4) から、 $(Ey) S(e, y) \equiv (\bar{E}y) T_1(e, e, y)$. よつてこれは矛盾である。従つて D は回帰的枚举可能ではない。

上の定理の集合 D, 即ち $\{x|(y) \bar{T}_1(x, x, y)\}$ 或は $\{x|(\bar{E}y) T_1(x, x, y)\}$ は、次のような方法でうることができる。

定理 §2-3-2 によつて、述語 $(Ey) T_1(z, x, y)$ は $z=0, 1, 2, 3, \dots$ に対して、回帰的枚举可能な集合を枚举する。即ち、回帰的枚举可能な集合は次の表のどこかに現れるはずである。

$$\begin{aligned} z=0: & (Ey) T_1(0, 0, y), (Ey) T_1(0, 1, y), (Ey) T_1(0, 2, y), \dots \\ z=1: & (Ey) T_1(1, 0, y), (Ey) T_1(1, 1, y), (Ey) T_1(1, 2, y), \dots \\ z=2: & (Ey) T_1(2, 0, y), (Ey) T_1(2, 1, y), (Ey) T_1(2, 2, y), \dots \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

これに対角線論法を適用して、この表に現れえない $\{x|(\bar{E}y) T_1(x, x, y)\}$ 或はそれと等値な $\{x|(y) \bar{T}_1(x, x, y)\}$ 即ち、集合 $\bar{C}$ 及び D をうることができる。

さてこの節では $T_n(z, x_1, \dots, x_n, y)$ の $n=1$ の場合に対して議論を展開したが、これは一般に任意の n に対しても拡張できる。

即ち、

$$\begin{aligned} & \{z|(Ex)(y) T_2(z, z, x, y)\}, \{u|(x)(Ey)(z) T_3(u, u, x, y, z)\}, \dots \\ & \{z|(x)(Ey) T_2(z, z, x, y)\}, \{u|(Ex)(y)(Ez) T_3(u, u, x, y, z)\}, \dots \end{aligned}$$

に対しても同様な議論をなすことができる。

註 1. Kleene [3] §2, [7] §4, [13] §57.

註 2. Kleene [3] Th. XV.

註 3. $\{x|P(x)\}$ は $P(x)$ を成立せしめる x の集合を表わす。

註 4. Kleene [3] Th. XVI.

第3章 回帰函数理論の適用

既に、第1章及び第2章において、初等回帰函数と一般回帰函数の理論とを、超数学或いは(数論の)形式的体系との関聯の問題と切りはなして考察してきた。事実これらの理論は、一般回帰函数の超数学的定義において、形式的体系の構成とそれについての考察という手続きをふみはしたが、一般的な数論や論理学とは独立に

それ独自の分野をもつひとつの数学的理論として存在しうる¹⁾。しかしながら、回帰函数の理論の発展の過程は、密接に超数学的研究と結びついていたことも忘れらるべきではない。Skolem の初期の業績²⁾ においても、Gödel の劃期的な論文³⁾ においても、その関心の中心的な点は、むしろその超数学的性格にあつたと言えよう。それ故、最後に回帰函数の超数学への適用を考察することは、この理論の重要性を理解する上に最も必要なことと思われる。

超数学において、「構成可能な」という言葉のもつ重要性については、序論⁴⁾ において特に形式主義と直観主義との差異点の面から考察した。超数学、いかえれば証明論における構成可能な方法は、その理論全体への信頼を保持するための極めて重要な基準として登場したのである。しかしながらこの構成可能という直観的な言葉の示す内容は必ずしも明確ではない。我々が直観的に言いならわす言葉に等値なより形式的な、意味の明瞭な表現を与えることは、それによつてその概念を完全に説明することはできなくても、少なくともそれにまつわる問題を組織化することはできるであろう。回帰函数の理論はこの直観的な概念をより明確にするひとつの手懸りを与える。

我々が通常「実際に計算可能な」とか、或は、「実際に数えあげることのできる」とかいつた言葉を用いる場合には、計算できる方法や、数えあげることのできる具体的な手段とかが与えられていることを意味する。従つて、今超数学的方法が制限されている有限論的立場から自然数の系列のみに話をかざれば、「実際に計算可能な函数」とは、ある函数 $\varphi(x)$ の値が、 x が自然数なるとき、有限回の手続きによつてある値 n をとることを示すことができるという意味に解することができる。それ故この種の要求は第2章の始めに述べた一般回帰函数への要求からして、一般回帰函数の定義に課せられた条件であり、またその定義がこの条件を充たしていることも明らかである。従つて次にあげる、いわゆる Church の提題⁵⁾ の意味もこの見地から充分納得しうるものであろう。

提題 I

すべての「実際に計算可能な」(「実際に決定可能な」) 函数(述語)は一般回帰である。

この函数に関する部分は上の論議から明らかであるが、述語に関する部分も同様に結論しうる。即ち、ある述語が決定可能であるとは、述語 $P(x_1, \dots, x_n)$ がすべての $(x_1, \dots, x_n)$ に対して、真偽が決定可能なることを意味する。従つてその特性函数 $\chi(x_1, \dots, x_n)$ は P が真なるとき 0, 偽なるときは 1 なる値をとるから、 P の真偽の決定可能とは、函数 $\chi(x_1, \dots, x_n)$ の値の計算可能性とおきかえることができる。かくして上の提題の意味は明らかとなつた。

さて提題 I の逆は果して成立するであろうか。任意の一般回帰函数 φ に対しては、それを回帰的に定義する方程式体系 E が存在する。いゝかえれば、与えられた $(x_1, \dots, x_n)$ に対して、 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ の値が x であることを表明する方程式体系からの演釈が常に存在する。この場合、演釈の存在がたとえ理論的に保証されてはいても、それを実際に構成することができなければ、「実際に計算可能」とよぶことはできない。それ故こゝでは奇妙な事態が生ずる。即ち、「もし一般回帰函数を回帰的に定義する方程式体系を実際に構成しうるならば、すべての一般回帰函数は実際に計算可能である」こととなる。この種の表現が「実際に構成(計算)可能」という概念の解明に役だつとは考えられない。それ故提題 I の逆をたてることは意味がないであろう。それと共に、以上の考察から提題 I の果しうる役割も明らかとなる。提題 I は構成(計算)可能な函数(或は決定可能な述語)に等値な形式的(数学的)表現を与えるものではなく、それら函数或は述語を一般回帰函数(述語)に制限することによつて、それら直観的表現にまつわる諸問題を整理し、解決する手懸りを与えようとするものにすぎない。

提題 I の意味はかくして、ある意味で消極的でしかないが、我々はこの提題を支持する直観的、経験的ないくつかの論拠を有する。即ち、我々が通常いう「実際に計算可能な」函数を定義する手続きは、よく一般回帰函数の要求に合致していると共に、一般回帰函数の集合をこえて計算可能な函数を定義しようとする試みは、結局一般回帰函数の集合をこえぬか、或は、実際に計算可能とみなしえぬ函数を定義するに終るかの何れかに帰着している。他方、回帰函数とは独立に展開された、実際に計算可能な函数の研究、例えば Church の λ -定義可能性⁶⁾、Turing の計算可能函数⁷⁾、Post の正準系⁸⁾、Curry の結合的定義可能性⁹⁾ 等の諸概念もまた、全て一般回帰函数の集合と等値な集合を与えるに止まつているという事実である。これらの結果からして、提題 I を認めることによつて、我々は「実際に構成可能」という概念を少くとも不当に制限しすぎることはないであろう。

以上、第3章の初めにまづ一般回帰函数の超数学的考察との関係を略述したが、もつと厳密な意味での形式的体系へのこの理論の適用について、以下順を追つて考察を進めることとする。

註 1. 例えば、回帰函数の確率論への応用については、Church [9].

註 2. 特に Skolem [1].

註 3. Gödel [1].

註 4. 序論は紙数の関係から、省かれたことを諒承されたい。

註 5. Church [4] §7. 彼の Thesis は後に Kleene [7] §3 において整理された。こゝではこの Kleene の形において述べる。更に、Kleene [13] §60, 62. 参照。

註 6. Church [1] [2] [4] [8] [10], Church-Rosser [1], Church-Kleene [1], Kleene [1] [2], Rosser [1], Turing [3]. 回帰函数の理論との関聯、即ち、その等値関係の証明は、Kleene [4]. 尙 Rosser [5] の敘述は簡潔で要を得ている。

註 7. Turing [1] [2], Kleene [13] Chap. 13 にも要を得た敘述がある。

註 8. Post [1]—[3] 及び Rosenbloom [1].

註 9. Curry [1]—[14] 及び Rosenbloom [1], Rosser [1] [4] [5]. 更に概括的敘述としては Church の system と共に Feys [1].

第 1 節 形式的体系への要求と回帰函数の理論

我々がいかなる理論にもせよ、ひとつの理論を構成するとき、その理論が論理的一貫性をもつことを要求する。これは我々の理論的探求の基盤をなす、もつとも根本的な衝動もしくは欲求とも言わべきものである。そしてこの欲求は簡單化すれば次の点に帰着させうる。理論全体を幾つかの基本的原理から導きだすことである。

学問のうちでもすぐれて理論的であると考えられる数学においては、この種の要求はもつとも顯著に、且つ端的に現れている。公理的方法はその具体的な例に他ならない、即ち、我々は少数の公理を措定し、一定の方法によつて理論の全定理を導きだす。この性格は Hilbert の形式的公理論的方法において、一段と顯著である。我々は通常暗黙の中に前提している数々の要素をも、そこでは完全に顯意化しようとする。形式化の努力とは、諸概念を意識の納屋からひきずりだして、白日の下に点検しようとする努力に他ならない。それ故、ある(数学的)理論が、できるかぎり完全に形式化されたとき、我々が直観的に無雜作に使つていた諸概念はそれぞれその形式的な対応物を形式的な体系内に要求する。

一般に形式的体系は、形式的な対象を有する。もし、自然数論の形式化をとれば、我々は先づ、直観的な自然数 $0, 1, 2, \dots$ に対応する形式的対象として、数記号 $0, 1, 2, \dots$ を定める。更に自然数に関する述語 $P(0), P(1), P(2), \dots$ 或は $P(x)$ に対応する形式的体系として、 $A(0), A(1), A(2), \dots$, 及び $A(x)$ が存在するように構成する。このような形式的体系の組織化のうちで、重要な意味をおびるのは証明の概念である。我々は理論への要求からして、直観的な「真である」という概念を「証明」の概念によつておきかえようとする。それではこの証明なる概念は形式的体系ではどのような形をとるであろうか。それは勿論ある与えられた一定の前提(公理)からの導出(演釈)可能性に他ならない。従つてもし、公理および演釈の諸規則がそれぞれよく形式化されるならば、我々はその形式的体系内における証明について、極めてはつきりと語りうるはずである。事実、今直接に問題としている自然数の形式的体系に対しても、我々はこの体系における証明の概念について明確に語りうる程度にはよく形式化することは要求しうるのである。かくして「証明」

ということは通常ある定理の「証明（という演釈）の存在」ということにおき直されて、形式的対象のひとつとなる。従つて例えば、ある命題（定理） $A(x)$ の証明という形式的対象として Y が存在するとする。このとき、明らかに「 $A(x)$ は証明可能」であろう。それ故、今「 $A(x)$ は証明可能である」を $\vdash A(x)$ とかき、「 Y は $A(x)$ の証明である」を超数学的述語、 $\mathfrak{M}(x, Y)$ とかくことにすれば（こゝで $A(x)$ はある自然数 x に対応する数記号 x に関する述語であるから、 $\mathfrak{M}$ は x に関する述語としてかゝれる）、次の関係の存在することは明らかである。

$$(1) \quad (EY) \mathfrak{M}(x, Y) \equiv \vdash A(x)$$

我々は通常命題 $P(x)$ が真であるか否かを決定しうることを要求する。従つて形式的体系内では $P(x)$ に対応する $A(x)$ が証明可能であるか否かを決定しうることを要求する。しかるに、形式的体系をいわゆる Gödel 化すれば、即ち、形式的体系内の諸対象と自然数集合との間の 1 対 1 の対応をつけうるとすれば、(1) 中の Y はそれに附されたある数、例えば y を Gödel 数としてもつこととなる。それ故上の関係は、超数学的述語 $\mathfrak{M}$ に対応する直観的述語 R によつておきかえられて、

$$(2) \quad (Ey) R(x, y) \equiv \vdash A(x)$$

となる。

従つて、直観的述語 $P(x)$ に対応する形式的対象 $A(x)$ が証明可能であるためには、上記の (1) 中の Y 、或いは (2) 中の y が実際に見出される（計算される）必要がある。そのためには提題 I を適用して、次の提題 II を形式的体系への要求として定式化することができる。

