Title	算数の文章題の問題解決に見られる個人差の分析
Sub Title	Analysis of individual differences in how children solve mathematical word problems
Author	前田, 洋士(Maeda, Hiroshi) 中野, 隆司(Nakano, Takashi)
Publisher	慶應義塾大学大学院社会学研究科
Publication year	1994
Jtitle	慶応義塾大学大学院社会学研究科紀要 : 社会学心理学教育学 (Studies in sociology, psychology and education). No.39 (1994.) ,p.1- 11
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	論文
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN0006957X-00000039-0001

算数の文章題の問題解決に見られる個人差の分析

Analysis of Individual Differences in How Children Solve Mathematical Word Problems

前田洋士*
Hiroshi Maeda
中野隆司**
Takashi Nakano

The purpose of the present study is to investigate how elementary school children comprehend mathematical problems and how they solve such problems by themselves.
Sixty-four sixth graders solved mathematical word problems about a solution of salt. The data that we analyzed were dialogues between testers and children recorded on pre-test and post-test. At first, we classified all the children's wrong answers to see how they solved those problems and how those wrong answers were produced. Then we investigated children's dialogues to see their own ways of solving the problems.
The results of this study indicate that there are different strategies to solve problems. Some children could not change their strategies. We discussed why they remained at the same strategies after instructional intervention and what to do next to develop this study.

問　題

"数学教授の主な目標は，その教科に関する構造化された知識を子どもが獲得できるように援助することである" (吉田, 1982) という言葉は現場の教師からもよく耳にする。現在,公教育，特に小・中・高等学校で教えられている算数・数学は，論理的に矛盾のないように綿密に構造化が図られ，学習すべき内容が学年毎に決められていて，それらを順序通りにこなしていけば必ず習得できるように配慮がなされている。しかし,実際には,順序通りに同じように教授したとしても大きな個人差が生じてくる。ここで必要なことは，教科に関する構造化された知識を獲得する過程を分析し，それによって個人差を説明することである。そのためには，それぞれの子どもの理解の状態における知識構造と,その力動的側面,即ちその構造が時事刻々と変化するものなのか変わるとすればどのように変わるのか，を解明することが必要である。こうして初めて，個人差を説明することの一歩となるのである。本研究は，さらに目的を限定して，短期間の指導を施すことによる問題解決過程の変化を分析し，子どもの知識構造を部分的に説明することを試みる。以下，現在までの問題解決及び教授過程に関する主な研究例を挙げながら，本研究の方向性を示すこととする。

「問題を解く」ということはいかなる認知過程であるのか。Simon & Simon (1978) は，初等力学の等速直線運動と等加速度直線運動を題材として選び，問題が"何とか"解けるのと"うまく"解けるのとではどこがどう違うか，物理学の"素人"と"専門家"との問題解決過程のプロトコルを比較した。その結果，①: 経験の豊かな専門家は，公式の想起，変形，数値の代入を1ステップで行っているのに対し，経験の少ない素人は，3ステップで行っていること，②: 経験の少ない素人は，既知の数値をそのまま公式に代入したのでは解けない場合に，求めるべき変数 a を念頭におき，それが得られるためには変数 b が必要，変数 b が求められるには，変数 c が必要という具合に，解決に必要な変数を次々に調べて既知の数値が使えるところまで後戻りし (後ろ向き),

* 慶應義塾大学総合政策学部教育助手 (教育心理学，発生的認識論)
** 慶應義塾大学文学部非常勤講師 (教育心理学)

改めてその順序を逆に辿って（前向き）解くという「後ろ向き推論」を行うのに対して，経験の豊かな専門家は，公式を用いて値の分かっている変数から順序通り（はじめから前向き）に解いていく「前向き推論」を行っていること，などが明らかになった。その後，専門家と素人とのこうした差異は，知識構造の相違によるのではないかという議論がなされた。たとえば，Chi, Glaser, & Rees (1982) は，問題スキーマ，すなわちある問題に関する一連の知識のかたまり，なるものを想定し，専門家と素人とはこの問題スキーマにおいて違いがあるという仮説を立て，その違いを明らかにした。それによれば，専門家はその問題を解決するのに必要な既有知識の量が多いだけでなく，それらが構造化されている点で素人とは異なるというのである。このような専門家と素人との違いに関する研究は，現在も盛んに行われ様々な見解が示されている。これらの研究は，素人と専門家との質的な違いを二極的に説明した点で評価できるが，素人から専門家への構造の変換過程という肝心な点が説明されていない。これが説明されなければ，知能が異なるから個人差が生ずると主張するのと何ら変わりはない。

対象が子どもの場合の上述のような能力の違いについての研究例としては，分析法は異なるが，計算問題の誤答の生成プロセスに関するものを挙げることができる。Young & O' shea (1981) は，引き算の筆算において生成される誤答を分析し，正しいルールが削除され誤ったルール（以下バグと呼ぶことにする）が挿入されることで誤答が生じるという結論に達した。また，Brown & VanLehn (1980) は計算の間違いはでたらめなものではなく一貫したルールの使用によるものだという観点から，引き算の筆算において生成されるバグを題材にして，それらの生成のプロセスについてのコンピューターモデルを開発した。Young & O'shea と異なる点は，バグは単純に誤ったルールが挿入されることではなく，問題解決中行き詰まった際に何とか脱出しようとしてその場で発見的に方略を生成していくという複雑な過程の結果であるということである。Brown & VanLehn は，このような方略を“間に合わせ方略”(repair theory) とよんでいる。この間に合せ方略は，特異な誤答の生成の原因を説明しているが，その様な間に合わせの方略が生じてくることの背後にある知識の構造はいかなるものであるのかを説明していない。

吉田 (1983) も同様に，算数の計算問題の解決過程に見られる“解法上の誤った方略”について検討し，その結果，ある児童はそうした誤り方略を全く身につけていないのに，別の者はいくつもの方略を持っていることを明らかにした。吉田 (1991) は，“彼らは彼らに特有の一貫した方略を身につけているだけなのである。その方略は誤っているにせよ，ある意味では，彼らは，ちゃんとした学習能力を持っている子どもなのである”としている。そうであるならば，その能力とはどのような構造や性格を持ち合わせているのか，どのようにそういった能力を活かすべきかを説明しなければなるまい。

