慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	両眼視空間の幾何学的表現に関する歴史的考察
Sub Title	Geometrical description of binocular visual space : a historical review
Author	西川, 泰夫(Nishikawa, Yasuo)
Publisher	慶應義塾大学大学院社会学研究科
Publication year	1966
Jtitle	慶応義塾大学大学院社会学研究科紀要 : 社会学心理学教育学 (Studies in sociology, psychology and education). No.7 (1966.) ,p.11- 22
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	論文
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN0006957X-00000007-0011

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

両眼視空間の幾何学的表現に関する歴史的考察

Geometrical Description of Binocular Visual Space: A Historical Review

西　川　泰　夫

Yasuo Nishikawa

はじめに

我々の心理現象は，我々を，即ち人間というフィルターを通した映像であろう。従って，個々の現象は，フィルターの持つ特性によって示されるといってよいであろう。では，その特性とはどのようなものであろうか。先ずどの様な特性を持っているのか測定する問題が生じ，次に，その特性がいかなる形式に書き表わされるのかという問題が生じる。前者についていえば，正にこれが心理実験であろう。一般的にいって，人間の内部を直接見ることは出来ないので，人間を暗箱 (black box) と考えて，ある一定の刺激とこれに対する反応との関係から推論がなされる。この刺激—反応関係がいかなるものであるかは，実験に依存するといえよう。後者については，推論にもとずいて，或いは，直接実験的事実にもとずいて，法則がうち建てられる。この法則は，公理的体系に帰納される。そして更に，理論体系が演繹されるといえよう。尚，この法則は，その構造が，またさかのぼって実験的事実のもつ構造が，数学のもつある構造と同形であれば，数学体系による記述が可能となる。そして，経験的事実の科学的法則性が確立され，理論にもとづく，より一般化への道が展開されてこよう。

以下取扱う心理現象を，視知覚現象のうちの，両眼視という条件下における視空間に問題の焦点をしぼって，その歴史的背景と共に，理論的，実験的考察を行なっていきたい。

歴史的背景

両眼視知覚空間に関する理論は，Luneburg, R. K.[16][17][18] により 1945 年から展開，発展され，それ以来，いろいろな研究者によって研究がなされている。Luneburg が理論構成にいたった経過について，Blank, A. A. の言葉に従っていえば[6]，この時 (1945 年)，Luneburg は，Dartmouth Eye Institute におり，従来視空間知覚に関して，普通に受け入れられていた予想とは，矛盾すると思われるデータを示された。数学者である Luneburg にとって，このデータの示す意味は，次の様に解釈しうるものであった。即ち，この視覚現象は，純粋にユークリッド幾何学 (Euclidean geometry) では説明出来ないもの，つまり非ユークリッド幾何学的 (non-Euclidean) 性格を表わす現象であることを示していた。この時のデータが具体的に何であったかはふれられていないが，Ames の実験 (Ames' distorted rooms), horopter, alley 実験等の結果をあげることが出来よう。

Luneburg の最初の著書が 2 年後 (1947 年) に出版された[16]。この著書は，その序文に書かれているように，特に Ames の関心と示唆が理論的考察に影響を及ぼしているようである。続いて 1948 年に改訂版が出された[17]。そして 1950 年に遺稿が表わされた[18]。

視空間に関する研究が開始されてから，わずか 4 年にして Luneburg の死に会い (1949 年) 理論的発展が中断されたことは，非常に残念なことである。

一方，Columbia 大学の Knapp Memorial Laboratory (尚，現在は解散しているとのことである。) に於ては，Hardy, L. H., Rand, G., Rittler, M. C. による実験的研究が続けられていたが，しかし既存の理論の枠組では

解きえない困難にはまり込んでしまった状態にあったようである。そこで 1950 年末 Blank, A. A. が Knapp Laboratory の一員として，理論的考察を続けるために加わった。それ以来，視空間に関する理論構成に，或いは実験的検討に Blank が大きな役割を果して来ている[1]~[7]。

Luneburg 理論の実験的検証に関しては，Luneburg の提案になる3点4点実験[18]による検証，或いは従来の horopter, alley 実験にもとづく理論的，実験的検討が，Hardy, L. H.[11]，Zajaczkowska, A.[21][22]，Shipley, T.[20]，Indow, T., et. al.[14][15], Foley, J. M.[9] 等によって行なわれ，Luneburg 理論をほぼ支持する結果を得ている。また Indow, T., et. al.[23]によって，別の見地からの実験的検討がなされている。

この様な経過をたどって，両眼視空間に関する理論的，実験的考察が行なわれ，現在にいたっている。

今後の研究，発展のために再び Luneburg 理論に目を向け，Blank の考え方と共に，その基本的考え方，理論構成のもとをなす実験的事実等と一緒に考察してみることは，無駄なことではないと思われる。

ところで，Luneburg 理論は，Blank も指摘しているように各種の知覚に関する理論の中にあっては，特異な，珍らしい存在であろう[6]。数学者の寄与により，この理論は，その始めから普通物理科学の理論のみがそなえている幾つかの明確な特性をもっている。このためこの理論は，知覚の研究或いは従来の心理学における研究に，それ以上の価値を持たないようにも思われようが，しかし，この理論が存在するということは，これらの分野における古典的な型の理論の考察に当って，また，新たに統一的に考察するに際して，有益な存在であることを示しているといえよう。