提題 II.¹⁾

ある与えられた形式的体系 S において、「 $A(x)$ が S において証明可能である」という述語に対しては、

$$(Ey) R(x, y) \equiv \vdash A(x)$$

なる関係の成立する一般回帰述語 R が存在する。

上述の提題 II は我々が普通用いる形式的体系あるいは形式化等の表現に対して、ひとつの明確な基準を与えるものであつて、以後用いられる形式的体系に一定の意味を与えることとなる。

また上の議論において、我々は直観的述語 $P(x)$ が真なるときには、 $\vdash A(x)$ ($A(x)$ は証明可能) であり、且つそのときにかぎる、即ち、

$$(3) \quad P(x) \rightarrow \vdash A(x)$$

$$(4) \quad \vdash A(x) \rightarrow P(x)$$

なることを要求している。しかしこの種の要求は常に充たされるとは限らないので、一般に形式的体系 S が (3) を充たしているとき、 S は $P(x)$ に対して「必要

な」²⁾ 形式化であるといい、逆に (4) が成立するとき、 S は「充分な」³⁾ 形式化であるという。この定義は後に利用されるであろう。

註 1. 前節註 5 参照。

註 2. 3. この条件に対して夫々屢々、完全性及び無矛盾性の条件なる名称が附されているが、この条件は形式的体系と、直観的な体系との間の関聯に関するもので、後に出てくる、演算的に完全或は無矛盾なる通常の用法と区別する必要があるのでこの語を使用した。

第 2 節 Gödel の定理とその拡張

この節ではいよいよ、回帰函数の超数学的研究への適用の途を開いたと共に、おどろくべき結果を得た Gödel の劃期的な論文¹⁾ の内容にふれる。

Gödel はこの論文の前半において、Principia Mathematica のシステムを更に厳密にした論理学に Peano の自然数論の公理を加えた、彼のいう System P を構成して (§2), 彼の議論を展開する。しかし彼の議論はより一般的な形で展開することができる故に、彼の功績の一半はたしかに一つの現実中存在する重要な形式的体系に即して、彼の議論を進めたことにあるのは認めねばならぬが、こゝでは System P をそのまま再構成することは避けることとする。従つて、こゝでは彼の定理が成立するのに必要とされる条件を一般的な形で述べることにしたい。

序論において略述したように、ある形式的体系を考察する際 (即ち、超数学的研究を行うとき)、我々は常に一種の直観的な論理に頼らざるを得ない。それと共に第二次³⁾ の完全な形式化を試みるときには、対象となつた理論の論理構造をもできるだけ explicite な形におかねばならぬ故に、完全に形式化された理論は常にある形式化された論理学のシステムとその理論に固有な公理との融合からなる体系として現れる。従つてそこでは、二つの論理が前提とされているわけである。超数学を展開する直観的な論理と、超数学の対象とされる形式的体系中に含まれる形式的な論理とである³⁾。それ故この論理を L とすれば Gödel の定理が適用されるためには、先づ

(I) 論理 L は形式化されていなければならない、即ち、論理 L を構成する記号および L の対象を構成する規則、公理、更に代入、置換、演算の規則等がはつきりと与えられていなければならない。より詳しくいえば、 L に自然数の形式的体系の公理の幾つかを加えた S において、

(a) S の諸対象は最初に与えられた有限個もしくは可附番無限個の記号のいくつかの集合として構成される。これらの記号を原初記号とよべば、原初記号の集合は夫々、定記号 (Constant), 変記号 (Variable) 等々とよばれる部分集合に分けられ

る。この名称は S の構成に本質的ではないが、 S の対象を解釈する場合に重要な役割を果たす。 S の対象を構成するには、原初記号の一定数を選ぶ必要はあるが、同じ記号がくり返し用いられることを妨げない。

(b) S の対象の中には、「整式⁴⁾」(formula) とよばれる一定の対象があつて、それは有限個の原初記号から、一定の規則(形成規則、formation rule)によつて構成される。この整式が重要な意味をもつのは、それが解釈された場合に、日常言語の文章になるという意味で、形式的体系内の「命題」と考えられるからである。従つて形成規則もこの解釈によつてある(有意味な)文章が対応するような整式を与えるように定められている必要がある。かくして、ある論理式 A が日常言語の文章 P に対応しているとき、 A を P の「 S における表現」という。一般に、日常言語のすべての文章が S 内にその表現をもつことはない。

(c) S の記号中には、否定と解釈される記号例えば $\sim$ が存在して、もし A が S 内における P の表現であるならば、 $\sim A$ は P の否定を S 内で表現する。

(d) すべての自然数に対して、それを S 内で表現する S の対象(通常数記号 numeral, Zahlzeichen とよばれる)、例えば、 $0, 1, 2, \dots$, が存在しなければならない。

(e) S の記号には変記号とよばれるもの、例えば $x_1, \dots, x_n$ が存在して、もし S の整式 $A(x_1, \dots, x_n)$ がある文章 P を表現しているならば、 P も変項(変数) $x_1, \dots, x_n$ を有する文章、即ち $P(x_1, \dots, x_n)$ の形である。

(f) 更に S の変形規則(transformation rule)として、もし整式 A の変記号 x_i を、他の S の対象、例えば $0, 1, \dots$ 等によつておきかえる操作(代入)が許されていなければならない。そのとき、 A から得られる整式 B は、 A の表現していた文章 P に上の操作に対応する操作(例えば変数に常数を代入する)を施して得られる文章 Q を表現することとなる。特に、もし変記号 x をもつ $G(x)$ が S 内で、「 x は w なる性質をもつ」という文章を表現していて(但し、 x は x に対応するとする)、且つ、もし、 $G(n)$ が G のすべての変記号 x を、自然数 n を表現する n ((d)によつてそれは保証されている)によつておきかえられたものとすれば、 $G(n)$ は文章「 n は w なる性質をもつ」を S 内で表現する。

(g) 最後に、 S 内の整式のあるものが「証明可能」として特徴づけられる一定の手続きが与えられていなければならない。「証明可能」の定義は、記号の意味に訴えることなく、純粹に構造上から(syntactically)、つまり「公理」と「演釈」(或いは証明)とから定義される。我々は常に真なる文章を S 内で表現する証明可能な整式が存在することを欲するであろうが、事実はこの希望に反することを他ならぬ Gödel の定理は示すであろう。以下整式 $A(x)$ の(S における)証明可能を $\vdash A(x)$

($\vdash A(x)$) とかくこととする。

さて上に形式化された論理 L に関する条件をあげたが、次に回帰函数の理論との関係を示さねばならない。

(II) いかなる初等回帰函数 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ をとつても、 n 個の自由変記号 $x_1, \dots, x_n$ をもつ整式 $F(x_1, \dots, x_n)$ があつて、すべての $(x_1, \dots, x_n)$ に対して、

$$(1) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = w \rightarrow \vdash F(x_1, \dots, x_n, w)$$

$$(2) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) \neq w \rightarrow \vdash \sim F(x_1, \dots, x_n, w)$$

なる関係が成立する。

(ここで、 $x_1, \dots, x_n, w$ は、 $x_1, \dots, x_n, w$ のとる数値を S 内で表現する対象 (数記号) とする。)

さてここで Gödel 数の理論を導入しなければならない。上にあげた条件をみたす形式的体系 P_1 (Gödel においては P) は、原初記号の集合は有限 (もしくは可附番無限) であるから、それに素数 $p_i (0 \leq i)$ を対応させることができる。さらに P_1 のすべての対象に唯一通りに対応する自然数をもつように、与えられた対象を構成する n 個の記号に対応する変数 $a_0, \dots, a_{n-1}$ から

$$a = 2^{a_0} \cdot a^{a_1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}$$

なる数 a を構成すれば、 a は唯々一通りに決まると共に、 a を唯々一通りに分解して $a_0, \dots, a_{n-1}$ を求めることもできる。即ち、 $a_i = (a)_i$ 。且つ $i = Ih(a)$ なる関係が得られるが、これらは「 a は素数である」($Pr(a)$) と共に全て初等回帰なることも注意する必要がある。

更に、上の (I f) に述べられた代入は、変記号 x の Gödel 数を x_0 とし、整式 $A(x)$ の Gödel 数を y としたときに $Sb(y_{x_0}^{x_0})$ と記号化され、「 y なる Gödel 数をもつ整式 $A(x)$ の変記号 x の Gödel 数 x_0 を数記号 x_0 によつておきかえる」という述語を意味する。そしてこの Sb は初等回帰述語であることが要求される。かくして P_1 内の対象と自然数との間に 1 対 1 の対応が得られる。このような対応関係を確立したあとでは、 P_1 内の対象の代りに直観的な数を対象として考察できるから、 P_1 の諸対象に関する超数学的述語はそれに対応する直観的な数論の述語となる、いゝかえれば超数学的述語と等値な直観的な数論の述語が得られる。このような準備を施したあとで、特に次の二つの超数学的述語に対して一定の条件が充たされねばならない。

(III) P_1 のある対象 Y について、「 Y が公理である」($\mathcal{U}_G(Y)$) は、 Y の代りにその Gödel 数 y をとると、直観的な述語「 y は公理である」($Ax(y)$) となるが、この $Ax(y)$ は初等回帰述語である。いゝかえれば、 $Ax(y)$ の成立する y の集合は初等回帰的集合である。

(IV) P_1 のある対象 Y が、他の対象 Y_1, Y_2 から演算規則 (Modus ponens) によつて得られるとき、「 Y は Y_1 及び Y_2 の直接的帰結である」($\text{Fl}(Y_1, Y_2, Y)$) は、 Y, Y_1, Y_2 の Gödel 数を y, y_1, y_2 とすれば、「 y は y_1 及び y_2 の直接的帰結である」($\text{Fl}(y_1, y_2, y)$) という直観的述語となり、且つ、この述語は初等回帰である。即ち、 $\text{Fl}(y_1, y_2, y)$ を満足させる y の集合は初等回帰的集合である。

さて上述の条件 (I)–(IV) を満たしている形式的体系 P_1 が更に次の条件を満たしているとき、 P_1 は ω -無矛盾という。

ω -無矛盾の条件：形式的体系 S の任意の整式 $A(x)$ をとつたとき、いかなる x に対しても、

$\vdash A(0), \vdash A(1), \dots, \vdash \sim(x)A(x)$ のすべてが成立することはない。いゝかえれば、 S の整式の任意の集合 C をとり、 C の整式と S のすべての公理との直接的帰結である整式の集合を $\text{Flg}(C)$ としたとき、

$$(n) [A(n) \in \text{Flg}(C)] \ \& \ \sim(x)A(x) \in \text{Flg}(C)$$

を真ならしめるいかなる $A(x)$ も存在しない。尙 ω -無矛盾なシステムは必ず (単純) 無矛盾 ($\vdash (x)A(x) \ \& \ \vdash \sim(x)A(x)$ が成立しない) であることは明らかである。

P_1 がこの条件をみたすとき、次の定理を証明することができる。

定理 §3-2-1.⁴⁾

P_1 の整式の ω -無矛盾で、且つ初等回帰的ないかなる整式の集合 C をとつても、 $(x)A(x)$ も $\sim(x)A(x)$ も共に $\text{Flg}(C)$ に属しないある整式が $A(x)$ 存在する。

この定理を証明する前に次の補助定理を証明しておくのが便利であろう。 $A(x)$ は x を自由変記号としてもつ整式だとすると、 $A_n(x)$ によつて $A(x)$ は n なる Gödel 数をもつことを意味するとする。

補助定理 §3-2-1.