ところで，現在の算数の問題解決過程に関する研究では，解決過程を変換 (transration)，統合 (integration) プランニング (planning)，実行 (execution) などの下位過程に分け，それらを順次実行していく過程であると説明し，下位過程ごとにつまずきを分析することなどが潮流となっている (ex.Mayer, Tajika, & Stanley, 1991)。このような議論は，いわばコンピーターの言語，中でもとくにインタプリタ型の，即ち課題が与えられると1行ずつ解釈しながら決まったルーチンを順番に実行していく過程に類似している。しかし，人間の高次の情報処理過程が一次元的に順序通りに行われるものとは考えがたい。人間の思考や行動は柔軟性に富んでおり，実際の過程はそのように決まった手順通りにはいかないものであろう。本研究では，実際の問題解決過程から知識構造を解明するため，上記のような下位過程に分けての分析は行わない。

ここで筆者は，「わかる」即ち「理解する」ということは客観的な数学的構造あるいは理論をその人がすでに持っている知識の構造と何ら矛盾することなく合致させることができることであると定義し，一方「とける」ということは数学的構造や理論が知識の構造に組み込まれていなくてもあるいはすでにある知識の構造と合致していなくとも，解決の手順の記憶で遂行が可能なことであると定義する。子どもを「理解する」ようにするべきか「とける」だけでよいとするのかは，教育目標も絡めて考えるべき問題であるので，その是非については今回は触れないこととする。いずれにせよ，算数の問題解決には，公式や計算のルール，つまり手順が適用されることが必要である。ここで，子どもが公式やルールをどのように心的に構造化しているのかによって，生産される結果（解法や解答）は異なってくるであろう。松原 (1988)は，「子どもは，定義によって算数の内容を理解するのではない」という言葉で，子どもの物事に対する見方，考え方の様相を言い表している。つまり，子どもは教師によって提示された言葉や公理や定理を，皆が同じように認識するのではなく，各々が様々な仕方で認識

して各々の頭の中で理論を構築しているのである。その結果として，算出される解答が多様になることが予測される。このように子どもの頭の中に構築された理論，即ち知識構造を説明すべく，本研究は，「理解」という事柄，とくに「個々の理解の下での問題解決」ということに着目し，子どもに対する個別面接形式のテストから得られたデータを質的に分析する。それにより，子どもの持つ知識構造やその性質の一部を説明できるであろう。今回は，卒業を間近に控えた小学6年生を対象にし，「食塩水の割合」についての領域を課題として取り上げた。この領域を扱う理由は，学年を考慮した上での問題の複雑さが適当であろうと筆者が判断し，また，中学校で学習する内容につながるようにという教育的配慮からである。

目　的

小学校6年生に算数の学習領域である「食塩水の割合」について教授を施し，指導期間を挟んで行う2回のテストにおいて見られる変化や生成される様々な誤答を，被験者全体及び，個々の事例について分析することにより，個々の理解の状態に基づく解答が生成される背後にある知識構造を考察し，また教授者側からの対処について検討する。

方　法

a) 被験者：東京，神奈川県川崎市の一部区域に在住する小学校6年生64名。知能偏差値は，新田中AB式知能検査で，平均53.57 (SD=10.62)。なお，本研究での被験者は慶應義塾大学双生児研究会のプロジェクトの一環で行われた算数学習教室に参加した双生児32組である。被験者は，各きょうだいを1人ずつ2クラスに分けた。1クラス32名となった。

b) 実験期間：1993年3月末，5日間。各クラス1日正味90分。

c) 実験場所：慶應義塾大学三田校舎の教室内で行われた。

d) 実験者：クラス全体での一斉授業は，第2著者が行った。面接テスターと個別指導は，大学（院）生のアシスタント（各日10～11名）が担当した。

e) 全般的手続き（実験日程詳細：fig. 1 参照）：〈事前調査〉：実験日程期間の3週間前に，実験の説明会もかねて知能検査（新田中AB式）を施行した。〈実験第1日目〉：事前テストとして，1名につき40分以内の個別面接形式での算数テストを行った。面接テストの手続きは後述する。〈第2日目〉：クラス全体への講義形式の授業を行った。講義の内容は次の通りである。①割合についての基本的な説明：割合の考え方と公式を教示した。なお，公式についてはその展開を通じて，「割合」，「食塩水の重さ」，「食塩の重さ」の方程式上の変数の位置関係が異なるいわゆる第1用法から第3用法までを提示した。第1用法とは，「割合＝比べられる量÷もとにする量」，第2用法とは，「比べられる量＝基にする量×割合」，第3用法とは，「基にする量＝比べられる量÷割合」というものである。ただし，「第～用法」という提示はせずに，基本の形「割合＝食塩の重さ÷食塩水の重さ」を展開して，「このように展開される結果，3つの公式が生まれる」という説明の仕方で導入した。②濃度に関する文章題の解き方の説明：割合についての公式を直接利用するやり方と線分図（ある長さの線分全体を食塩水として，そこに占める水の割合と塩の割合を線分の長さで表現したもの）を利用する（最後には公式を用いる）やり方の2通りを教示した。線分図を使用する方法は，小学生に割合を半具体化して説明する際にしばしば用いられる技術の一つとして採択した。その意図は，特殊な教授法の教授効果を検証することではなく，いわば通常教室で行われているような（しかもなるべく丁寧な）教授法を施し，そのような状況で産出される多様な結果を分析することによって，個々の理解状態をふまえた教授をしなければ効果がないことを示し，また，なぜ効果が得られないかを検討することにある。また，今回の実験においては，2クラスにおいて同一の教授法を施したが，この理由も同様，特殊な教授条件の比較を目的とし