ではいかなる点に於て，特異な存在であり，物理科学的性格を備えているのであろうか。

Luneburg 理論の性格

この理論の特色は，次の様な点にあるといえよう。

第1に，決定論的理論であることをあげることが出来よう。心理的現象を数学のモデルによって記述することは，特に最近に於ては目新らしいことではないが，その大多数の取扱いは，統計論的或いは確率論的である。即ち，非決定論的である。これに反して，この理論は，その取扱う空間という言葉からも予想されるように，その取扱いは幾何学的である。従って，そこには微分幾何学や変分法等が用いられている。この様な数学が心理現象の記述にも用いられるということは，注目に価しよう。

第2に，決定論的理論は，普通物理的，或いは生理的言葉による決定論的な取扱いが必要であるが，それが Luneburg 理論にはない，という点をあげることが出来よう。例えば，記憶現象等の場合，ある仮定をおき，即ち，大脳皮質における過程を生理的言葉で，或いは物理的言葉で量的な取扱いをなし，それに対する決定論的モデル，微分方程式等によるモデルを構成して理論が作られている。しかし，この理論は，現象間の関係が直接問題にされている。従って，ここに出てくる物理的言葉による取扱いは，現象そのものに結びついたものであって上の意味でのものではない。つまり，この理論の問題の焦点は，外界としての物理空間と，現象間の関係がよって立つ視空間とを結ぶ関係がいかなるものであるか，一対一に対応するにせよその対応は線型関係にあるのか別の関係にあるのか，といった点であり，またその対応関係を記述するのが目的とされている。そのためには，現象間関係の物理的言葉による取扱いが必要となる。しかも，個々の現象は，一つの観察可能な変数で，これは確率変数として考えられるものである。それにもかかわらず，その背後に流れる大きな文脈，それは心理学的法則というべきもので，この法則が視空間理論において決定論的にとらえられているといえよう。

第3に，従来の視知覚に関する幾つかの現象を，一つの理論のなかに統一的に説明しようとした点をあげることが出来よう。しかも，この理論は，知覚のなかにおける空間的性質，即ち，知覚されたものが大きさを持ち，形を有し，位置をしめる現象空間，或いは心理的空間としての両眼視空間を取扱ったものである。いいかえれば，理論構成に当ってその基本となった事柄は，我々の視空間知覚による経験的，実験的事実の間の現象間関係である。そしてこの関係の背後に存在すると考えられ，かつ関係間の持つ構造を満す心理空間が，理論の対象となっている。

従来空間知覚という名のもとに行なわれる研究の対象は，視覚の場合，物体の形の認知とか，錯視等の歪み，恒常性，立体鏡視，3次元物体の奥行き知覚の成立等々といったもので，いずれも知覚されたもの自身の空間的性質で，心理空間そのものではなかったといえよう。

以上 Luneburg 理論の性格に関して大きく三つに分けて考察してきたが，この理論の幾何学的である意味や，数学体系の幾何学とそのモデルとしての意味，それに対する実験の意味について考えていこう。そして視空間における現象間の関係が，物理的言葉によっていかに表現

されるかという点を明らかにしていきたい。

それでは先ず，幾何学とは何か，という点から考察していこう。幾何学は，点，直線，面等を要素とし，これらの間に存在する関係を満す公理にもとづいて演繹的に推論された一つの数学体系である。即ち，一組の公理から出発する。幾何学を構成するためには，幾何学では証明されない幾つかの出発点となる命題が必要で，これらの命題が公理とよばれる。またこれは一つの規約である。従って，どの様な規約をとるかは自由であるが，一群の公理から一つの体系を構成する場合，それらのうちのどの二つの公理をとっても互いに矛盾しないことが必要である。内的整合性がなければならない。そしてこの公理をもとにして，一定の論理学の法則に従って定理が証明される。公理は真であるとされるものであるから，これと矛盾しない定理も真である。この様にして一つの幾何学体系が構成される。また，幾何学は，研究される対象の具体的意味には関心を持たない。幾何学は単にこれらの対象間の関係を研究するだけである。あらゆる幾何学は，点，線，面とよばれる任意の本質をもった対象を研究するのであって，「上にある」「間にある」「等しい」等の諸関係が与えられた幾何学の公理を満すよう確立されさえすればよいのである[10][12]。

幾何学をこのように公理的に構成するという思想は，ユークリッド (Euclid) (前3世紀) にはじまる。この体系は，ユークリッド幾何学 (Euclidean geometry) として知られているものである。

この様な幾何学に対して，視空間が幾何学的であるとは，何を意味しているというべきであろうか。視空間は，知覚現象として任意の本質をもった点，線，面等に対して，その現象間の「上にある」「間にある」「等しい」等々という諸関係をもとに構成された一つの現象体系である。従って，この様な視空間が幾何学的であるというのは当を得ているといえよう。そして心理現象を記述するに当って幾何学モデルが用いられることが可能なのは正にこの点にあるといえる。即ち，ある現象のもつ構造が，ある幾何学における論理体系のもつ構造と並行した性質をもっているからである。両者の間に同形論 (isomorphism) と呼ばれるもの，形式の等価性が存在することである。従って，次に問題になるのは，ある幾何学モデルが，視空間の記述にうまく適応しているか否かを，経験的に検証しなければならない，という点である。ここに実験，或いは検証実験の意義があろう。つまり，我々の視空間の幾何学がどのようなものであるかという問題は，この視空間に働く心理学的法則にかかっているからである。そして心理学的法則の研究が，適切な幾何学の選択の手伝いをしなければいけないであろう。この法則性の確立は，心理実験に依存している。