「 z は整式 $A(x)$ の Gödel 数で (即ち、 $A_z(x)$)、 y は $A_z(z)$ の証明の Gödel 数である」という述語を $Q(y, z)$ とすれば、 $Q(y, z)$ は初等回帰で、且つ、

$$(3) \quad Q(y, z) \rightarrow \vdash B(y, z)$$

$$(4) \quad Q(y, z) \rightarrow \vdash \sim B(y, z)$$

なる関係の成立する $B(y, z)$ が P_1 内に存在する。

(証明)

次のような述語を定義する。⁵⁾

$$(5) \quad Bw_c(x) \equiv_{df} (n) [n \leq Ih(x) \rightarrow Ax((x)_n) \vee ((x)_n \in C) \vee (Ep)(Eq) \\ \{0 < p < n \ \& \ 0 < q < n \ \& \ Fl((x)_p, (x)_q, (x)_n)\}] \ \& \ Ih(x) > 0$$

$$(6) \quad B_c(x, y) \equiv_{df} Bw_c(x) \ \& \ (x)_{Ih(x)} = y$$

$$(7) \quad Bew_c(x) \equiv_{df} (Ey) B_c(y, x)$$

これらの述語はそれぞれ、「 X は C における証明である」「 X は Y の C における証明である」「 X は C において証明可能である」($\vdash_c X$) に対応する直観的述語である。この中 (5) は第 1 章の初等回帰函数の理論及び上の条件 (III) (IV) と定理中の C に対する条件によつて初等回帰なることは明らかである。従つて (6) も亦初等回帰である。 $Q(y, z)$ は (5) (6) を用いて、

$$Q(y, z) \equiv_{df} B_c(y, Sb(z_2^{x_0}))$$

と定義しうるが、 P_1 において Sb は初等回帰述語であるから、 $Q(y, z)$ も初等回帰である。それ故条件 (II) によつて、(3) (4) を満足させる $B(y, z)$ が P_1 には存在する。

さて次に定理の証明に移る。

今、整式 $(y) \sim B(y, z)$ をとり、それを $A(z)$ によつて表わす。 $A(z)$ の Gödel 数を p とすれば、上の記号を用いて $A_p(z)$ となる。そのとき、 $A_p(p)$ は明らかに、 $(y) \sim B(y, p)$ (この可能性は (If) によつて保証されている)。

(i) 先づ $\vdash_c A_p(p)$ と仮定しよう。 $A_p(p)$ の Gödel 数を k とすれば、このときは (7) から、 $Bew_c(k)$ でなければならぬが、そのためには $B_c(y_1, k)$ なるある y_1 がなければならぬ。ところが $A_p(p)$ は $A_p(z)$ の z に p を代入したのであるから $k = Sb(p_2^{x_0})$ である。 Q の定義からして、 $B_c(y_1, k)$ の成立するときは、 $B_c(y_1, Sb(p_2^{x_0}))$ が成立し、従つて $Q(y_1, p)$ が成立する。そのときは (3) から

$$\vdash_c B(y_1, p).$$

ところが $B(y_1, p)$ は $\sim(y) \sim B(y, p)$ に等しいから

$$\vdash_c \sim(y) \sim B(y, p)$$

これは我々の仮定 $\vdash_c A_p(p)$, 即ち $\vdash_c (y) \sim B(y, p)$ と (単純に) 矛盾する。しかるに C は、仮定により ω -無矛盾であるから、(単純) 無矛盾である。しかるに矛盾が生じたから帰謬法によつて、 $\vdash_c A_p(p)$ は成立しない。

(ii) (i) によつて $\vdash_c A_p(p)$ は成立しない。即ち、 $\overline{Bew_c(p)}$ 。このとき $(n) \overline{B_c(n, p)}$ である。それ故 $(n) \overline{Q(n, p)}$ 。これと (4) から

$$\vdash_c \sim B(0, p), \vdash_c \sim B(1, p), \dots$$

がすべて成立する。従つて P_1 の ω -無矛盾性から、 $\vdash_c \sim(y) \sim B(y, p)$ は成立しない。即ち $\vdash_c \sim A_p(p)$ は成立しない。

よつて $A_p(p)$ を例として定理は成立する。

定理 §3-2-1 の直接的帰結として、我々は次の定理を得る。定理 §3-2-1 の証明中 (I) において示された方法を端的にかけば、

(A) C が無矛盾であるという仮定から、 $A_p(p)$ は証明可能でないことを結論する、

ということであつた。今 $A_p(p)$ の Gödel 数を r とし、 C が無矛盾なることを $Wid(C)$ とかけば、(A) は明らかに、

$$(B) \quad Wid(C) \rightarrow \overline{Bew_c(r)}$$

とかける。それ故、(6) から、

$$Wid(C) \rightarrow (y) \overline{B_c(y, r)}.$$

ところが、 r は $A_p(p)$ の Gödel 数であるから、 $Sb(p_p^{z_0})$ である。故に

$$Wid(C) \rightarrow (y) \overline{B_c(y, Sb(p_p^{z_0}))}.$$

従つて $Q(y, z)$ の定義から

$$(8) \quad Wid(C) \rightarrow (y) \overline{Q(y, p)}.$$

さて、今、我々が超数学の無矛盾性の証明に対して自然に要求するように、

(C) $Wid(C)$ に対応する対象が形式的体系 P_1 内に存在する、即ち、 P_1 の無矛盾性を表現する P_1 の整式があると仮定し、それを $Consis(C)$ と表わすとする。

そのとき、 $\overline{Q}$ に対しては条件 (II) 及び (4) から、

$$\overline{Q(y, p)} \rightarrow \vdash \sim B(y, p)$$

なる $B(y, z)$ が存在するから、 $(y) \overline{Q(y, p)}$ に対しては、 $(y) \sim B(y, p)$ が、即ち、 $A_p(p)$ が対応する。従つて、我々は (8) に対応して、完全な形式化のあとでは、

$$(D) \quad \vdash_c Consis(C) \supset A_p(p)$$

が P_1 において成立することを要求するであろう。但しこゝで“ $\supset$ ”は P_1 の implication とする。しかるに、もし $\vdash_c Consis(C)$ なることを仮定すれば、(D) から

$$\vdash_c Consis(C) \supset A_p(p)$$

であるから、Modus ponens により、

$$\vdash A_p(p)$$

となろう。ところがこれは (A) と矛盾することとなる。それ故、 $\vdash_c Consis(C)$ は成立しない、即ち、 C の無矛盾性は C において証明可能ではない。

以上の結果を我々は次の形に表現することとしよう。

定理 §3—2—2.⁶⁾

C を整式の任意の無矛盾な回帰的集合とする。 C が無矛盾であるという命題を表現する整式を $Consis(C)$ とすれば、 $Consis(C)$ は C において証明可能ではない、即ち $\vdash_c Consis(C)$ は成立しない。特に P_1 の無矛盾性の証明は P_1 が無矛盾と仮定されるかぎり、 P_1 において証明可能ではない。

この定理の結果、無矛盾性の証明を超数学の直接の目的とした Hilbert の意図は、有限論的立場からは不可能なることが示された。この意味でこの定理は歴史的意義をもつものである。

以上で Gödel の得た結果のうちで重要な二定理を証明したが、次に Rosser による、上の二定理の拡張⁷⁾ について簡単に述べることにする。

Gödel の証明の適用されたシステム P_1 の条件中、(III) 及び (IV) を次のように拡張したシステムを P_2 とする。

(III') $Ax(y)$ が成立する y の集合、即ち公理の Gödel 数の集合が回帰的枚挙可能である。

(IV') 演算規則の集合が一般回帰である、即ち、「 y が y_1 及び y_2 の直接的帰結である」という述語が “ $(En)[\varphi(n, y_1, y_2) = y]$ ” に等値であるような一般回帰函数 $\varphi(n, y_1, y_2)$ が存在する。

このような P_2 に対しては次の定理が証明される。

定理 §3—2—3.⁸⁾

(もし P_2 の証明可能な整式が回帰的枚挙可能ならば、)

1. P_2 が ω -無矛盾だと仮定すれば、 $\vdash(x)A(x)$ も $\vdash\sim(x)A(x)$ も共に P_2 において成立しないような、ある初等回帰述語 $A(x)$ が存在する。

2. P_2 が (単純) 無矛盾だと仮定すれば、 P_2 が (単純) 無矛盾であることを表現する P_2 の整式 $\text{Consis}(P_2)$ は、 P_2 において証明可能ではない。

(証明)

証明は定理 §3—2—1, 2 の証明を変更すれば得られる。 $\varphi(m)$ を P_2 の証明可能な整式を回帰的に枚挙する初等回帰函数とすれば、

$$B_c(z, y) \equiv [\varphi(x) = y]$$

$$\text{Bew}_c(x) \equiv (Ex)[\varphi(x) = y]$$

とおくことによつて、定理 §3—2—1, 2 の証明はそれぞれ、1, 2 の証明となる。

しかしこの証明には埋めねばならぬギャップが二つある。

(E) 回帰的枚挙可能集合は、初等回帰函数によつて枚挙される。

(F) (III') (IV') なる条件がみたされるとき、証明可能な整式は回帰的に枚挙可能である。

(E) の証明は、定理 §2—5—1 と 定理 §2—3—2 から容易に得られる。

(F) についてはその証明をこゝに与えない、従つて定理の括弧内の条件を用いて証明した。Kleene [3] §1, Th. I. 及び Rosser [2], Lemma II. 参照。(F) が成立すれば、上述及び次の定理中の括弧内の条件は、 P_2 に対して省くことができるのは明らかである。

更に Rosser による Gödel の定理のもう一つの Modification を与えることにする。

定理 §3—2—4.⁹⁾

もし (P_2 の証明可能な整式が回帰的枚举可能であり、且つ) P_2 が (単純) 無矛盾であるならば、ある P_2 の初等回帰な整式 $A(x)$ が存在して、 $\vdash (x)A(x)$ も $\vdash \sim (x)A(x)$ も共に P_2 において証明可能でない。

(証明)

$\varphi(m)$ は P_2 の証明可能である整式を枚举する初等回帰函数とする。今、

$$(9) \quad B_c(x, y) \equiv_{df} \varphi(x) = y$$

$$(10) \quad Bew_c(y) \equiv_{df} (Ex)(B_c(x, y))$$

$$(11) \quad Pr_c(x, y) \equiv_{df} B_c(x, y) \ \& \ (\overline{Ez})[z \leq x \ \& \ B_c(z, Ng(y))]$$

$$(12) \quad Provc(y) \equiv_{df} (Ex)[Pr_c(x, y)]$$

但し、(11) の $Ng(y)$ は y に対応する整式 Y の否定 $\sim Y$ の Gödel 数だとする。

$$\text{今、} \quad Q'(x, y) \equiv_{df} Pr_c(x, Sb(y_{y_0}^y))$$

と定義すると、 $Q'(x, y)$ は初等回帰であるから、次のような $P(x, y)$ が P_2 内に存在する。

$$Q'(x, y) \rightarrow \vdash P(x, y)$$

$$\overline{Q'(x, y)} \rightarrow \vdash \sim P(x, y)$$

さて、このような整式 $P(x, y)$ をとり、その否定の全称 $(x)\sim P(x, y)$ を $A'(y)$ とおき、Gödel 数を q とすれば、 $A'_q(y)$ とかける。こゝで $A'_q(q)$ 即ち、

$$(x)\sim P(x, q)$$

をとれば、 $\vdash A_q(q)$ も $\vdash \sim A_q(q)$ も P_2 においては成立しない。その証明を次に与える。

(i) 先づ $\vdash A'_q(q)$ と仮定しよう。 $A'_q(q)$ の Gödel 数を n とすれば、 $B_c(x_1, n)$ なる x_1 がなければならない。従つて P_2 が無矛盾ならば $(x)\overline{B_c(x, Ng(n))}$ ($Ng(n)$ は $\sim A_q(q)$ の Gödel 数とする) が成立せねばならない。それ故 $Pr_c(x_1, n)$ が成立する。ところが n は $A'_q(q)$ の Gödel 数、即ち $Sb(q_{q_0}^y)$ であるから、 $Q'(x_1, q)$ が成立せねばならぬ。よつて、

$$\vdash P(x_1, q)$$

が成立する。しかるにこれは仮定 $\vdash A'_q(q)$ 即ち $\vdash (x)\sim P(x, q)$ と矛盾する。

(ii) $\vdash \sim A'_q(q)$ と仮定しよう。 $\sim A'_q(q)$ の Gödel 数を r とすれば、 $B_c(x_2, r)$ なる x_2 が存在せねばならぬ。従つて上と同様に $Pr_c(x_2, r)$ が成立する。