第1日目

事前テスト（各自40分）

↓

第2日目

全体授業 1.　割合についての基本的説明 2.　食塩水問題の解き方の説明 3.　問題演習

↓

第3・4日目

個別指導（各自40分）

↓

第5日目

事後テスト（各自40分）

Fig. 1　全般的手続きの流れ図

ていないためである。③問題演習：2通りの解き方ともやってみるという条件で生徒各自に例題を解かせた。このとき，生徒2，3人に1人の割合でアシスタント教師がついて指導した。<第3・4日目>：アシスタント教師による個別指導：一斉授業では不可能な個人への対応を行う目的で，アシスタント教師が生徒1人1人に対して 40 分間の個別指導を行った。<第5日目>：事後テスト：事前テストと同様に面接テストを行った。

f)　面接テストの手続き：①まず，生徒とテスターが1対1で横に並んで着席する。②生徒に問題文を見せ黙読させる（30 秒）。③問題文を音読させる。④問題を解かせる。筆記による解答のみでは頭の中ですでに完成された式や結果のみを黙々と記述するばかりで，解決過程の情報が十分に入手できなくなるので，考えたことや解き方を出来る限り発話するように促し，その上で解答用紙への筆記を認めた。発話内容はテスターが全て筆記記録した。⑤進展が見られないと判断したときには打ちきりとする。

g)　個人指導について：個人指導の基本手続きは面接テストと同様であるが解答用紙でなく，生徒自身のノートを使わせることが異なる。できるだけ生徒自身に問題を解かせ，生徒が自力で解決できない場合は打ち切りにせず，一斉授業で教授した解法に基づいて，生徒が納得したかどうか逐一確認を取りながら説明した。このような指導を行ったのは，全体授業の説明で述べた意図と同様，たとえ個人指導まで行って丁寧に指導しても，個々のレベルでの理解状態をふまえたものでなければ効果がないことを確認し，なぜ効果が得られないかを検討するためである。

h)　実験で用いられた問題：実験で用いられた問題は，以下の4問である。そのうち，事前テストは A（以下，事前 A と記す）と B（以下，事前 B と記す）の2問，事後テストも同様に，A（以下，事後 A と記す）と B（以下，事後 B と記す）の2問である。なお，事前 A と事後 A は，2つの食塩水を混ぜあわせて割合を問う問題，事前 B と事後 B は煮詰めて水を蒸発させるとどうなるかを問う問題であった。

事前 A：14 % の食塩水 200 g に，食塩 20 g と水 100 g を入れてよくかき混ぜました。何%の食塩水になりましたか？　**事前 B**：濃度 12%の食塩水 200 g があります。これを煮詰めて 150 g にすれば，何%の食塩水になりますか？　**事後 A**：6%の食塩水 300 g と，10 %の水 500 g を混ぜると，何%の食塩水ができますか？　**事後 B**：5%の食塩水が 480 g あります。この食塩水を 8 %の濃さにするには，何 g の水を蒸発させればよいですか？

なお，事前テストと事後テストでは，やや形式が異なるが食塩水に対する基本的操作は同じであるため，方程式上の解法は同じになる。形式を変えたのは，記憶にたより，憶えているそのままの形式に数値を当てはめればできてしまうという事態を避けるためである。

結果と考察

<1. 模範カテゴリー以外の反応の分類（誤答カテゴリー一覧表）>：使用されたデータは，面接テスターにより記録された発話プロトコル及び生徒が筆記した計算過程などを含めた記録である。なお，64 名中 22 名は，完全なデータを得ることができなかったので，残りの 42 名分のデータを用いて分析を行った。なお，事前・事後テストにおいて両方とも正解であった事例は，問題 A で9例，問題 B で 12 事例見られた。これらの事例は，分析の対象外とした。分類はまず全被験者の誤答を列挙し，同じ誤答や原因が同じと思われる誤答をグループ化した。その結果 10 カテゴリーに分類することができた（Table 1 参照）。各カテゴリーは順に，①：食塩水の問題が割合であることを把握していない，あるいは知らないため，「比」など近接した他の学習領域と解釈してしまう反応が見られた場合：「1. 問題領域の解釈エラー（以下，「1. 領域解釈」）」②：塾などで教わったことをそのまま意味も分からずに使う受け売り的な反応が見られた場合：「2. 特別な解法の受け売り（以下，「2. 受け売り」）」，③：例えば，煮詰めて濃度を高くする問題で，食塩も水と同じ割合で蒸発してしまうなどといった，物理的に誤った素朴な概念から発していると思われる反応が見られた場合：「3. 食塩水の性質の理解不足（以下，「3. 性質理解」）」，④：“食塩水＝食塩＋水”ということを知らない。あるいはそのイメージが把握されていないと思われる反応が見られた場合：「4. 食塩水の意味上の物解不足（以下，「4. 意味理解」）」，⑤：“基にする量×比べられる量＝割合”などと，正しく公式を再生できない反応が見られた場合：「5. 公式の不正確な再生（以下，「5. 公式再生」）」，⑥：食塩の含まれる割合を求める際に，食塩の量を食塩水の量ではなく水だけの量で割ってしまうなど，濃度の定義からして把握していないと思われる反応が見られた場合：「6. 濃度の概念の不完全性（以下，「6. 濃度概念」）」，⑦：% 同士を単純に加算してしまうなどの，割合の演算上の性質を把握していないと思われる反応が見られた場合：「7. 数値の演算