それでは，実験的，経験的基礎として何がもとになっているだろうか。そして，これら現象間にいかなる関係が認められ，物理的言葉によっていかに取扱われているだろうか。理論の基本的考え方と共に以下明らかにしていきたい。

Luneburg 理論の基本的考え方

この理論は，まず両眼視知覚には，計量可能な変数が存在する，という仮定にもとづいている。この点に関して Luneburg は，次の様に述べている[18]。

「視知覚は，単なる心理的条件の偶然の結果ではなくて，感覚を形成するに当って，その感覚を完全に決定しないかもしれないが，重要な役割を果すある一定の因子に支配されている。これらの因子は，観察者のある特性に結びついていると同様に，外界のある物理的状況に関連しているにちがいない。有機体の外界に対するこの様な一定因子の存在を否定することは，視知覚における客観性を否定することに等しく，それは不合理であろう。」

この様な因子としては，かなり多数のものが考えられる。遠近作用，運動視差，色調や明かるさの変化，対象の大きさの手掛り，そして消化作用の状態等さえ作用を及ぼしている。そこで Luueburg は，両眼視 (binocularity) という因子のみに焦点を合わせて理論構成を行なっている。つまり，両眼視空間というのは，視空間判断のよって立つ一定の土台という意味をもつものである。そして，この因子にもとづく知覚反応は，一つの観察可能な確率変数とみなされるものであるが，その量的取扱いと，関係をもとにその背後にある現象空間としての両眼視空間が問題とされているのである。それ故，実験的研究は，この条件を満すように計画される。第1に，暗室内実験である。見える対象は，小光点である。これらの光点は，みかけ上明かるさが等しくなるように調整される。しかもこの明かるさは，出来るだけ暗くしてあるので，この光点が星状にみえるのみで，他の物は何もみえないようになっている。従って，手掛りとなるものは何も無く，ただ両眼視にもとづく，みえたままの反応が要求される。第2に，観察者の頭部は，顔面固定器により固定されている。従って，身体の運動はゆるされない。これは，運動の因子を入れないためのものであるが，但し，目の運動 (ocular motility) は，自由にされ

ている。

この様な静止刺激布置と，観察者の静止状態に対して，刺激—反応関係を取扱うための枠組として，座標系が決定される。

そこで，次に外界の刺激パターンと，人間というフィルターを通した反応パターンとの関係をどのように扱うかという点を明らかにしていこう。

外界の刺激パターンを構成する布置を，物理空間と呼ぶことにする。この物理空間は，幾何学における任意の本質をもった点，線，面という無定義要素の実質的本性と，物理的起源をなすものである．従って，逆に，物理空間は，具体化された点，線，面の集まりとして考えられるものである。それ故刺激布置は，物理的物差しによって測られる実在と考えられる。この物差しとなるものが，固定されたある枠組，即ち，座標系（デカルト座標系，cartesian coordinate）である。この座標系によって，ある位置をしめる点は，その次元数に応じた個数の，順序のついた実数によって表わされる。この様な物理空間の構造は，ユークリッド幾何学の成立する空間であるといえる。

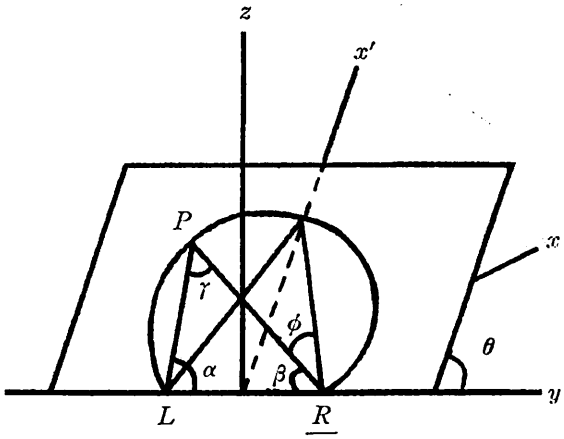
一方，これに対して，反応パターンを構成する布置，即ち，現象間の関係を満たす視空間は，いかなる座標系によって，従って，いかなる幾何学の成立する空間であろうか。この問に答えるに当って，Luneburg は，次の様な手順をふんでいる。まず最初に刺激点のしめる位置を物理空間を表わす座標系によって書き表わし，続いて知覚点のしめる位置を，物理空間の中に書き表わすことから始める。これが知覚点の Euclidean map と呼ばれるものである。物理空間の言葉で，視空間の座標系を定めることにある。そして，物理空間の刺激点の座標系と，map 上の知覚点の座標系，との間にどのような対応関係がつけられるかという点に仮定をおき，上の問に答えようとしている。