他方、 $B_c(x, r)$ なる x が存在するから、

$(x)(\overline{B_c(x, q)} \vee (Ez)(z \leq x \ \& \ B_c(x, Ng(q))))$ が成立する¹⁰⁾。ところがこれは $(x)(\overline{B_c(x, q)} \ \& \ (\overline{Ez})(z \leq x \ \& \ B_c(x, Ng(q))))$ に他ならぬから、 $(x)\overline{Q'}(x, q)$ である。よつて、

$$(x) \overline{Q'(x, q)} \rightarrow \vdash (x) \sim P'(x, q)$$

なる $P'(x, q)$ が存在するが、これは即ち、 $A_q(q)$ である。従つて $\vdash A_q(q)$ が成立する。しかるに P_1 の無矛盾性からして、これは我々の前提 $\vdash \sim A_q(q)$ に反する。よつて、 $\vdash \sim A_q(q)$ は成立しない。従つて定理は $A_q(q)$ を例として成立する。

この定理はその証明において、 P_1, P_2 に共通する性質しか用いていない。それ故、この P_2 についてなされた証明は、そのまゝ P_1 にも適用できる ((9) - (10) の定義を定理 §3-2-1 におけるように変更することによつて)。

以上で、Gödel の定理及び Rosser によるその拡張を証明したが、Kleene による拡張については第 3 節において、Church の定理の拡張と共にまとめて考察することにする。

註 1. Gödel [1].

註 2. こゝでは直観的数学の公理化に対して、その論理構造まで含めた完全な形式化を意味する。

註 3. この二種の、しかも屢々あまり明確にされていない論理の関聯については、Church [1], Kleene [13] §15 に簡単な敘述がある。

註 4. Gödel [1], Satz VI.

註 5. この種の定義を厳密に与えるには P_1 の体系の正確な敘述と Gödel 化の方法の明示とが必要である。従つて、この定義は半直観的なものといふだけでは理解される他はないであろう。証明も亦、従つて、全く厳密ではない。この註は、以下すべての定理にも妥当する。詳しくは、Gödel [1], Kleene [13], Hilbert-Bernays [2] §4, 5. 参照。

註 6. Gödel [1] Satz XI.

註 7. Rosser [2].

註 8. Rosser [2] Th. I.

註 9. Rosser [2] Th. II.

註 10. この部分の厳密な証明は、不可能なので、こゝでは直観的な議論を展開した。詳しくは Rosser, Ibid. Kleene [13], p. 209.

註 11. これら定理の informal な議論については、Rosser [8]. 更により一般的な議論については、Mostowski [1] §4. 及び [2] [3].

第 3 節 Church の定理及びその拡張

前節である程度具体的に提示した形式的体系 P_1 について、ある整式 $A(x)$ の証明可能の問題を考察してみよう。 $A(x)$ の Gödel 数を m とすると、もし $A(x)$ が証明可能だとすれば、その証明が存在しなければならぬ。

処がその証明も亦 Gödel 数を有するから、定理 §3-2-1 において定義されたのと類似の述語、 $B(y, z)$ をとり、「Gödel 数 y は Gödel 数 z の証明である」とすれば、 $A(x)$ が証明可能なときは、ある y に対して $B(y, m)$ が成立せねばならない。即ち $(\exists y) B(y, m)$ 。これを記号化すれば、

$$(1) \quad (\exists y) B(y, m) \equiv \vdash A(x).$$

さて、「実際に $\vdash A(x)$ が成立するかどうか」を判定するためには、 $B(y, m)$ の成立する y の値を見出さなければならぬ。ここで、提題 I を適用すれば、それは結局 $B(y, z)$ が一般回帰述語なることを要求することに等しくなる。既に見たように $B(y, z)$ は P_1 においては、初等、従つて一般回帰述語であつた。しかるに、 P_1 においては、 $\vdash A(x)$ も $\vdash \sim A(x)$ も証明できぬある整式、即ち $A_p(p)$ が存在した。つまり、 P_1 には証明可能か否かの判定のできぬ整式が存在した訳である。これは P_1 より広い P_2 についても全く同様であつた。

これはまたいふかえれば、証明可能な整式の集合は回帰的枚举可能ではあるが、回帰的ではないともいうことができる。そしてこれは、第2章第6節に証明された事態と対応している。従つて提題 I と定理 §2-6-1, 2 とから、直ちに次の定理が得られる。

定理 §3-2-1.¹⁾

$(\exists y) T_1(x, x, y)$ 或いは $(y) \overline{T}_1(x, x, y)$ の成立する x の値を実際に計算するいかなる方法もない。

さて次に述べる Church の定理の目的は、この結果を第1次の述語論理の決定問題へ適用することである。ここで述語論理の決定問題とは次のことを意味する。述語論理のある整式を与えられた場合、それが述語論理の形式的体系内で演算可能かどうかを決定する一般的な方法が存在するか否かという問題である。

もしそのような方法が存在するとすれば、ある整式 B が証明可能であるか否かは、 $\mathfrak{D}(B)$ なる述語が成立するか否かによつて示されることとなろう。この述語は Gödel 数をとることによつて $D(b)$ なる函数となり、 $\mathfrak{D}(B)$ が成立するときは、 $D(b)=0$ 、 $\mathfrak{D}(B)$ が成立せぬときは $D(b)=1$ なる値をとると定めることができる。そして $\mathfrak{D}(B)$ なる述語が「実際に (証明可能か否か) 決定可能」であるためには $D(b)$ の値が「実際に計算可能」で 0 か 1 に等しいことが示されねばならぬ。

我々は既に前節において、 P_1 に対してはこの体系が無矛盾なる限りこの種の一般的方法の存在し得ないことを明かにした。即ち、「証明可能な」整式の集合は回帰的枚举可能ではあるが、必ずしも回帰的集合ではない。

これは次の定理にかくことができる。

定理 3-3-1.

形式的体系 P_1 が無矛盾であるならば、 P_1 の整式が P_1 において証明可能であるか否かを決定する一般的方法はない。

この証明の方法は次のようにして、 P_1 の問題に止まらず、述語論理の決定問題にも適用されることを Church は示した。

その証明は次の通りである。先づ第1次の述語論理の体系を前提する。次にある初等回帰述語 $R(x, y)$ をとり、その特性函数を $\varphi(x, y)$ としよう。そのとき、 $\varphi (= \varphi_k)$ を定義する一連の方程式 $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ が存在する。これに形式的体系 S の函数記号 $f_1, \dots, f_k$ を夫々対応させる。更に S の項及び整式は、第1次の述語論理に $0, ', f_1, \dots, f_k$ 及び $=$ をつけ加えたものから構成されているとする。 S の公理は述語論理の公理に、 $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ を適宜 S 内に翻訳して得られる方程式とを含むとする。

次に、公理の自由変記号はすべて全称量化される (即ち universal closure をとる)。更に公理の数は有限であるから $\wedge$ で結んで、論理的 conjunction をとって単一の公理とする。この公理を B としよう。

更に、この公理中に現れぬ個別者変記号 (individual variable) z 及び述語変記号 (predicate variable, propositional function variable) $G_1, \dots, G_{k+2}$ によつて、 B 中の $0, f_1, \dots, f_k, ', =$ を夫々おきかえるとする。これを C とする。

今 $A(x)$ を $(\exists y)(f_k(x, y) = 0)$ なる S の整式だとする。このとき、

$\{A(x) \text{ が } S \text{ において証明可能である}\}$

$$\equiv (Ey) R(x, y)^{2)}$$

なることを証明しうる。更に $A(x)$ を、上と同様な手続きによつて述語論理の整式 F に翻訳したとする。このときは、

$\{A(x) \text{ が } S \text{ において証明可能である}\}$

$$\equiv \{C \supset F \text{ が述語論理において証明可能である}\}^{3)}$$

ことが証明される。よつて上の関係から、

$\{C \supset F \text{ が述語論理において証明可能である}\}$

$$\equiv (Ey) R(x, y).$$

述語論理の決定問題が解かれているためには、提題 I から上の等値関係の左辺は一般回帰述語でなければならぬ。ところが、もし、 $R(x, y)$ を $T_1(x, x, y)$ ととれば上の等値関係は成立し得ない。よつて述語論理の決定問題の一般的解決はあり得ないこととなる。これが次の所謂 Church の定理である。

定理 3—3—2.⁴⁾

第一次の (同一性を含む) 述語論理に対しては、決定問題を解くことは不可能である。

この節の初めに P_1 に対してなされた考察は、 P_2 に対しても適用できるから、

公理及び演算規則から得られる整式の集合がそれぞれ、回帰的枚举可能、或は回帰的であつても、そのような形式的体系におけるある整式が証明可能か否かを決定する一般的方法は存在しない。

定理 3—3—3.⁵⁾

P_1 に公理及び演算規則をつけ加えて得られる形式的体系 P において、もし P の証明可能な整式の集合が回帰的枚举可能で、且つ、 P が無矛盾であるならば、自由変記号をもたぬ任意の P の整式が、証明可能であるかどうかを決定する一般的方法は存在しない。

(証明)

P が無矛盾で、且つある自由変記号をもたぬ整式が、証明可能であるかどうかを決定する一般的方法が存在すると仮定しよう。

そのとき函数 $\varphi(n)$ を次のように定める： $\varphi(n)$ は、もし n が証明可能な自由変記号をもたぬ整式の Gödel 数であるならば、0、しからざれば 1。そのとき $\varphi(n)$ は実際に計算可能でなければならないから、提題 I を適用して、 $\varphi(n)$ は一般回帰函数でなければならない。 $\varphi(n)$ が一般回帰函数であるためには、定理 §2—5—3 から、自由変記号をもたぬ証明可能な整式の Gödel 数の集合と、自由変記号をもたぬ証明不能な整式の Gödel 数の集合は共に回帰的枚举可能でなければならない。また両者は共に空ではない。それ故、 $\beta(m)$ と $\gamma(m)$ が、この二つの集合をそれぞれ枚举する初等回帰函数 (前節 (E) 参照) とする。そのとき、 $\theta(2n) = \beta(n)$, $\theta(2n') = \gamma(n)$ なる関係を充たす初等回帰函数 $\theta(m)$ が存在する。即ち $\theta(m)$ は m が偶数なるときは証明可能な整式の、奇数のときは証明不能の整式の Gödel 数をとる。今、定理 3—2—4 の $B(x, y)$ その他にならつて、次の如く定義する。

$$B_p(x, y) \equiv_{df} \theta(x) = y \ \& \ 2 \mid x$$

$$Bew_p(y) \equiv_{df} (Ex) B_p(x, y)$$

$$Pr_p(x, y) \equiv_{df} B_p(x, y) \ \& \ (\overline{Ez}) [z \leq x \ \& \ \theta(z) = y \ \& \ 2 \nmid z]$$

$$Prov_p(y) \equiv_{df} (Ex) Pr_p(x, y)$$

そのとき、定理 §3—2—4 の証明と全く同様にして、 $A''_r(r)$ をとる、即ち、 $(x) \sim P'(x, y)$ (但し $P'(x, y)$ は、 $Q'(x, y)$ に対応して適宜とられた $Q''(x, y)$ を表現する P の整式とする) の Gödel 数を r とし、 y に r を入れたとする。そのとき、 $Prov_p(r) \rightarrow Prov_p(s)$ (s は $A''_r(r)$ の Gödel 数) $Prov_p(s) \rightarrow (Ex) Q''(x, r) \rightarrow Q''(x_1, r) \rightarrow \vdash P'(x_1, r)$ 及び $(Ez) [\theta(z) = y \ \& \ 2 \nmid z] \rightarrow Prov_p(Ng(s))$ が成立する。しかし、もし、 $\overline{Prov_p(s)}$ ならば、 $(Em) [\gamma(m) = s]$ で、それ故 $\theta(2(\mu m [\gamma(m) = r]) + 1) = s$ 。従つて $\overline{Prov_p(s)} \rightarrow Prov_p(Ng(s))$ 。これらの関係を用いて、定理 §3—2—3 と同様に矛盾を導き出すことができる。