Table 1 誤答カテゴリー一覧表

No.	反応カテゴリーの名称	解説	事前A	事前B	事後A	事後B	実例
1	問題領域の解釈のエラー	食塩水の問題が割合の問題であることを把握していない，あるいは知らないため，「比」など近接した他の学習領域と解釈してしまう反応	1	1	2	0	事前B：「12%：200 g＝x %：150 g」(煮詰める前の濃度：煮詰める前の食塩水の量＝煮詰めた後の濃度：煮詰めた後の食塩水の量)
2	特別な解法の受け売り	塾などで教わったことをそのまま意味も分からずに使う受け売り的な反応	2	2	0	0	事前B：「２つの長方形を書いて，200 g が 12%，150 g が□で逆比になる。」($\boxed{200\,g}$：$\boxed{150\,g}$＝□：12%となり，これを解けば正解は導けるが，この事例では算出しなかった。)
3	食塩水の性質の理解不足	例えば，煮詰めて濃度を高くする問題で，食塩も水と同じ割合で蒸発してしまうなどといった，物理的に誤った素朴な概念から発していると思われる反応	1	9	0	4	事後B：「水を蒸発させると，塩が増えると思っていた。」(生徒の言葉より)
4	食塩水の意味上の理解不足	食塩水＝食塩＋水ということを知らない。あるいはそのイメージが把握されていないと思われる反応	7	1	0	0	事前A：「食塩全体の重さは 220 g，水全体の重さは 100 g」(塩の重さ全体と，食塩水全体の重さはそれぞれ幾つかと問われた時に答えた反応。実際は 48 g と 320 g)
5	公式の不正確な再生	基にする量×比べられる量＝割合などと，正しく公式を再生できない反応	6	5	5	3	事後A：0.6÷300 g」(割合“0.6”を掛けるべきところを，食塩水全体の量“300 g”で割ってしまった。)
6	濃度の概念の不完全性	食塩の含まれる割合を求める際に，食塩の量を食塩水の量ではなく水だけの量で割ってしまうなど，濃度の定義からして把握していないと思われる反応	3	1	2	0	事前A：「20 g の食塩÷100 g の水＝0.2 だから，20%になる」(加える食塩水の割合を求める時に，加えた塩塩の量“20 g”を加えた水の量“100 g”で割ってそれを答えとした。)
7	数値の演算上の取り扱いにおけるエラー	%同士を単純に加算してしまうなどの，割合の演算上の性質を把握していないと思われる反応	4	3	2	3	事前A：「20%＋14%＝34%」(基の食塩水の割合“14%”と，加える食塩の量“20 g”を 20% と取り違えてさらに足し合わせた。)
8	問題にならない水の量の算出	算出する必要もないのに水の量を出してしまう反応	3	4	5	2	事後A：「300 g −18 g ＝282 g」(基の食塩水“300 g”から，基の食塩水中の食塩の量“18 g”を引いている。)
9	算出した数字に対する混乱	正しい演算によって算出した数値であるにも関わらず，数値の意味を忘れてしまうか認知的に負荷がかかりすぎ，無秩序な計算に持っていかれてしまう反応	2	1	0	1	事前B：「200 g −24 g ＝176 g，176 −150＝26」(12% の食塩水 200 g 中の食塩の量“24 g”を求めた後，その中の水だけの量“176 g”を算出し，その数値“176”から煮詰めた後の食塩水の量“150”を引いている。)
10	場当たり的な数字の操作	問題文中に与えられた数値や算出した数値の操作に困り，場当たり的に演算を行う反応	3	7	1	9	事前B：「200÷150，200÷12%，200÷(2× 」(煮詰める前の食塩水の量“200 g”を煮詰めた後の食塩水の量“150 g”で割る。計算をせずに，基の食塩水の量“200 g”を基の割合“12%”で割ろうとするが計算せず，最後に基の食塩水の量“200 g”を何かで割ろうとして打ち切りになる。)

注 ① 事前Ａ～事後Ｂの欄の数字は，各問におけるカテゴリー出現数を示す。
② カテゴリー８は，単純に誤答と判断することは出来ない。
③ 各カテゴリーに対して実例を示した。なお，「 」内は生徒の反応，( ) 内はその解説を示す。

上の取り扱いにおけるエラー（以下，「7. 演算取り扱い」)」，⑧：算出する必要もないのに水の量を出してしまう反応が見られた場合：「8. 問題にならない水の量の算出（以下，「8. 水の算出」)」，⑨：正しい演算によって算出した数値であるにもかかわらず，数値の意味を忘れてしまうか認知的に負荷がかかりすぎ，無秩序な計算に陥ってしまう反応が見られた場合：「9. 算出した数字に対する混乱（以下，「9. 数字の混乱」)」，⑩：問題文中に与えられた数値や算出した数値の操作に困り，場当り的に演算を行う場合：「10. 場当り的な数字の操作（以下，「10. 場当り」)」と分類した

これら 10 カテゴリーは，概念理解に関するものと演算に関わるものに大別できる。概念理解に関するものとしては，カテゴリー「1. 領域解釈」～「7. 演算取り扱い」，演算に関するものとしては，カテゴリー「8. 水の算出」～「10. 場当たり」が含まれる。さらに下位的に分類すると，学習領域の把握に関連するカテゴリーが「1. 領域解釈」と「2. 受け売り」，食塩水の物理的意味に関連するカテゴリーが「3. 性質理解」と「4. 意味理解」，濃度・割合に関連するカテゴリーが「5. 公式再生」と「6. 濃度概念」と「7. 演算取り扱い」，誤答とは一概に判断できないカテゴリーが「8. 水の算出」，演算と概念との関わりに関連するカテゴリーが「9. 数字の混乱」と「10. 場当たり」となる。この「10. 場当たり」など幾つかのカテゴリーは，更に細かく検討する余地がある。

次に，各カテゴリーの出現回数を，各問ごとに集計した (Table 1)。一部は同一の被験者が重なっているため，各問を列ごとに合計した数値は各問の誤答者数を正確に反映しないが，事前と事後の誤答カテゴリーの出現数の変化が概ね読みとれる。カテゴリー別に事前・事後の推移を見ると，減っているものが多いが，その減り方はまちまちであった。事前・事後を通じて出現数が最も多いカテゴリーは，「5. 公式再生」であった。「2. 受け売り」は，事後テストでは全く見られなくなる。これは，特別な解法はそれ自体の構造的意味が子どもには理解されておらず，しかも子どもにより歪曲された解釈の下で用いられているため，安定した状態で把持されておらず，教授期間で容易に一掃されたものと考えられる。また，「4. 意味理解」も事後テストでは全く見られなかった。「4. 意味理解」は要するに食塩水の定義の問題であり，具体的な操作であるので食塩水のイメージを掴みやすかったのではないだろうか。「5. 公式再生」，「7. 演算取り扱い」，「8. 水の算出」，「10. 場当たり」については，出現数にあまり変化が見られなかった。「5. 公式再生」「7. 演算取り扱い」に変化が見られなかったのは，上述のように指導しても「理解」の水準まで達成することができなかったことを示唆する。「8. 水の算出」については，とりあえずは1ステップで算出できる数値ということで計算してしまうのであろうか。

ここまでの結果に見られるように，指導後も依然指導前と同様の誤答過程を辿ったり同じ誤答カテゴリーを生成するということは，それらの被験者の食塩水問題についての知識構造が指導によって修正されなかったことを示している。同じカテゴリーの誤りが指導前後で一貫して変化しないということは，被験者は指導されたものとは別の個々の特異な論理で解答していることが推測できる。そして，そのような一貫した誤答が生成されるということは，背後に論理的構造体，すなわち半潜在的なメンタルモデルの存在を示していると考えられる。被験者は，学習した知識を基に構築されたメンタルモデルを用い，特異な論理に基づいた間に合わせ方略を生成するものと考えられる。Brown & VanLehn (1980) は，「間に合わせの方略」を，問題の解法における論理が，全くのでたらめなものではなく，何らかの理屈にしたがったものとしているが，本研究においても「間に合わせの方略」を同様に取り扱うことにする。また，この結果からそれらメンタルモデルがいかに頑健であるかがわかる。次に，個々の事例について検討してみる。