刺激点がいかなる座標系によって表わされるか，という点からみていこう。

物理点（刺激点）P の物理空間にける位置を示すために観察者の両眼 L, R との関係から，双極座標系（bipolar coordinate）を用いる。勿論普通に用いられる座標系 (x, y, z) で表わしうるが，より便利な表わし方として，双極座標系を用いる（第 1 図）。

それぞれの文字は，次の様な意味を持つ。

x 軸は，両眼 L, R の中点から y 軸に対して直交する奥行き方向に引かれた正中線軸を示す。



第 1 図

y 軸は，両眼 L, R の中心を結ぶ左右軸を示す。

z 軸は，両眼 L, R の中点から，x 軸，y 軸に対して直交する上下軸を示す。

従って，$x-y$ 軸によって水平面が構成される。$y-z$ 軸によって前額平行面，$z-x$ 軸によって正中面が構成される。

γ は，両眼視差（bipolar parallax）或いは，輻奏角（convergence angle）を表わす。

α は，y 軸に対して視線 LP のなす角度，

β は，y 軸に対して視線 RP のなす角度を示す。

θ は，仰角（angle of elevation）を表わす。

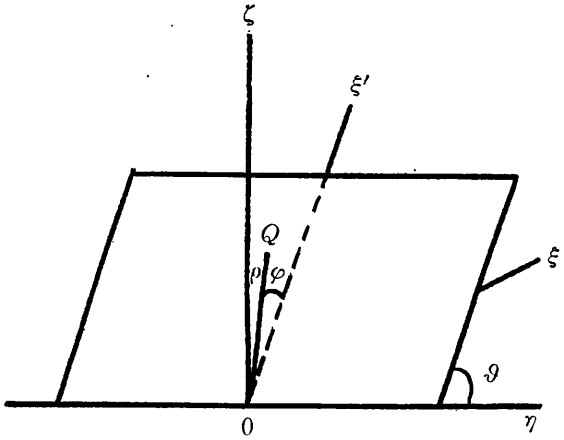
x' は，仰角 θ の面上への x 軸の投射軸を示している。

ϕ は，緯度（bipolar latitude）を表わす。

点 P の座標は，かくして $P(\gamma, \phi, \theta)$ 或いは，$P(x, y, z)$ で表わされる。この両者の関係は，両眼 L, R の座標を $L(0, -1, 0)$ $R(0, 1, 0)$ とし，$\gamma=\pi-\alpha-\beta$，$\phi=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ であることから，次の様な対応関係にある。

$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos 2\phi+\cos\gamma}{\sin\gamma}\cos\theta \\ y=\dfrac{\sin 2\phi}{\sin\gamma} \\ z=\dfrac{\cos 2\phi+\cos\gamma}{\sin\gamma}\sin\theta \end{cases}$$

一方，物理空間に対して，点 P の視空間において知覚される点を Q と表わすことにすると，点 Q は，Euclidean map 上の座標系によって表わされる。この時，座標原点は，我々は両眼で見ているのであるが，主観的には，単一視と同等であるという事実を反映して，極は，双極ではなくて単極である。従って，点 Q の位置は，極



第 2 図

座標系 (polar coordinate) $Q(\rho, \varphi, \vartheta)$ 或いは，普通の座標系 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ によって与えられる (第 2 図)。

それぞれの文字は，次の様な意味をもつものである。

ξ 軸は，視空間における正中線軸を示す。従って，物理空間における x 軸に相当するものである。

η 軸は，視空間における左右軸を示す。従って，y 軸に相当する。

ζ 軸は，視空間における上下軸を表わす。同様に，z 軸に相当する。

従って，$\xi-\eta$ 軸は，主観的水平面，$\eta-\zeta$ 軸は，主観的前額平行面，$\zeta-\xi$ 軸は，主観的正中面を構成している。

ϑ は，仰角を示す。物理空間での θ に相当するものである。

ρ は，OQ 間の距離，即ち，観察者から知覚点 Q 迄の知覚距離を示すもので，Euclidean map 上の距離であるので次の様に書き表わされる。

$$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

φ は，仰角 ϑ の面上における ξ 軸の投射軸 ξ' 軸からの，即ち，正中線からのへだたり角度を示す。物理空間における ϕ に相当するものである。

従って，点 Q の座標系 (ξ, η, ζ) と $(\rho, \varphi, \vartheta)$ との対応関係は，次の様な関係にある。

$$\begin{cases}\xi=\rho\cos\varphi\cos\vartheta\\ \eta=\rho\sin\varphi\\ \zeta=\rho\cos\varphi\sin\vartheta\end{cases}$$

以上述べてきた物理空間と視空間に対する二つの座標系 (r, ϕ, θ) と $(\rho, \varphi, \vartheta)$ との間の対応関係として，Luneburg は次の仮定をおいている。

$$\begin{cases}\vartheta=\theta & \text{(i)}\\ \varphi=\phi & \text{(ii)}\\ \rho=2e^{-\sigma r} & \text{(iii)}\end{cases}$$

(i) (ii) は，上下，左右方向に関しては，P の位置は，そのまま Q に反映されることを示している。(iii) は，ρ が r の関数であることを示しており，$r=0$ となる点 P，即ち物理的には無限遠点に対応する点 P は，Euclidean map 上では，$\rho=2$ という限界をとるように定義されたものである。定数 σ は，奥行き知覚の精度を表わすもので，観察者によって異なる値をとる。尚 e は，自然対数の底を示す。