今までの Gödel 及び Rosser の定理が Parmenides の paradox にならつて構成されたのに対して、Richard の paradox に似た方法を採用することによつて、次の Kleene の定理は構成される。即ち、Kleene の枚举定理によつて導入された函数 T_1 を用い、且つ、この章の第 1 節に論じられた、形式的体系の回帰函数による特徴づけを用いることによつて、極めて適用範囲の広い、所謂 Kleene の拡張形が得られる。先づ、 $(x) \bar{T}_1(x, x, y)$ は回帰的枚举可能集合ではないから、提題 II を適用することによつて次の定理を得る。

定理 §3—3—4.⁵⁾

(y) $\bar{T}_1(x, x, y)$ に対しては、必要で、且つ充分ないかなる形式的体系も存在しない。

更に定理 §3—3—3 において用いられた述語と類似な次の形の述語を定義する。

$$W_0(x, y) \equiv_{df} T_1((x)_1, x, y) \ \& \ (z)_{z \leq y} \bar{T}_1((x)_0, x, z)$$

$$W_1(x, y) \equiv_{df} T_1((x)_0, x, y) \ \& \ (z)_{z \leq y} \bar{T}_1((x)_1, x, z)$$

今、 x が一定だとする。そのとき、ある数 y_1 が存在して、

$$(i) \quad T_1((x)_0, x, y_1)$$

$$(ii) \quad (x)_{z \leq y_1} T_1((x)_1, x, z)$$

が共に成立すると仮定しよう。かゝる場合には、

$$(iii) \quad T_1((x)_1, x, y_0)$$

$$(iv) \quad (z)_{z \leq y_0} \bar{T}_1((x)_0, x, z)$$

を共に満足させる y_0 は存在しない。何故なら、(i) と (iv) とからは、 $y_1 > y_0$ が導き出されるが、(ii) と (iii) とからは $y_0 > y_1$ が出てくるからである。それ故、

$$(v) \quad (Ey) W_1(x, y) \rightarrow (\bar{E}y) W_0(x, y)$$

しかるに、その定義から W_0 と W_1 は共に初等回帰述語であるから、必要なる形式的体系においては、ある整式 $B(x)$ が存在して

$$(vi) \quad (Ey) W_0(x, y) \rightarrow \vdash B(x)$$

$$(vii) \quad (Ey) W_1(x, y) \rightarrow \vdash \sim B(x)$$

なることを要求しうる。この形式的体系を S とすると、 S が提題 II の要求をみたす形式的体系であるときは、一般回帰述語 $R_0(x, y)$, $R_1(x, y)$ が存在して、

$$(viii) \quad (Ey) R_0(x, y) \equiv \vdash B(x)$$

$$(ix) \quad (Ey) R_1(x, y) \equiv \vdash \sim B(x)$$

が成立せねばならぬ。しかるに、もし S が無矛盾ならば、いかなる自然数 x に対しても、 $\vdash B(x)$ と $\vdash \sim B(x)$ が共に成立することはない。更に、 S における演算の完全性からは $\vdash B(x)$ か $\vdash \sim B(x)$ のいずれかが成立せねばならない。

さて、 S が無矛盾、即ち $\vdash B(x) \ \& \ \vdash \sim B(x)$ だと仮定しよう。そのとき定理

§2-3-2 によつて、ある数 f_0, f_1 が存在して、もし $f = 2^{f_1} \cdot 3^{f_0}$ とおけば、

$$(x) \quad (Ey) R_0(x, y) \equiv (Ey) T_1(f_0, x, y) \equiv (Ey) T_1((f)_0, x, y)$$

$$(xi) \quad (Ey) R_1(x, y) \equiv (Ey) T_1(f_1, x, y) \equiv (Ey) T_1((f)_1, x, y)$$

が成立する。

次に $\vdash B(f)$ だと仮定しよう。

そのときは、(viii) から、

$$(Ey) R_0(f, y).$$

更に (x) によつて、

$$(xii) \quad (Ey) T_1((f)_0, f, y),$$

且つ、 S は無矛盾で $\vdash B(f)$ だから、

$$\vdash \sim B(f).$$

それ故、(ix) から、

$$(\overline{Ey}) R_1(f, y).$$

よつて、(xi) から、

$$(xiii) \quad (\overline{Ey}) T_1((f)_1, f, y).$$

(xii) と (xiii) とから、

$$(Ey) [T_1((f)_0, f, y) \& (z)_{z \leq y} \overline{T}_1((f)_1, f, z)].$$

従つて、(ii) から、

$$(Ey) W_1(f, y).$$

ところが、そのときは (vii) によつて、

$$\vdash \sim B(f)$$

であるから、我々の仮定 $\vdash B(f)$ と矛盾する。故に $\vdash \sim B(f)$ 。

しかるに $\vdash \sim B(f)$ のときも上と全く同様にして $\vdash B(f)$ を導き、従つて矛盾を得ることができる。よつて $\vdash \sim B(f)$ 。

かくして次の定理が証明された。

定理 §3-3-5.⁷⁾

上の条件 (vi)–(ix) を充たす完全で、無矛盾ないかなる形式的体系も存在しない。

註 1. Kleene [7], Th. VIII. 尙これをめぐる論議についても、Ibid. §13, [13] §60.

註 2. この証明は簡単ではない。詳しくは Kleene [13] §79. Hilbert-Bernays [2] §2 参照。

註 3. Kleene [13] §74.

註 4. 所謂 Church の定理、Church [6], [7]. 尙 [4] も参照。Church の方法はむしろ λ -definability により多く依存してゐる。Turing [1] [2]. 更に幾分異な

つた証明については、Kleene [13] §76. 述語論理の決定問題の直接的証明については、Kalmár [5], Quine [2], Rosenbloom [1] Appendix II. 細部に立ち入った詳しい証明は Kleene [13] §76, Hilbert-Bernays [2] Supplement II.

註 5. この証明も極めて不完全であるが、紙数の関係から繰返しを避けざるを得なかつた。詳しくは Rosser [2] Th. III.

註 6. Kleene [7] Th. VII. Gödel の定理の Kleene による拡張、尙 註 1 参照。

註 7. Kleene [13] §61, [11].

第 4 節 回帰函数の理論と公理論的数論の形式的体系

Gödel, Church の定理及びその種々の拡張によつて、述語論理及び数論の決定問題に対する回帰函数の役割の重要性を明かにしたが、我々が決定問題を論ずる際には重要な二つの方法が存在する。即ち、(I) ある形式的体系の決定問題を直接に、つまり回帰函数の理論との関聯から研究する方法と、(II) 決定問題の解かれている他の形式的体系との関聯から、ある形式的体系の決定問題を解く方法との二つである¹⁾。(I) に関しては我々は既に前節において考究した。(II) の方法を適用する際には、決定問題の解かれている、できるだけ数学的内容の乏しい、従つて他の形式的体系内に翻訳する²⁾ ことの非常に簡単なある体系を構成しておくのが便利である。それ故、この (II) の方法を適用するのに極めて適した、ひとつの形式的体系を、第 2 章第 4 節の結果を用いることによつてこゝに構成することとするが、他の形式的体系との関聯についてはこゝでは一切立ち入らぬであらう。

決定問題を論ずるさいに重要な役割を演ずるのは、今までの論議からして、Kleene の標準形 (定理 §2—3—1) に現れる $T_1(e, x, y)$ なる述語であつた。これから対角線論法を適用することによつて、一連の非決定述語が直ちに得られる。従つて先づ、この述語は、どれだけの形式的理論において定義されるかが問題となる。それには、次の体系 T_R で充分なることを示そう。こゝで第 1 次の述語論理の体系は前提されているものとする。

回帰函数の形式的体系 T_R ³⁾

(I) 原初記号	0	'	=	⊢	+	•	(定記号)
	x	y	z		}		(変記号)
	u	v	w				

$x, y, z, \dots$ は主として束縛変記号に、 $u, v, w, \dots$ は自由変記号に用いられる。

(II) 項

1. 0 は項である。

2. もし a が項ならば、 a' は項である。
3. もし a と b とが項ならば、 $a+b$ は項である。
4. もし a と b とが項ならば、 $a \cdot b$ は項である。
5. 1-2 に定義されたもののみが項である。

従つて、 $0, 0', 0'', \dots$ は項であるが、これを直観的数と区別するため、 $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots$ と略記する。一般に $\bar{n}$ は直観的数 n に対応する数記号とする。

(III) 方程式

1. もし a と b とが項ならば、 $a=b$ は方程式である。
2. 1 に定義されたもののみが方程式である。

(IV) 公理図式

1. $\vdash \bar{n} + \bar{p} = \overline{n+p}$
2. $\vdash \bar{n} \cdot \bar{p} = \overline{n \cdot p}$
3. $n \neq p$ ならば、 $\vdash \bar{n} \neq \bar{p}$
4. $\vdash u \leq \bar{n} \supset u = \bar{0} \vee u = \bar{1} \vee \dots \vee u = \bar{n}$
5. $\vdash u \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq u$

3-5 において、 $\bar{n} \neq \bar{p}$ は $\sim(\bar{n} = \bar{p})$ の略、 $u \leq \bar{n}$ は $(\exists x)(x + u = \bar{n})$ (但し、 x は u には現れないとする) の略記号であるとする。

この形式的体系 T_R に対して、すべての一般回帰函数は T_R において定義可能である、即ち、任意の回帰函数 $\varphi(x)$ が与えられたとき、 $\varphi(x) = y$ なる述語を $P(x, y)$ とすれば、

$$P(x, y) \rightarrow \vdash \Phi(x, y)$$

$$P(x, y) \rightarrow \vdash \sim \Phi(x, y)$$

なる整式 Φ が T_R 中に存在することを示すこととする⁴⁾。

第2章第4節の結果、特に定理 §2-4-2 を用いれば、多変数の回帰函数は一変数のそれに還元され、すべての一変数の回帰函数は、次の函数及び図式から定義しうる。

- (i) 函数 $S(x)$ 及び $quadres(x)$
- (ii) $\varphi(x) + \psi(x)$ (但し、 φ, ψ はともに一般回帰函数)
- (iii) $\varphi^{-1}(\psi(x))$ (但し、 $\varphi(x)$ はすべての自然数をその値として前提する)

従つて、(i)-(iii) によつて定義しうる函数が、 T_R において定義可能なることを示せば、所期の目的を達することができる。

(a) 函数 $S(u)$ は T_R において定義可能である。 T_R の整式 (方程式) $u' = v$ をとれば、これは明らかに、 $S(u)$ を T_R において定義する。