<2. 個々の解決過程の検討>：まず，被験者がどのような方略を用いて解決しているのかを流れ図に示した。紙面の都合上，3例のみを Fig. 2-4 に示す。結果は同一被験者の事前テストと事後テストすなわち，事前Aと事後A，または事前Bと事後Bを対にして示すこととする。なお，被験者は，以下「A111」のように被験者番号で示す

《同じタイプの誤答》：まず，事前・事後において同じタイプの誤答をする事例は，実際には全体で 84 事例中 23 事例見られたが，ここではそのうちの4例を示す。問題Aについては 10 事例，問題Bについては 13 事例見られた。

事前 A・事後 A：B241 (fig. 2) は，食塩水中の食塩を求めた後 (a) (b)，水だけの量を算出（「8. 水の算出」）し (c)，改めてその値と食塩だけの重さを足し合わせた (d)。それ以降が場当たり的な解決方法（「10. 場当たり」）になった (e) (f)。事後テストでは，基の食塩水の食塩の量と加える食塩水の食塩の量を求めた後 (g) (h)，同様に水の量だけを求め（「8. 水の算出」）(j) (k)，

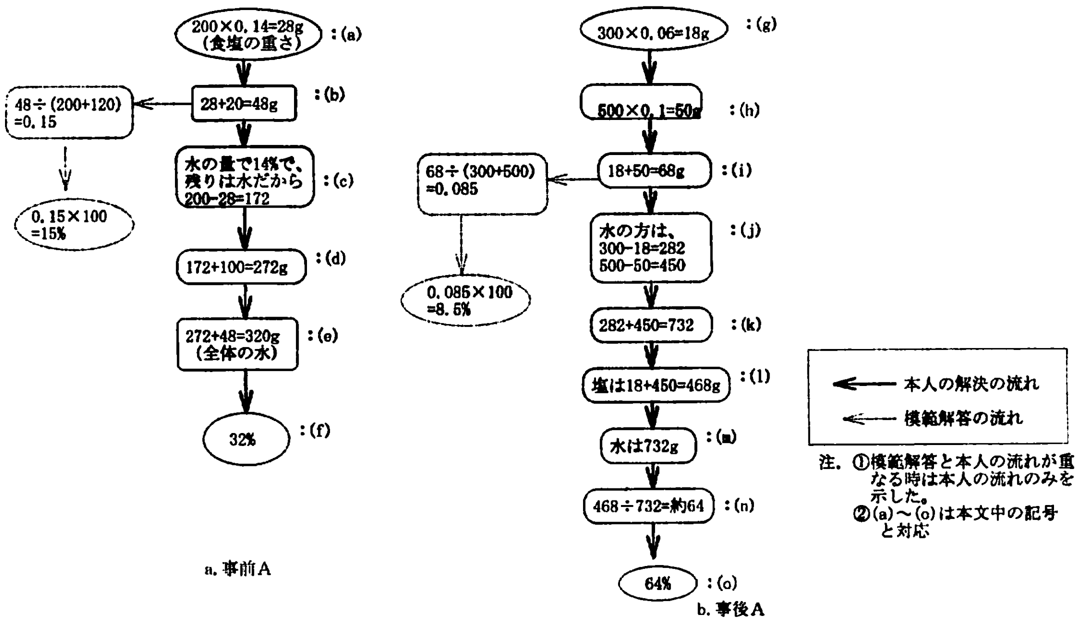

Fig. 2 B241 の解答の流れ図

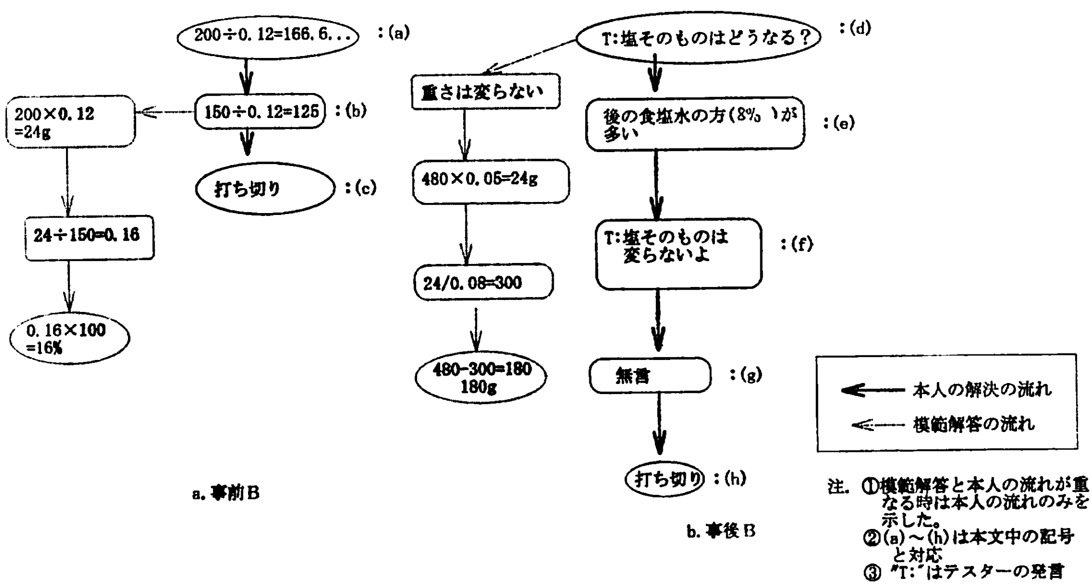

Fig. 3 A231 の解答の流れ図

求めた水の量で食塩全体の量（「6. 濃度概念」）を求めた後 (l)，最後は場当り的な解法になった (m) (n) (o)。この事例では，食塩水中の水の量を算出し，その値を使って場当り的に答えを導くところに共通性が見られた。

A242 は，事前テストにおいて，はじめに食塩の量を求める方法を思い出せなかったが，もし食塩の量が分かったとしたら食塩水全体から食塩の量を引けばよい（「8. 水の算出」）と主張する。その後打ち切り。事後テスト