もし，視空間がユークリッド空間で表わされるものであれば，これらの座標系は全く一致して，Euclidean map を考える必要はないであろう。しかし，多くの観察事実から，そうではないことが示されている。ρ に対して上の様な関係を考えたのもここに理由がみられる。つまり視空間における距離関係は，物理空間におけるそれとは一致していないのである。例えば，Helmholtz や Hillebrand の実験によれば，物理空間における点 P_1, P_2 に対する視空間における知覚点 Q_1, Q_2 の間に，知覚距離といった空間関係が示されている。そこで，もし上に述べた map 上でのユークリッド的距離が，視空間における知覚距離そのものを表わすものであれば，ユークリッド空間における直線は，視空間における直線に対応するはずである。しかし，これらの実験結果からそうではないことが示される。また他の経験的事実からも，そうではないことが示される。太陽や月，或いは星といった天体迄の知覚距離は，物理的距離に決して比例してはいない。空そのものも有限な半径をもった天球として知覚されている。従って，視空間は，一定の限界をもった有限なものと考えられる。この限界を，Luneburg は，$\rho=2$ と規定したのである。

更に，Blumenfeld による実験から，distance alley と parallel alley のくいちがいが示されている。これは，視空間が，非ユークリッド的性格を持つことを表わし，かつ双曲線幾何学 (hyperbolic geometry) 的であることを意味している。

いずれにしても，これらの実験から，我々の知覚距離は，物理的距離とは一致しない性格を示していることがわかる。従って，知覚空間関係にもとづく距離関係がいかなるものであるかを明確にする必要がある。

Luneburg は，後述する現象間関係と共に，視空間は，等質な，定曲率をもつリーマン空間 (Riemannian

space) と考え，その線素 (line element) を，

$$ds^2=\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{[1+\frac{1}{4}K(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)]^2}$$

とおき，知覚 2 点間の距離は，測地線にそった線素の積分の最小値として表わしている。ds は，知覚点 (ξ,η,ζ) と，その近傍点 $(\xi+d\xi,\eta+d\eta,\zeta+d\zeta)$ との間の距離関数を示すものであり，K はガウス (gaus) の全曲率を表わしている。この K の値は，これらの実験から一般に $K<0$ となることがみい出されている。従って，視空間は，双曲線幾何学によって表現されるといえよう。

次に，Blank による両空間に対する対応関係をみることにしよう。各座標系に対する取扱いは，Luneburg のそれとほぼ同じであるが（第 1 図，第 2 図），視空間距離関係が iseikonic 変換で変化しない故に，この変換のもとで不変な座標系で，表現するのが便利であると考えている。即ち，空間関係は，定数変化に対して不変であると考えられるので次の様な関係が存在する。

$$\Gamma=\gamma-\gamma_0,\quad \Phi=\phi-\phi_0,\quad \Theta=\theta-\theta_0$$

これが，iseikonic 座標系とよばれるものである。γ_0,ϕ_0,θ_0 の値は任意に選ばれる。但し，γ_0 の値は，考えている空間の最小の γ の値が選ばれる。輻奏角が最小である布置の点においては，$\Gamma=0$，従って，輻奏角がそれ以上のすべての点においては，Γ は正の値を取る。

また，視覚による位置づけ，知覚された方向に関していえば，主観的水平面，前額面，正中面は，物理空間の対応する平面に一致するように位置づけられる。そして，物理点 P_1, P_2 に対する知覚点 Q_1, Q_2 の関係は，P_1, P_2 が同じ角座標 ϕ と θ をもつならば，そしてその場合に限って，観察者から同方向にあると知覚される。換言すれば，2 点の ϕ と θ 座標が同じなら，この点は，観察者の中心を結ぶ線上にあると知覚するであろう。従って物理空間における θ=一定，ϕ=一定は，視空間において，ϑ=一定，φ=一定なる，ある長さ r をもった径 (radial lines) として説明される。更に，面の位置づけが対応している場合は，$\varphi=\phi$，$\vartheta=\theta$ とおくことが出来る。

iseikonic 変換にもとづけば，ある点から他の点をみた時，φ と ϑ の知覚される差は，ϕ と θ の差に等しいことがいえる。それ故，次の様な対応関係がつけられる。

$$\varphi=\Phi,\quad \vartheta=\Theta,\quad \gamma=\gamma(\Gamma)$$

Blank による，視空間座標系と，物理空間座標系との間の関係は，要約すると上の様になる。視空間を完全に記述するためには，観察者における単一な関数 $r(\Gamma)$ を決定することのみが必要である，ということになる。

視方向と物理座標系との間の関係が理解されると r (radial line, radial coordinate) と，物理座標系との間の関係は，経験的に決定される。主観的中心 (Blank は，これを egocenter と呼んでいる。) に対して，円の印象を与える $\theta=0$ なる水平面上の軌跡は，非常に γ=一定な，Vieth-Müller circle (V.M.C.) に近いということが実験からみい出されている。これらは，目の中心 L, R を通る水平面上の円の集合である。従って，与えられた点 P に対して，主観的中心から同じ距離にあるという印象を与える点 Q の物理的軌跡は，P を通る V.M.C. である。即ち，方程式 r=一定は，観察者から等距離にみえる点の位置の軌跡を示す。そして，radial coordinate r は，曲率 K の符号に従って，次の様に書き表わされている。