(b) 函数 $quadres(u)$ は T_R において定義可能である。

(1) $\Phi(u, v) \equiv_{df} (\exists x)[x \leq u \wedge v \leq x + x \wedge u = (x \cdot x) + v]$ (但し、 x は、 u, v

と異なる変記号である) は、 $quadres(u)=v$ を T_R において定義することを示そう。

(1) が T_R において成立することは、結局、

(2) $\vdash v = \overline{quadres(n)} \supset \Phi(\bar{n}, v)$

(3) $\vdash \Phi(n, v) \supset v = \overline{quadres(n)}$

なることを示すのに等しい。

$quadres(u)$ の定義からして、

$$m^2 + quadres(n) = n < (m+1)^2$$

なる自然数 m が存在するから、

$$m \leq n \text{ 且つ } quadres(n) \leq 2 \cdot m$$

なる関係が成立する。このような m, n に対しては、Ax. 1, 2 から、

$\vdash \bar{m} \leq \bar{n} \wedge \overline{quadres(n)} \leq \bar{m} + \bar{m} \wedge \bar{n} = \bar{m} \cdot \bar{m} + \overline{quadres(n)}$ が成立することは明らかである。このとき (1) の定義から、 $\Phi(u, v)$ は x を $\bar{m}$ として成立する故、

$$\vdash \Phi(u, v)$$

なることは明らかである。

他方、Ax. 1, 2 と Ax. 4 から、

$\vdash \Phi(\bar{n}, v) \supset (v \leq \overline{2 \cdot 0} \wedge \bar{n} = \overline{0 \cdot 0} + v) \vee \dots \vee (v \leq \overline{2 \cdot n} \wedge \bar{n} = \overline{n \cdot n} + v)$ が成立する。

Ax. 4 をもう一度用いると、 $m \leq n, p \leq 2 \cdot m$ なる m, p に対して、

$$(4) \vdash \Phi(\bar{n}, v) \supset (v = \bar{p} \wedge \bar{n} = \overline{0 \cdot 0} + \bar{p}) \vee \dots \vee (v = \bar{p} \wedge \bar{n} = \overline{m \cdot m} + \bar{p}).$$

ところが、 $quadres(n)$ の値 p は、 $n = m^2 + p$ 且つ、 $p \leq 2 \cdot m$ なる p として唯一通りに決まる。それ故、もし $p \neq quadres(n)$ ならば、 $p \leq 2 \cdot m$ なるときは、常に $n \neq m^2 + p$ である。従つて、Ax. 3 から、 $p \neq quadres(n)$ 且つ $p \leq 2 \cdot m$ なる m, p に対しては、 T_R において、

$$\vdash \bar{n} \neq \overline{m \cdot m + p}$$

である。それ故 (4) を用いて、このような m, p に対しては、

$$\vdash \sim \Phi(u, v)$$

従つて、 $\Phi(u, v)$ は $quadres(u)$ を T_R において定義する。

(c) もし函数 $\varphi(u)$ 及び $\phi(v)$ が T_R において定義可能であるならば、 $\varphi(u) + \phi(v)$ 及び $\varphi(\phi(u))$ は T_R において定義可能である。

今、 $\Phi(u, x)$ 及び $\Psi(u, y)$ を、それぞれ $\varphi(u), \phi(u)$ を T_R において定義する整式とすれば、

$$(\exists x)(\exists y)[u = x + y \wedge \Phi(u, x) \wedge \Phi(u, y)]$$

は、 $\varphi(u) + \phi(u)$ を、

$$(\exists z)[\Psi(u, z) \wedge \Phi(z, v)]$$

は、 $\varphi(\varphi(u))$ を定義することは明らかである。

(d) もし $\varphi(u)$ が T_R において定義可能であり、且つすべての自然数をその値として前提するならば、 $\varphi^{-1}(u)$ も T_R において定義可能である。

(5) $\Psi(v, u) \equiv_{df} \Phi(v, u) \wedge (y)[\Phi(y, u) \supset v \leq y]$ において、 $\Phi(v, u)$ が $\varphi(v)$ を定義するとすれば、 $\Psi(v, u)$ は $\varphi^{-1}(v)$ を T_R において定義することを次に示そう。

(5) が成立することを示すには、任意の自然数に対して、

$$(6) \quad \vdash \Psi(\bar{n}, v) \supset v = \overline{\varphi^{-1}(n)} \quad \text{及び}$$

$$(7) \quad \vdash v = \overline{\varphi^{-1}(n)} \supset \Psi(\bar{n}, v)$$

なることを示すことが、必要且つ充分である。

$\varphi^{-1}(m)$ の定義からして、 $m < \varphi^{-1}(n)$ のすべての m に対し、 $\varphi(m) \neq n$ である。それ故 Ax. 3 から、 $m < \varphi^{-1}(n)$ のとき、

$$\vdash \overline{\varphi(m)} \neq \bar{n}.$$

ところが、すべての m に対して、

$$(8) \quad \vdash \Phi(\bar{m}, v) \leftrightarrow v = \overline{\varphi(m)}$$

であるから、Ax. 4 から

$$(9) \quad \vdash \Phi(v, \bar{n}) \wedge v \leq \overline{\varphi^{-1}(n)} \supset v = \overline{\varphi^{-1}(n)}.$$

更に、 φ はすべての自然数を値として前提するから、 $\varphi(\varphi^{-1}(n)) = n$ である。よつて (8) から、

$$(10) \quad \vdash \Phi(\overline{\varphi^{-1}(n)}, \bar{n}).$$

(5) の Ψ の定義から、

$$\vdash \Psi(\bar{n}, v) \supset \Phi(v, \bar{n}) \wedge [\Phi(\overline{\varphi^{-1}(n)}, \bar{n}) \supset v \leq \overline{\varphi^{-1}(n)}]$$

は成立するから、これと、(9), (10) とから、

$$\vdash \Psi(\bar{n}, v) \supset v = \overline{\varphi^{-1}(n)}$$

他方、Ax. 5 と (9) とから、

$$\vdash y \leq \overline{\varphi^{-1}(n)} \wedge \overline{\varphi^{-1}(n)} \leq y \quad \text{及び}$$

$$\vdash \Phi(y, \bar{n}) \wedge y \leq \overline{\varphi^{-1}(n)} \supset y = \overline{\varphi^{-1}(n)}$$

が得られる。この二つの式と (10) とから、

$$(11) \quad \vdash \Phi(\overline{\varphi^{-1}(n)}, \bar{n}) \wedge (y)[\Phi(y, \bar{n}) \supset \overline{\varphi^{-1}(n)} \leq y].$$

そのとき、(5) の Ψ の定義を (11) に適用すると、

$$\vdash \Psi(\bar{n}, \overline{\varphi^{-1}(n)}).$$

このときは明らかに、

$$\vdash v = \overline{\varphi^{-1}(n)} \supset \Psi(\bar{n}, v).$$

従つて、 $\varphi(u)$ が T_R において定義可能なときは、 $\varphi^{-1}(u)$ も T_R において定義可能である。

これを次の形の定理としてかく、

定理 §3—4—1.

すべての一般回帰函数は T_R において定義可能である。

以上で、一変数の回帰函数はすべて T_R において定義可能であることを証明したが、第2章第6節の回帰函数に対する対角線論法の適用によつて、 T_R においては決定不可能な整式の存在することを極めて簡単に次のように証明しうる。

今、Gödel の定理におけると同様な記号を用い、 T_R のある整式 (x を自由変記号として有する) を $A(x)$ とし、 T_R に対して Gödel 数が打てることは明らかであるから、その Gödel 数を n とする。そのとき、 $A(x)$ によつて、 $A(x)$ が n なる数を有することを示す。他方 $Nr(A(x))=n$ によつて、 $A(x)$ に対応する Gödel 数が n なることを示すとする。今、対角線函数 D を次のように定義する。

$$D(n) = Nr(A_n(\bar{n}))$$

こゝで、 $A_n(\bar{n})$ は $A_n(x)$ の自由変記号 x を数記号 $\bar{n}$ によつておきかえられたものを示す。更に V によつて、 $\vdash A$ なる T_R の整式 A の Gödel 数のすべての集合を示すものとする。そのとき次の定理が成立する。

定理 §3—4—2.

もし形式的体系 S が無矛盾であるならば、函数 D と集合 V は S において共に定義可能ではない。

(証明)

今、 D と V とが共に定義可能だとする。そのときは S の整式 Φ, Ψ が存在して次の三つの条件が充たされねばならない。

- (i) $\vdash_s(v) [\Psi(\bar{n}v) \leftrightarrow v = \overline{D(n)}]$
- (ii) もし $n \in V$ ならば、 $\vdash_s \Psi(\bar{n})$
- (iii) もし $n \notin V$ ならば、 $\vdash_s \sim \Psi(\bar{n})$

こゝで、簡単のため、 v は Ψ に現れぬ変記号とする。

$$m = Nr((v) [\Phi(u, v) \supset \sim \Psi(v)])$$

とおけば、 A_m は

$$(v) [\Psi(u, v) \supset \sim \Psi(v)]$$

となる。

従つて、

$$(12) \quad A_m(\bar{m}) = (v) [\Phi(\bar{m}, v) \supset \sim \Psi(v)].$$

もし、 $\vdash_s A_m(\bar{m})$ ならば、(1) 及び (12) によつて、
 $\vdash_s \sim \Psi(\bar{m})$ 。

逆にもし、 $\vdash_s A_m(\bar{m})$ が成立しなければ、

$$Nr(A_m(\overline{m})) \notin V$$

である。ところが D の定義から、

$$(13) \quad D(m) = Nr(A_m(\overline{m}))$$

であるから、(iii) によつて、

$$(14) \quad \vdash_s \sim \Psi(\overline{D(m)})$$

が成立する。よつて、いづれにしろ、 $\vdash_s \sim \Psi(\overline{D(m)})$ が成立する。しかるに (i) と (14) から、

$$\vdash_s (v) [\Phi(\overline{m}, v) \supset \sim \Psi(\overline{D(m)})]$$

が成立する。従つて、(12) と (13) とから $D(m) \in V$ 。従つて、(ii) から、

$$(15) \quad \vdash_s \Psi(\overline{D(m)}).$$

(14) と (15) は S が無矛盾であるという仮定に反するから、 D と V とは共に定義可能ではない。

さて T_R は無矛盾で、且つ、 D は一般回帰函数として定義しうるから、 T_R において定義可能である。よつて V は T_R においては定義可能ではない。これは全く証明可能な整式の集合が回帰的集合でないという事態に対応している。それ故、 T_R は決定不能な体系である。Tarski はこの T_R が、自然数論及びその部分的理論の形式的体系に対して、翻訳し易いという性質を利用して、多くの形式的体系の決定問題を解いたが⁴⁾、その詳細にはこゝで立ち入らない。唯々 T_R の決定問題は、回帰函数の理論の決定問題に他ならず、その意味で、本質的に決定不能とよばれることを指摘しておくに止めよう⁵⁾。

註 1. この方法 (II) については Tarski の諸論文 [1]—[4], Szmielew-Tarski [1] [2] を参照。特に Tarski-Mostowski-Robinson [1] I.

註 2. この語の正確な意味については、Szmielew-Tarski [2], Tarski-Mostowski-Robinson [1] I. 4.

註 3. Tarski-Mostowski-Robinson [1] II. §2. 3. 4.

註 4. Tarski [1]—[4], Szmielew [1], Szmielew-Tarski [1] [2], J. Robinson [1] [2], R. M. Robinson [3] [4], Mostowski-Tarski [1].

註 5. この節においては所謂 semantical な方法が中心となつた。従つて、記号 $\vdash$ は validity の記号として読まるべきであるが、valid な式の集合の定義についてはふれなかつた。詳しくは、(特に一定の体系と関聯して) Mostowski [5] を参照。

む す び

以上によつて、初等及び一般回帰函数の理論を、特に決定問題との関聯を中心として述べたが、こゝで触れることのできなかつた幾多の問題がある。例えば、

(1) Gödel の arithmetische Funktionen, Kalmár 等の elementary functions についての研究 (Gödel [1] §3, Kalmár [1], Grzegorzczuk [1] 等).