では，食塩の重さの求め方まではできたが，事前と同様水だけの量を算出（「8. 水の算出」）し，さらに，食塩水の量で割る（「6. 濃度概念」）ことを主張する。これら被験者においては，問題に含まれる変数間の何らかの関係性を認知し構築して，立式を行い解答していることが推察できるが，その関係が公式に合致していないのである。公式と自分で認知し構築した一連の解答過程，即ち個人内のモデル，が合致して初めて正解できるのである。

事後 B・事後 B: A 231 (fig. 3) は，基の食塩水の重さを基の割合で割った（「5. 公式再生」）(a)。さらに，煮詰めた後の食塩水の重さを基の割合で割った（「5. 公式再生」，「3. 性質理解」）(b)。その後，打ち切りになった (c)。これも食塩水の重さなどの変数間において，何らかの関係を認知してはいるものの，公式と合致していない例である。また，事後テストにおいても，濃度が上がれば塩の量も増えると思っていた（「3. 性質理解」）(d) (e) (f) という発言が見られた。食塩水の操作上のイメージ（煮詰めても塩の量は変わらない）が現実の現象と合致していないと判断できる。その後，打ち切りになってしまった (g)(h)。はっきりはしないが，食塩水の操作を行ったときに変化する割合と変化しない塩の量との関係について誤ったイメージを抱いているようだ。A 322 は，事前テストにおいて，基の食塩水の 1 %が何 g か求める（「7. 演算取り扱い」）のに，基の食塩水の量を%の単位の数値で割ってしまう (200÷14)。事後テストにおいても，まず同様に 1 %の塩の重さ（「7. 演算取り扱い」）を求めている。この被験者は，割合 (%) と塩などの重さ (g) に誤った関数関係を考えているようだ。

以上の事例に共通するのは，変数間に何らかの関係性を持たせようとすることである。現象的には，公式を正確に再生できないことによる誤答と見えるが，さらにその背後にある原因を追求する必要があろう。おそらく，食塩水の問題に対して自分なりの操作的モデルを構築しているのであろう。そのモデルが模範解答に合致しないため誤答となるである。いずれにせよ，教授を施しても子どもの構築するモデルが一貫して変わらない。それは，一貫した論理なので Brown & VanLehn (1980) のいう間に合わせ方略と同様な方略といえよう。

《改善された事例》: 次に，指導期間を挟んで結果（解法や解答）に変化が見られた事例を示す。まず，事後テストで改善された事例を示す。全体で 37 事例，問題 A では 22 事例，問題 B では 15 事例見られた。

事前 A・事後 A: A 122 は，事前テストにおいて，まず含まれる塩の量を算出し，水だけの量を算出（「8. 水の算出」）してから，塩の量を水だけの量で割った（「6. 濃度概念」）。事後テストでは，模範解答通りに解いた。A 211 は，事前テストにおいて，間に合わせ的な解答（「10. 場当り」）を行っていたが，事後テストでは，水の量だけの算出（「8. 水の算出」）を行い，それで塩の量を割って（「6. 濃度概念」）しまうことを除いては，模範解答通りになった。

事前 B・事後 B: A248 は，事前テストでは「煮ると重さが増えて，300 g になる」（「3. 性質理解」）とした。事後テストでは，はじめ黙り込んでいたが，途中公式を言わせるとすぐに正解に至った。B 042 は，事前テストでは「200 g が 12% だから，100% が 24%…。24% と 12% の真ん中で 18%」（「7. 演算取り扱い」）と答えた。事後テストでは，模範的解答を行い正解であった。改善された場合，メンタルモデルが変換された可能性はある。それを確認するには，色々な問題を解かせてみる必要があるが，本研究では実施できなかった。

《事後テストで結果が悪化した例》: 次に，事後テストの結果が事前テストの結果より悪化してしまった事例を示す。全体で 3 事例，問題 A では 1 事例，問題 B では 2 事例見られた。

事前 A・事後 A: B 201 は，事前テストは正解であった。しかし，事後テストで，基の食塩水の食塩の量を求める際に計算ミスをしてしまい，数値を扱いきれず（「9. 数字の混乱」）打ち切りとなってしまった。これは，演算を行う前に頭の中で構築したモデルから見積もった答えと実際に解答を行って得られた数値が合致しなかったときに計算ミスとは考えず，立式上の間違いと考えて混乱したのではないか。

事前 B・事後 B: B202 (fig. 4) は，事前テストでは公式通り正解であった。事後テストでは基の食塩水の重さに蒸発後の食塩水の%を掛け合わせ（「3. 性質理解」）(a)，算出した量をさらに基の食塩水の重さで割った（「9. 数字の混乱」）(b)。その後，基の食塩の量だけを求め (c)，そこで打ち切り（「5. 公式再生」）になった (d)。この被験者は，事後テスト A においても打ち切りになっている。なお，3 例に共通する結果は，最後に混乱して打ち切りになる点である。

以上の結果全体から，次のような一連の推測的結論を導くことができる。まず，①: 今回の教授の方法では参加した生徒の 4 分の 1 強が改善しなかったが，それは個別の指導まで行ったものの，被験者個々のモデルを考慮しなかったためである。②: 食塩水の公式が正確に把持

されず，一部が変形されることは，子どもが頑健なメンタルモデルを表象していることを示唆する。つまり，子どもは自分なりの操作的モデルを構築し，その下に解法を構成して解答するのである。また，③：問題解決者は，式を立てるなど数学的手続きを開始する前に，解答の見積もりを立てているらしい。その見積もりは，正確な数値や理屈ではなく，例えば「食塩水の割合を求めなさい」といった問題では，「200g が 12%だから，100g が 24%…。24%と 12%の真ん中で 18%」といったものや「%を求めるのだから前にやった問題からすると，このくらいの大きさの整数になるな」といった大まかなものである。その見積もりと実際に解いた結果があまりにも食い違って合致しないときに，それ以降の実行が不能になるか，あるいは場当り的な演算で強引に見積もりに近づけるという行動に出ることもある。ここまでの議論から，Simon ら (1978) が提起した前向き推論において，想起・変形・数値の代入が1ステップで行われるという議論は，専門家でなくとも，メンタルモデルがあれば行っている可能性があることが推測できる。いずれにせよ，今回は教授を施しても子どもの構築するモデルを修正することができなかった。このような「理解」の状態の被験者に正確に教授し，知識の構造が変換されるにはどのくらいの期間あるいはどのような説明をしたらよいのであろうか。あるいはどのように変換されていくのか。そもそも教えることで変えられるのか。今後，検討する必要があろう。