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\dfrac{2}{(-K)^{1/2}}\tan h\,\dfrac{r}{2} & (K<0)\\ \rho=r & (K=0)\\ \rho=\dfrac{2}{K^{1/2}}\tan\dfrac{r}{2} & (K>0)\end{cases}$$

また，距離関数についても Luneburg の解析幾何学取扱いに対して Blank は，三角関数による取扱いがなされている。

$$\begin{cases}\cos h\dfrac{D}{C}=\cos hr_1\cos hr_2 \\ \qquad -\sin hr_1\sin hr_2 f(\varphi_1\varphi_2:\vartheta_1\vartheta_2) & (K<0)\\ \left(\dfrac{D}{C}\right)^2=r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2f(\varphi_1\varphi_2:\vartheta_1\vartheta_2) & (K=0)\\ \cos\dfrac{D}{C}=\cos r_1\cos r_2+\sin r_1\sin r_2 f(\varphi_1\varphi_2:\vartheta_1\vartheta_2) & (K>0)\end{cases}$$

$$f(\varphi_1\varphi_2:\vartheta_1\vartheta_2)=\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$
$$-\cos\varphi_1\cos\varphi_2[1-\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)]$$

尚曲率 K の符号が何になるかという点は，Luneburg の場合と同じく，実験的に決定されなければならない。

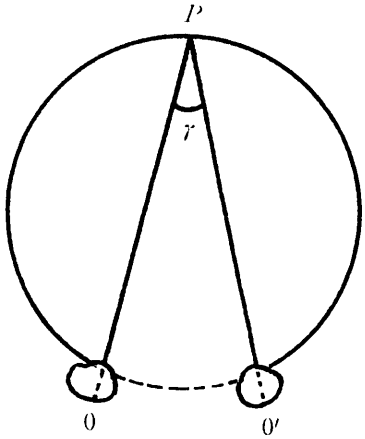
そこで，次にこれらの結びつきを導出した実験的事実の具体的内容と，理論との関係をみていこう。

実験的，経験的事実

(1) horopter

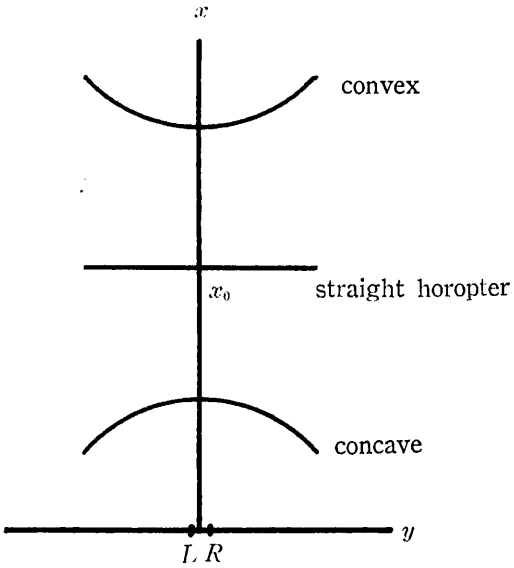
この実験は，歴史的には古く，Aguilonius (1613 年) によって，両眼視野において単一視される点の位置を示すために作り出された言葉である[8]。従って，horopter

は，凝視点を含む垂直面であり，水平面上の horopter は，観察者からある距離にある凝視点を通る横軸と考えた。これに対して，1818年，Vieth, 1826年，J. Müller によって水平面上の horopter は，凝視点と，両眼の中心を通る円であると説明された。これがいわゆる Vieth-Müller circle (V. M. C.) と呼ばれるものである（第3図）。



第 3 図

一方，Ogle, K. N.[19] は，凝視点を両眼の高さにした場合は，特に longitudinal horopter と呼びこれを両眼の結節点と凝視点を通る円として表わしている。これは正に V. M. C. であるが，実験結果によると，longitudinal horopter は必ずしもこの形にはならない。尚，



第 4 図

彼は，凝視点迄の距離によりその形を変える horopter を，円錐曲線群の一つとして表現している。

またHelmholtz の簡単化した実験によると，horopter は，凝視点の位置によりその形が変わり，凝視点が観察者の近くにある間は，観察者に対して凹 (concave)，凝視点がある限度以上に遠くはなれると凸 (convex) になる。適当な位置に凝視点があると，物理的意味での直線 (straight horopter) になることが示された。この実験は，正中線に対して対称に2点を固定し，正中線上の1点を調整し，3点が一直線をなしているようにみえるようにした結果である。それを図式的に表わすと図の様な結果になる（第4図）。

この実験の意味することは，物理的直線と視空間における知覚直線とは必ずしも一致しないことを示している。従って，Luneburg は，この知覚直線を表わすために，測地線 (geodesic) を導入した。任意の面上の2点を考えてみよう。これらは，この面上にある無限に多くの異なる線で結ぶことが出来る。これが測地線といわれるものである。これらの線のうち最も短かい線を知覚直線と呼ぶことにする。というのは，ユークリッド平面上の2点を結ぶあらゆる曲線のうちで，最短距離になるのは直線である，というのに対応しているのである。