(2) Kleene のいう部分回帰函数 (partial recursive functions) 及びその超限序数及び直観主義数学への適用 (Kleene [6]—[13], Nelson [1]).

(3) Post, Kleene の決定不能性の程度の問題 (Post [3], Kleene [13], Post-Kleene [1]).

(3) Post, Davis, Dekker, Myhill 等による creative, simple, mesoic な、回帰的枚举可能集合の研究 (Post [3], Dekker [2], Myhill [3]).

これらについてはまた他日論ずることとして、この簡単な概観を終えることとする。

文 献 表

次のリストは回帰函数の理論に関するできるだけ完全なリストを作製する意図の下になされた。従つて本稿に直接関係のあるものは ** 印、回帰函数 proper を扱うものを * 印、更に、回帰函数と等値な system に関する議論その他は、いかなる印もうたぬことによつて区別する。

Ackermann, Wilhelm

[1] Begründung des “tertium non datur” mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, Mathematische Annalen, 1924-25, vol. 93, pp. 1-36.

**[2] Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Ibid., 1928, vol. 99, pp. 118-133.

[3] Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Ibid., 1940, vol. 117, pp. 162-194.

[4] Solvable cases of the decision problem, Amsterdam, 1954.

Hilbert-Ackermann 参照

Bereczki, Ilona

*[1] On recursive functions which are not elementary, Acta scientiarum mathematicarum (Szeged), 1951, vol. 13.

Bernays, Paul

Hilbert-Bernays を参照

Csillag, Paul

**[1] Eine Bemerkung zur Auflösung der eingeschachtelten Rekursion, Acta scientiarum mathematicarum, 1947, vol. 11, pp. 169-173.

Church, Alonzo

- [1] A set of postulates for the foundation of logic, *Annales of mathematics*, ser. 2, 1932, vol. 33, pp. 346-366.
- [2] A set of postulates for the foundation of logic (second paper), *Ibid.*, ser. 2, 1933, vol. 34, pp. 839-864.
- [3] The Richard paradox, *The american mathematical monthly*, 1934, vol. 41, pp. 356-361.
- **[4] An unsolvable problem of elementary number theory, *American journal of mathematics*, 1936, vol. 58, pp. 346-363.
- [5] Mathematical logic, mimeographed lecture notes, Princeton University, 1936.
- **[6] A note on the Entscheidungsproblem, *The journal of symbolic logic*, 1936, vol. 1, pp. 40-41.
- **[7] Correction to A note on the Entscheidungsproblem, *Ibid.*, pp. 101-102.
- *[8] The constructive second number class, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1938, vol. 44, pp. 224-232.
- *[9] On the concept of random sequence, *Ibid.*, 1940, vol. 46, pp. 130-135.
- [10] The calculi of lambda-conversion, Princeton University Press, 1st ed. 1941, 2nd ed. 1951.
- [11] Special cases of the decision problem, *Revue philosophique de Louvain*, 1951, vol. 49, pp. 203-221, A correction, *Ibid.*, 1952, vol. 50, pp. 270-272.
- [12] Introduction to mathematical logic, Princeton University Press, vol. 1, 1956.

Church-Rosser, Church-Kleene, Church-Quine 参照

Church, A. & Kleene, S. C.

- [1] Formal definitions in the theory of ordinal numbers, *Fundamenta mathematicae*, 1937, vol. 28, pp. 11-21.

Church, A. & Rosser, B.

- [1] Some properties of conversion, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1936, vol. 29, pp. 472-482.

Church, A. & Quine, W. V.

- [1] Some theorems on definability and decidability, *Journal of symbolic logic*, 1952, vol. 17, pp. 179-188.

Curry, Haskell B.

- [1] An analysis of logical substitution, *American journal of mathematics*, 1929, vol. 51, pp. 363-384.
- [2] Grundlagen der kombinatorischen Logik, *Ibid.*, 1930, vol. 52, pp. 509-536, 789-834.
- [3] The universal quantifier in combinatory logic, *Annals of mathematics*, ser. 2, 1931, vol. 32, pp. 154-180.
- [4] Some additions to the theory of combinators, *American journal of mathematics*, 1932, vol. 54, pp. 551-558.
- [5] Apparent variables from the standpoint of combinatory logic, *Annals of mathematics*, ser. 2, 1933, vol. 34, pp. 384-404.
- [6] Some properties of equality and implication in combinatory logic, *Ibid.*, ser. 2, 1934, vol. 35, pp. 849-860.
- [7] Functionality in combinatory logic, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, 1934, vol 20, pp. 584-590.
- [8] First properties of functionality in combinatory logic, *The Tohoku mathematical journal*, 1936, vol. 41, pp. 371-401.
- **[9] A formalization of recursive arithmetic, *American journal of mathematics*, 1941, vol. 63, pp. 263-282.
- [10] The paradox of Kleene and Rosser, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1941, vol. 50, pp. 454-516.
- [11] The combinatory foundations of mathematical logic, *Journal of symbolic logic*, 1942, vol. 7, pp. 49-64; erratum, *ibid.*, vol. 8, p. iv.
- [12] The inconsistency of certain formal logics, *Ibid.*, 1942, vol. 7, pp. 115-117; erratum, *ibid.*, p. iv.
- [13] Some advances in the combinatory theory of quantification, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, 1942, vol. 28, pp. 564-569.
- [14] A simplification of the theory of combinators, *Synthese*, 1949, vol. 7, no. 6 A, pp. 391-399.

Davis, Martin

- *[1] On the theory of recursive unsolvability, dissertation, Princeton, 1950.
- *[2] Relatively recursive functions and the extended Kleene hierarchy, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cam-*

bridge, Mass., U. S. A., Aug. 30–Sept. 6. 1950), 1952, vol. 1, p. 723.

- *[3] Arithmetical problems and recursively enumerable predicates, *Journal of symbolic logic*, 1953, vol. 18, pp. 33–41.

Dekker, J. E. C.

- *[1] Productive sets and productive classes.
- **[2] Two notes on recursively enumerable sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1953, vol. 4, pp. 495–501.

Feys, Robert

- [1] La technique de la logique combinatoire, *Revue philosophique de Louvain*, 1946, vol. 44, pp. 74–103, 237–270.

Gödel, Kurt

- **[1] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1931, vol. 37, pp. 173–198.
- **[2] On decidable propositions of formal mathematical systems, *Notes by S. C. Kleene and B. Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study*, 1934, Mimeographed, Princeton.

Goodstein, R. L.

- *[1] On the restricted ordinal theorem, *Journal of symbolic logic*, 1944, vol. 9, pp. 33–41.
- *[2] Function theory in an axiom-free equation calculus, *Proceedings of London Mathematical Society*, ser. 2, 1945, vol. 48, pp. 401–434.
- *[3] The strong convergence of the exponential function, *Journal of the London Mathematical Society*, 1947, vol. 22, pp. 200–205.
- *[4] Transfinite ordinals in recursive number theory, *Journal of symbolic logic*, 1947, vol. 12, pp. 123–129.
- *[5] The recursive irrationality of π , *Ibid.*, 1954, vol. 19, pp. 267–274.

Grzegorzcyk, Andrej

- **[1] Some classes of recursive functions, *Warszawa*, 1953, (*Rozprawy matematyczne iv*).

Hall, Marshall Jr.

- *[1] The word problem for semigroups with two generators, *Journal of symbolic logic*, 1949, vol. 14, pp. 115–118.

Herbrand, Jacques

- *[1] Sur la non-contradiction de l'arithmétique, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1931-2, vol. 166, pp. 1-8.

Hermes, Hans

- [1] Definite Begriffe und berechenbare Zahlen, Semester-Berichte (Münster i. w.), summer 1937, pp. 110-123.

Hilbert, David

- [1] Über das Unendliche, Mathematische Annalen, 1926, vol. 95, pp. 161-190.

Hilbert-Ackermann, Hilbert-Bernays 参照

Hilbert, D. & Ackermann, W.

- [1] Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin, 1st ed. 1928, 2nd ed. 1938, 3rd ed. 1949.

Hilbert, D. & Bernays P.

- **[1] Grundlagen der Mathematik, vol. 1, Berlin, 1934.

- **[2] Ibid., vol. 2, Berlin, 1944.

Janiczak, A.

- *[1] On the reducibility of decision problem, Colloquium mathematicum, 1954, III. 1, pp. 33-36.

- *[2] Some remarks on partially recursive functions, Ibid., pp. 37-38.

Kalmár, László

- *[1] Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára (Ein einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem), Matematikai és fizikai lapok, 1943, vol. 50, pp. 1-23. (Hungarian with German abstract).

- *[2] On unsolvable mathematical problems, Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11-18, 1948), Amsterdam, 1949, pp. 756-758, (fasc. 2).

- *[3] Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen, Methodos, 1950, vol. 2, pp. 220-226.

- *[4] Another proof of the Gödel-Rosser incompleteness theorem, Acta scientiarum mathematicarum (Szeged), 1950, vol. 12, pp. 38-43.

- **[5] Ein direkter Beweis für die allgemein-rekursive Unlösbarkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1956, vol. 2, pp. 1-14.

- [6] Über ein problem, betreffend die Definition des Begriffes der allgemein-rekursiven Funktion, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1955, vol. 1, pp. 93-96.

Kleene, Stephen C.

- [1] Proof by cases in formal logic, Annals of Mathematics, ser. 2, 1934, vol. 35, pp. 529-544.
- [2] A theory of positive integers in formal logic, American journal of mathematics, 1935, vol. 57, pp. 153-173, 219-244.
- **[3] General recursive functions of natural numbers, Mathematische Annalen, 1936, vol. 112, pp. 727-742. Erratum and a simplification, Journal of symbolic logic, 1938, vol. 3, p. 152; 1937, vol. 2, p. 38; 1939, vol. 4, p. iv.
- *[4] λ -definability and recursiveness, Duke mathematical journal, 1936, vol. 2, pp. 340-353.
- *[5] A note on recursive functions, Bulletin of the American Mathematical Society, 1936, vol. 42, pp. 544-546.
- *[6] On notation for ordinal numbers, Journal of symbolic logic, 1938, vol. 3, pp. 150-155.
- **[7] Recursive predicates and quantifiers, Transactions of the American Mathematical Society, 1943, vol. 53, pp. 41-73.
- *[8] On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals, American journal of mathematics, 1944, vol. 66, pp. 41-58.
- *[9] On the interpretation of intuitionistic number theory, Journal of symbolic logic, 1945, vol. 10, pp. 109-124.
- *[10] On the intuitionistic logic, Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11-18, 1948), Amsterdam, 1949, pp. 741-743 (fasc. 2).
- **[11] A symmetric form of Gödel's theorem, Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences, 1950, vol. 53, pp. 800-802.
- *[12] Recursive function and intuitionistic mathematics, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U. S. A., Aug. 30-Sept. 6, 1950), 1952, vol. 1, pp. 679-685.
- **[13] Introduction to metamathematics, Amsterdam, 1952.

- *[14] Arithmetical predicates and function quantifiers, Transactions of the American Mathematical Society, 1955, vol. 6.
- *[15] Hierarchies of number theoretic predicates, Bulletin of the American Mathematical Society, 1955, vol. 61, pp. 193-213.
- *[16] On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals (II), American journal of mathematics, 1955, vol. 77, pp. 405-428.
Kleene-Church, Kleene-Rosser, Kleene-Post 参照

Kleene, S. C. & Rosser, B.

- [1] The inconsistency of certain formal logics, Annals of mathematics, ser. 2, 1935, vol. 36, pp. 630-635.

Kleene, S. C. & Post, E.

- *[1] The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, Annals of mathematics, 1954, vol. 59, pp. 379-407.

Kuznécov, A. V.

- *[1] O primitivno rékursivnyh funkciáh bol'sógo razmaha (On primitive recursive functions of large oscillation), Doklady Akademii Nauk SSSR, n. s., 1950, vol. 71, pp. 233-236.