子どもは個々のモデルを駆使して問題解決に当たると説明してきた。これまでの結果から，子どもの持つメンタルモデルは，Findler (1979) らの意味ネットワーク表現などを参考にして次の様に考えることができる。まず，全体的にネットワーク状の構造を持っていて，各項目は有機的に結びついている。理解がなされている被験者の場合 (fig. 5)は，公式や日常経験による知識や食塩水の問題に関わる重要な概念などが孤立することなく結びついていて，課題が与えられたときには，その課題で必要とされる最小限の項目が選択され，新たに表象モデルが構成される。被験者にとって直接意識化されるのは，この表象モデルである。実際には fig. 5 に示されるよりも組織化される項目数は多く，複雑なつながりがあるものと考えられるが概ねこのような枠組みを持ったモデルであろう。このことは fig. 6 についても同様である。また，Table 1 で分類した誤答カテゴリーはモデルの項目あるいは項目間のつながりに対応させることが出来る (fig. 5)。このうち，誤答カテゴリー「7. 演算取り扱い」，「9. 数字の混乱」，「10. 間に合わせ」については図中に記入されていない。「7. 演算取り扱い」は，%についての演算上の性質であり，食塩水の問題について直接関わりがないので fig. 5 に含めなかった。「9. 数字の混乱」は，ここでのモデルを処理しきれず表象モデルを把持していくことが出来なかったことにより起こるのであろう。「10. 場当たり」は，個々の被験者において構築されたモデルにより様々に起こりうる。先述の通り，モデルは他に存在する可能性のある項目と複雑に結びついているので，これらの誤答項目は fig. 5 の

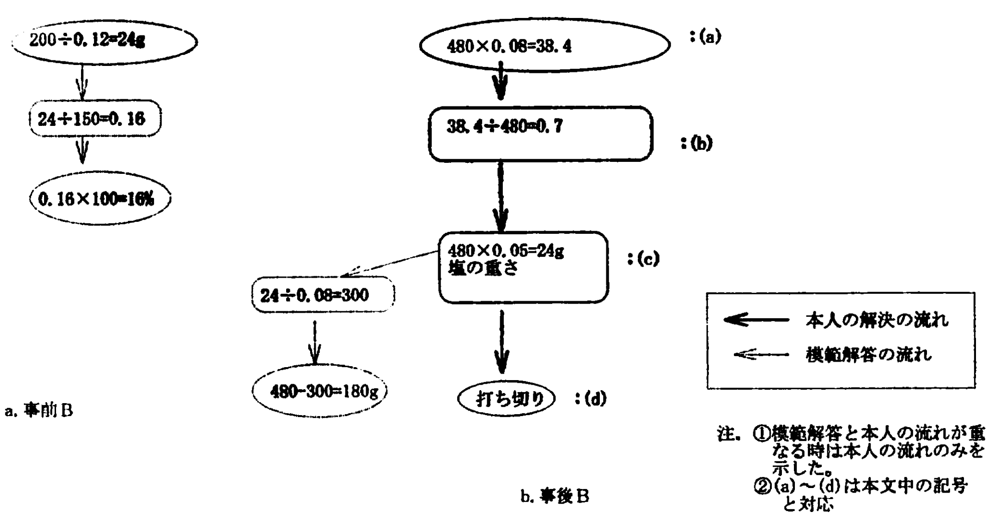

Fig. 4　A202 の解答の流れ図

範囲を超えてしまうのである。

理解されていない被験者の場合 (fig. 6) は，いずれかの項目間が分断されていて，課題が与えられたときに適切な項目群を選び出して表象モデルを構成することが出来ないことがある。fig. 6 は，食塩水の濃度を求める際の分母に相当する変数が食塩水に結びついていない，つまり食塩水の濃度と割合の概念が適切に結びついていない例である。そして，このモデルを踏まえて被験者は，どのような値になるかという解答の「見積もり」をたてるのである。このモデルが意識化されるのは一時的で，解答終了後は意識下に戻される。このモデルから被験者が見積もった値と手続きを踏んで求めた値が合致する場合，モデルの組織の結びつきは強化され，これ以降同じような課題が与えられた時に再び出現する可能性が高くなるであろう。ところで各被験者が構築する表象モデルは，見積もりと実際に計算した答えとが合致しない場合はどのようになるのか。今回の実験状況からは，堅持されて修正されにくいと推測できるが，今回とは異なる教授条件の下では修正が可能なのであろうか。これについては，今後検討したい。

全 般 的 考 察

今回のような問題解決状況は，いわば第 3 者によりあらかじめ設定されたものであり，そこで設定された目標状態つまり模範解答は，子どもにとって必然的なものではない。子どもが出す解答は，このようにして解けばよいとはじめは教授されたことが基になって個々の頭の中で再構成されたモデルが生成したものである。したがって，それらモデルが公式と一致すれば，必然的に正解になり，一致しなければ不正解となってしまうのである。Table 1 で分類した誤答群は，現象レベルではあのように分類できるが，多くは個々により構築されたモデルが生成した結果なのである。

今回の研究は個々の理解の状態においていかに問題解決がなされるかを観察するためのものであった。子どもは，論理的に順序よく食塩水の問題の教授を与えられたにもかかわらず，各自に都合のよいように合理化し，モデルを構築したのではないかと思われる結果が得られた。食塩水の問題について修得すべき事柄は，公式を覚えて解答できるようになることだけではない。食塩水の問題は，そこから正確な操作的イメージを把握することや「割合」というさらに広い定義を修得するために用いられる例題の一つである。このような問題を通じて，的確に割合の関係を抽出することが必要なのである。食塩水の問題に限らず，ある問題を生徒が解くことができるように教授する場合，その問題に関する公式のみをそのままの形で記憶するように強調されていてはあまり意味がない。問題の構造上の正確なイメージや「割合」や「溶液の濃度」といった定義は，自然科学上の思索や実践にとっての必要条件といえる事柄である。これらの意味を提示し，かつそれを学習者が習得しなくては，ただ公式を記憶して問題文中の数値に適当に当てはめる表面的な理解の 解答しか生成 でき ない であろう。“わかった”上での答えを出すためには頭の中に解くべき問題に対す