故に，horopter は，視空間における前額面上の測地線であると考えられる。そしてこれらの曲線は，$\xi-\eta$ 面の円として与えられるものである。

$$K(\xi^2+\eta^2)=4(1-C\xi)$$

尚 C は定数である。

この様に，この実験は，理論構成のもとになったと同様に，理論の検証実験としても行なわれるものである。horopter の理論式による予測値と，実験結果との照合に，或いは σ, K の値の導出に用いられている。更に，以下に述べる alley 実験，3点4点実験においても同様である。尚これらの実験による値の算出法とか具体的な手法については文献を参照していただきたい[2][14][21][22]。

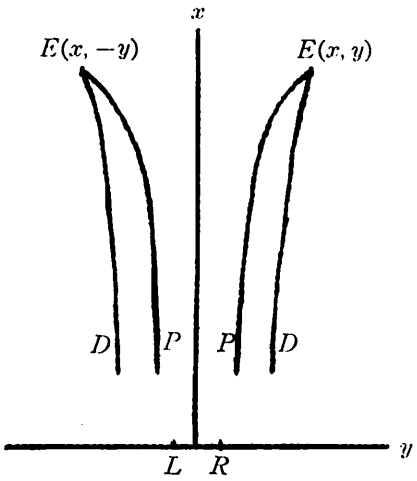
(2) Hillebrand の並木実験 (alley experiment)

経験的には，街路樹，或いは，鉄道線路のように物理的な平行線が，知覚の上では前方に収斂しているようにみえる現象として知られているものであるが，この実験は，暗室内で観察された光点の平行線に対してつけられた名前である。実験は，水平面上で奥行き方向に，ある距離におかれた固定光点（正中線に対して左右対称）から，可動光点列を調整して，みかけ上収斂したり，発散したりしない平行線を構成するように行なう。この結果

が parallel alley と呼ばれるものである。

(3) Blumenfeld alley

Blumenfeld は，上記の alley とは別に，条件を変えた実験を行なっている。それは，さきの固定光点間の距離に着目する。この距離の長さに等しくみえるように各可動光点間の距離を作る実験である。この結果が，distance alley 或いは，equidistance alley と呼ばれる。この両者の alley を重ね合わせてみると，distance alley が，parallel alley の外側に出ることが観察される(第 5 図)。



Parallel (P) and Distance (D) alleys passing through common points (E)

第 5 図

もし視空間がユークリッド空間であるならば，この両者の結果は全く一致し，しかも物理的意味での平行線が得られるはずであるが，実験結果はそうではないことを示している。かつ，distance alley が外側に出たことは，視空間が，双曲線幾何学的性格をもつことを示すものである。

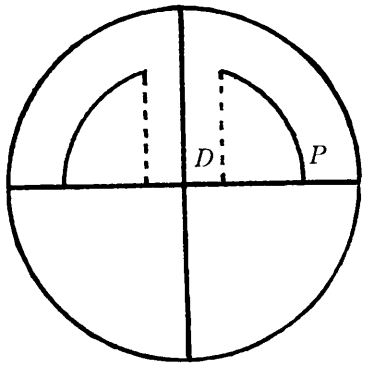
尚，Luneburg は，distance alley と parallel alley を次の様に定義している。両 alley ともユークリッド的性格を持たないので，horopter の場合と同様に，ユークリッド空間での直線に相当する測地線を考え，固定点を通る測地線のうち，η 軸に垂直で，ξ 軸に平行な測地線を parallel alley とよんだ。一方，distance alley は，測地線の長さが等しい点の軌跡として定めた。そして，これらの alley は，各々次の式によって書き表わされている。

$$K(\xi^2+\eta^2)=-4(1-C_\eta):\ \text{distance alley}$$
$$K(\xi^2+\eta^2)=\ \ 4(1-C_\eta):\ \text{parallel alley}$$

これらは $\xi-\eta$ 面上の円を示している。

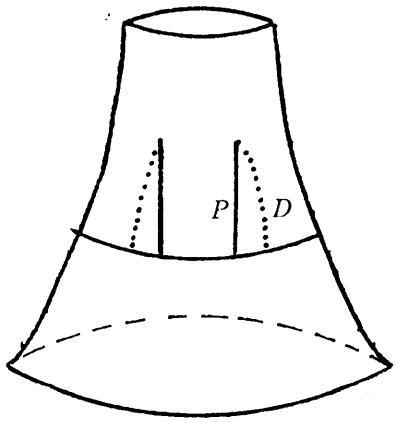
この様な alley と，両者のくいちがいは，幾何学によってどのように説明されるであろうか。この点を明らかにしよう。

もし，視空間の幾何学が，楕円幾何学 (elliptic geometry) であるとすると，2 次元の場合，球面に相当する (第 6 図)。この面上で両 alley はいかに表わされるであろうか。



第 6 図

赤道によって，左右の方向軸 η を示すものとする。そうすると，parallel alley は，赤道に対して垂直で，かつ極を通る二つの大円の線分として表わされる。distance alley は，赤道に対して直交する緯度円の線分として示される。従って，distance alley は，parallel alley より内側にくる。これは，実験結果のちょうど逆の関係になっている。このことから，視空間の幾何学は，楕円幾