L'Abbé, Maurice

- **[1] Théorie des fonctions récurives et la logique mathématique, Texte dactylographié d'une serie de conférences faites à l'Institut H. Poincaré, 1953.

Lacombe, Daniel

- *[1] Extension de la notion de fonction réursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables réelles I, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1955, t. 240, p. 2478-2480.
- *[2] Le même titre II, Ibid., 1955, t. 241, p. 213-214.
- *[3] Le même titre III, Ibid., 1955, t. 241, p. 151-153.

Markov, A. A.

- *[1] Névozmožnost' nékotoryh algorifmov v teórii asociativnyh sistém, Doklady Akademii Nauk SSSR, n. s., 1947, vol. 55, pp. 587-590. Eng. tr. On the impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems, Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des sciences de l'URSS, n. s., 1947, vol. 55, pp. 583-586.
- *[2] O nékotoryh nérázrěsimyh problémah kasaúščihsá matric (On some

unsolvable problems concerning matrices), Doklady Akademii Nauk SSSR, n. s., 1947, vol. 57, pp. 539-542.

- *[3] Névozmožnosť některých algoritmů v teorii asociativních systémů II (Impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems II), Ibid., 1947, vol. 58, pp. 353-356.
- *[4] O představení rekursivních funkcí (On the representation of functions), Ibid., 1947, 1891-1892.
- *[5] O představení rekursivních funkcí (On the representation of recursive functions), Izvestiya Akademii Nauk SSSR, ser. mat., 1949, vol. 13, pp. 417-424. Eng. tr. On the representation of recursive functions, American Mathematical Society, translation No. 54, lithoprinted, New York, 1951.
- *[6] Névozmožnosť některých algoritmů v teorii asociativních systémů (Impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems), Doklady Akademii Nauk SSSR, n. s., 1951, vol. 77, pp. 19-20.
- *[7] Névozmožnosť algoritmů rozpoznávání některých svojstv asociativních systémů (Impossibility of algorithms for distinguishing certain properties of associative systems), Ibid., pp. 953-956.
- *[8] Ob odnoji nerozřešitelné, ksaušcejší matric (An unsolvable problem concerning matrices), Ibid., 1951, vol. 78, pp. 1089-1092.

Markwald, W.

- [1] Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen, Mathematische Annalen, 1954, vol. 127, pp. 136-149.
- *[2] Zur Eigenschaft primitiv-rekursiver Funktionen, unendlich viele Werte anzunehmen, Fundamenta mathematicae, 1955, vol. 42.

Mostowski, Andrej

- *[1] On definable sets of positive integers, Fundamenta mathematicae, 1947, vol. 34, pp. 81-112.
- *[2] On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates, Annales de la Société polonaise de Mathématique, 1948, vol. 21, pp. 114-119.
- *[3] An undecidable arithmetical statement, Fundamenta mathematicae, 1949, vol. 36, pp. 143-164.
- *[4] A classification of logical systems, Studia philosophica, 1951, vol. 4, pp. 237-274.

- **[5] Sentences undecidable in formalized arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel, Amsterdam, 1952.

Mostowski-Tarski, 及び Mostowski-Tarski-Robinson 参照

- [6] The present state of investigations on the foundations of mathematics (with Grzegorczyk, Jaskowski, Los, Mazur, Rasiowa and Sikorski), *Rozprawy matematyczne ix*, Warszawa, 1955.

Mostowski, A. & Tarski, A.

- [1] Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings (abstract), *Journal of symbolic logic*, 1949, vol. 14, p. 76.

Myhill, John

- *[1] Three contributions to recursive function theory, *Actes du XI^{ème} congrés international de philosophie*, (Bruxelles, 20-26 août, 1953), 1953, vol. 14, pp. 50-59.
- *[2] A fixed point theorem in recursion theory (abstract), *Journal of symbolic logic*, 1955, vol. 20, p. 205.
- **[3] Creative sets, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1955, vol. 1, pp. 97-108.
- *[4] Solution of a problem of Tarski, *Journal of symbolic logic*, 1956, vol. 21, pp. 49-51.

Nelson, David

- *[1] Recursive functions and intuitionistic number theory, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1947, vol. 61, pp. 307-368.
- *[2] Constructive falsity, *Journal of symbolic logic*, 1949, vol. 14, pp. 16-26.

Péter, Rózsa

- *[1] Rekursive Funktionen, *Verhandlungen der Internationalen Mathematiker Kongresses*, Zürich, 1932, vol. 2, pp. 326-337.
- **[2] Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen, *Mathematische Annalen*, 1934, vol. 110, pp. 612-632.
- **[3] Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, *Ibid.*, 1935, vol. 111, pp. 42-60.
- *[4] A rekurzív függvények elméletéhez (Zur Théorie der rekursiven Funktionen), *Hungarian with full German abstract, Matematikai és fizikai lapok*, 1935, vol. 42, pp. 25-49.

- **[5] Über die mehrfache Rekursion, Mathematische Annalen, 1936, vol. 113, pp. 489-527.
- *[6] Über rekursive Funktionen der Zweiten Stufe, Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, Oslo, vol. 2, p. 267.
- *[7] Contribution to recursive number theory, Acta scientiarum mathematicarum, 1940, pp. 233-238.
- **[8] Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen, Journal of symbolic logic, 1950, pp. 248-272.
- *[9] Zum Begriff der rekursiven reellen Zahl, Acta scientiarum mathematicarum, 1950, vol. 12, part A, pp. 239-245.
- **[10] Rekursive Funktionen, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.

Post, Emil L.

- *[1] Finite combinatory processes-formulation I, Journal of symbolic logic, 1936, vol. 1, pp. 103-105.
- *[2] Formal reductions of the general combinatorial decision problem, American journal of mathematics, 1943, vol. 65, pp. 197-215.
- **[3] Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problem, Bulletin of the American Mathematical Society, 1944, vol. 55, pp. 284-316.
- *[4] A variant of a recursively unsolvable problem, Ibid., 1946, vol. 52, pp. 264-268.
- *[5] A note on a conjecture of Skolem, Journal of symbolic logic, 1946, vol. 11, pp. 73-74.
- *[6] Recursive unsolvability of a problem of Thue, Ibid., 1947, vol. 12, pp. 1-11.
- *[7] Degrees of recursive unsolvability, Preliminary report, Bulletin of the American Mathematical Society, 1948, vol. 54, pp. 641-642.

Kleene-Post 参照

Quine, Willard Van Orman

- [1] Mathematical logic, New York, 1st ed. 1940, Rev. ed. 1951.
 - **[2] A proof of Church's theorem, mimeographed lectures, Harvard, 1954.
- Church-Quine 参照

Rice, H. G.

- *[1] Classes of recursively enumerable sets and their decision problem,

Transactions of the American Mathematical Society, 1953, vol. 74, pp. 358-366.

- *[2] On completely recursively enumerable classes and their key arrays, Journal of symbolic logic, 1956, vol. 21, pp. 304-308.

Robinson, Julia

- [1] Undecidability in the arithmetic of integers and rationals and in the theory of fields (abstract), Journal of symbolic logic, 1949, vol. 14, p. 77.
- [2] Definability and decision problem in arithmetic, Ibid., pp. 98-114.
- **[3] General recursive functions, Proceedings of the American Mathematical Society, 1950, vol. 1, pp. 703-718.
- **[4] A note on primitive functions, Ibid., 1955, vol. 6, pp. 667-670.

Robinson, Raphael M.

- **[1] Primitive recursive functions, Bulletin of the American Mathematical Society, 1947, vol. 53, pp. 925-942.
- **[2] Recursion and double recursion, Ibid., 1948, vol. 54, pp. 987-993.
- [3] Undecidable rings (abstract), Ibid., 1949, vol. 55, p. 1050.
- [4] An essentially undecidable axiom system, Proceeding of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U. S. A., Aug. 30-Sept. 6, 1950), 1952, vol. 1, pp. 729-730.
- **[5] Primitive recursive functions II, Proceedings of the American Mathematical Society, 1955, vol. 6, pp. 663-666.
- *[6] Arithmetical representation of recursively enumerable sets, Journal of symbolic logic, 1956, vol. 21, pp. 162-186.

Rosenbloom, Paul

- [1] The elements of mathematical logic, New York, 1950.

Rosser, J. Barkley

- [1] A mathematical logic without variables, Annals of Mathematics, ser. 2, 1935, vol. 36, pp. 127-150. Duke mathematical journal, 1935, vol. 1, pp. 328-355.
- **[2] Extensions of some theorems of Gödel and Church, Journal of symbolic logic, 1936, vol. 1, pp. 87-91.
- **[3] An informal exposition of proofs of Gödel's theorems and Church's theorem, Journal of symbolic logic, 1939, vol. 4, pp. 53-60.

- [4] New sets of postulates for combinatory logics, *Ibid.*, 1942, vol. 7, pp. 17-27.

**[5] Deux esquisses de logique, Paris, 1954.

Schönfinkel, Moses

- [1] Über die Bausteine der mathematischen Logik, *Mathematische Annalen*, 1924, vol. 92, pp. 305-316.

Skolem, Thoralf

- **[1] Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich, *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I, Matematisk-naturvidenskabelig klasse* 1923, no. 6, 38 pp.
- *[2] Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierten Relationen auf "arithmetische", *Acta litterarum, ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Franciscus-Iosephinae, Sectio scientiarum mathematicarum* (Szeged), 1936-7, vol. 8, pp. 73-88.
- *[3] Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1939, vol. 48, pp. 268-276.
- *[4] Some remarks on recursive arithmetic, *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlinger*, 1944, vol. 17, pp. 89-92, pp. 103-106, pp. 107-109, pp. 126-129.

Specker

- *[1] Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *Journal of symbolic logic*, 1949, vol. 14, pp. 145-158.

Spektor, Clifford

- *[1] Recursive well-orderings, *Journal of symbolic logic*, 1955, vol. 20, pp. 150-163.

Szmielew, Wanda

- [1] Decision problem in group theory, *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy* (Amsterdam, Aug. 11-18, 1948), 1949, pp. 763-766 (fasc. 2).

Szmielew, W. & Tarski, A.

- [1] Theorems common to all complete and axiomatizable theories, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1949, vol. 55, p. 1075.

- [2] Mutual interpretability of some essentially undecidable theories, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U. S. A., Aug. 30-Sept. 6, 1950), 1950, vol. 1, p. 734.

Tarski, Alfred

- [1] On essential undecidability (abstract), Journal of symbolic logic, 1949, vol. 14, pp. 75-76.
- [2] Undecidability of group theory (abstract), Ibid., pp. 76-77.
- [3] Undecidability of the theories of lattices and projective geometries (abstract), Ibid., pp. 77-78.
- [4] A decision method for elementary algebra and geometry, 2nd ed. Berkeley and Los Angeles, 1951.

Mostowski-Tarski 及び Tarski-Mostowski-Robinson, Szmielew-Tarski
参照

Tarski, Mostowski & R. M. Robinson

- **[1] Undecidable theories, Amsterdam, 1953.

Thue, Axel

- [1] Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln, Skrifter utgit av Videnskapssels kapet i Kristiana I, Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1914, no. 10, 34 pp.

Trahténbrot, B. A.

- [1] Névozmožnost' algoritma dlá problémy razřešimost na konečnyh klassah (Impossibility of an algorithm for the decision problem in finite classes), Doklady Akademii Nauk SSSR, n. s., 1950, vol. 70, pp. 569-572.

Turing, Alan Mathison

- [1] On computable number, with an application to the Entscheidungsproblem, Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, 1936-7, vol. 42, pp. 230-265. A correction, Ibid., 1937, vol. 43, pp. 544-546.
- *[2] Computability and λ -definability, Journal of symbolic logic, 1937, vol. 2, pp. 153-163.
- [3] The p -function in λ -K-conversion, Ibid., p. 164.