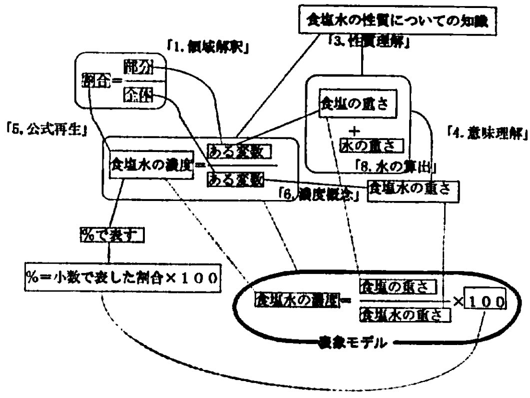

Fig. 5 理解されている被験者のモデル

注 1. 各項目が有機的に結びついている。理解がなされている被験者の場合は，公式や実践問題や食塩水の問題に関わる重要な概念などが孤立することなく結びついていて，課題が与えられたときには，その課題で必要とされる最小限の項目が選択され，新たに表象モデルが構成される。被験者にとって直接意識化されるのは，この表象モデルである。実際には図に示されるよりも組織化される項目数は多く，複雑なつながりがあるものと考えられる。表象モデルが意識化されるのは一時的で，解答終了後は意識下に戻される。このモデルを踏まえて被験者は，解答の「見積もり」をたてる。

注 2. Table 1 に掲げた誤答カテゴリーを，出現する原因と考えられる箇所に記入した。このうち，誤答カテゴリー「2. 受け売り」，「7. 演算取り扱い」，「9. 数字の混乱」，「10. 場当たり」については図中に記入されていない。「7. 演算取り扱い」は，%についての演算上の性質であり，食塩水の問題について直接関わりがないので fig. 5 には載せなかった。「9. 数字の混乱」は，ここでのモデルを処理しきれず表象モデルを把握していくことが出来なかったことにより起こると考えられる。「10. 場当たり」は，個々の被験者において構築されたモデルにより様々に起こりうる.

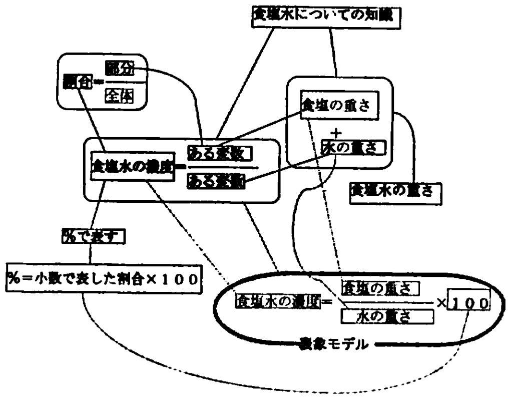

Fig. 6　理解されていない被験者のモデル

注　割合を構成する式の分母が全体の量であることを学習してはいるが，それが食塩水の濃度の関係に結び付いていない。また，食塩水の濃度を求める際の分母に当てはまる変数が食塩水に結びついていない。つまり，食塩水の濃度と割合の概念が適切に結びついていない例である。

る適切なメンタルモデルが形成されていなければならないであろう。さもなくば，表面的な形式が変わっただけでたちまち不正解へと導かれてしまうのである。正確な「理解」の重要性は中垣（1987）も示唆している。しかし，正確な「理解」がなされるように指導するには，情報処理上の個人差を考慮しなければならない。例えば同じ事柄について条件を同じくして提示しても，受け取る側の子どものそれらの情報に対する「注意」の当て方は異なるであろう（ex. N. Morey 1959)。小学校の理科の「仮説実験授業」(所澤，1991）は，この注意の当て方の違いを利用した一つの方法論と考えられる。子どもが与えられた実験状況に当てる注意の当て方は，さまざまである。注意の焦点は，問題について子どもが持つ概念によって異なる。仮説実験授業は，色々な注意の焦点を提示することで子どもの持つ概念に揺さぶりをかけて概念を変換させようというこころみととらえることができる。つまりそれは，子どもの持つモデルを変換する可能性のある教授法の一つではないだろうか。その他，個々の理解の状態を規定する原因として発達的側面も考慮する必要があろう。今回は，実験期間が短期であったため，メンタルモデルの発達的側面を十分に観察することはできなかった。今後は長期にわたりデータを収集することで，発達的観点からの検討も試みたい。

References

Brown, J. S. & VanLehn, K.　1980　Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. Cognitive Science, 4, 379-426.

Chi, M. T. H., Glaser, R., & Rees, E.　1982　Expertise in problem solving.　In R. J. Sternberg (Ed.) Advances in the psychology of human intelligence, Vol. 1, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

松原元一　1988　算数教育の考え方教え方　国土社

Findler, N. V. (ed).　1979　Associative Networks. Academic Press.

Mayer R. E., Tajika H., & Stanley C. (1991). Mathematical problem solving in Japan and the United States: A controlled comparison.　Journal of Educational Psychology, 83, 69-72.

Morey, N.　1959　Attention in dichonic listening: Affective cues and the influence of instructions. Quarterly Journal of Experimental Psychology, 11, 56-60.

中垣　啓　1987　納得と理解―発生的認識論と認知心理学研究 (1)―　三田哲学会「哲学」No. 84, pp. 91-118.

所澤　潤　1991　「わかる」ことと「学ぶ」こと　滝沢武久・東　洋編「教授・学習の行動科学」福村出版

Simon, D. P., & Simon, H. A.　1978　Individual differences in solving physics problems.　In R. Siegler (Ed.) Children's thinking: What develops? Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

吉田　甫　1982　課題分析から教授の処方へ　波多野誼余夫編「認知心理学講座４学習と発達」東京大学出版会

吉田　甫　1983　問題解決における誤った知識構造―分数の計算における例，宮崎大学教育学部紀要，53, pp. 41-51.

吉田　甫　1991　子どもは数をどのように理解しているのか，新曜社

Young, R. & O'Shea, T.　1981　Errors in children's subtraction.　Cognitive Science, 5, 153-177.

註．本稿の一部は，日本教育心理学会第35回大会（1993）において発表した。