第 7 図

何学や，ユークリッド幾何学ではないといえよう。

残る可能性は，双曲線幾何学による説明である。この幾何学の成立する擬球面上で，同様な考察をしてみよう。その結果は，distance alley が parallel alley の外側に出ることがみられる（第 7 図）。

(4) Ames' distorted rooms (equivalent room)

Dartmonth Eye Institute の Ames によって示された実験である。この実験は，普通の長方形の部屋に対して，歪んだ部屋を作り，これを一定の位置からみると，普通の部屋と区別がつかないことを示した。勿論，この歪んだ部屋が自由に作られるわけではない。ある空間関係が同じ場合に限られるであろう。この実験から，Luneburg は，視空間は，free mobility という性格を示すことを指適した。これは，任意の 2 つの合同な布置に対して，一方の布置を他方の布置へ移す運動が存在することをいい，この時，運動は，距離関係を保存する点の変換として定義されるものである。そして，この様な空間は，定曲率をもつ，リーマン空間，即ち，等質空間として知られているものである。

いいかえれば，視空間の任意の位置と方向に与えられた布置は，視空間の他の任意な位置と方向に，視覚的に等価な布置を構成しうることを意味しているのである。ところで，この等価な布置に関しては，iseikonic 変換によって次の様に考えられる。ある点から他の点へ注視する場合，両眼の網膜像が対応して，両眼刺激の二組の点が等価であるならば，歪んだ部屋の点の双極座標 $(\gamma', \phi', \theta')$ は，iseikonic 変換を通して普通の部屋の点 (γ, ϕ, θ) と次の様に結びついている。

$$\gamma'=\gamma+\lambda, \quad \phi'=\phi+\mu, \quad \theta'=\theta+\nu$$

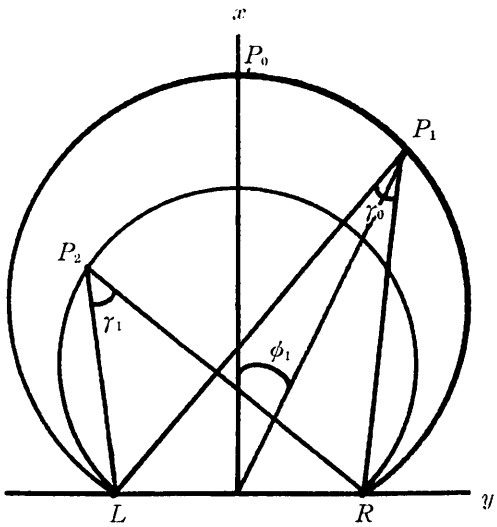
λ, μ, ν は定数である。特に Ames の部屋は，この変換の特殊な場合である，$\gamma'=\gamma+\lambda$, $\phi'=\phi$, $\theta'=\theta$ として考えられるのである。

(5) 3 点，4 点実験

この実験は，Luneburg 自身の提案になる，理論の検証実験である。

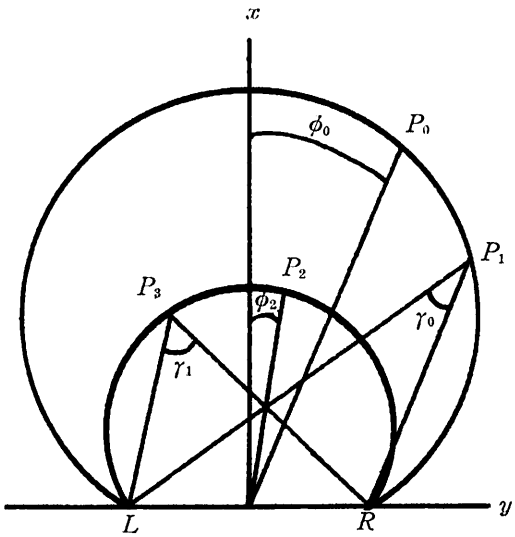
3 点実験は，$\gamma=\gamma_0$, なる V.M.C. 上に 2 光点 P_0, P_1 を固定し，$\gamma=\gamma_1$ の V.M.C. 上の可動点 P_2 を動かして距離 D_{01} と D_{02} が等しくみえるように調整する。尚，D_{01} は点 P_0, P_1 間の，D_{02} は点 P_0, P_2 間の距離を示す。また D_{01} は P_1 の位置を変えることによって各距離が得られ，それぞれに対して実験がなされる。（第 8 図）。

4 点実験は，4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 が図の様に呈示され，D_{23}, D_{01} が等しくみえるように P_3 を調整するように要求される（第 9 図）。



3 point experiment

第 8 図



4 point experiment

第 9 図

この知覚距離は，空間における線素が前述の形で与えられ，2 点 (ξ_i, η_i, ζ_i) (ξ_j, η_j, ζ_j) 間の距離が測地線として与えられるならば，次の様な関係が成立している。

$$\frac{2}{(-K)^{1/2}}\sin\left[\frac{1}{2}(-K)^{1/2}D_{ij}\right]$$
$$=\left[\frac{(\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i-\eta_j)^2+(\zeta_i-\zeta_j)^2}{\left(1+\frac{K}{4}\rho_i^2\right)\left(1+\frac{K}{4}\rho_j^2\right)}\right]^{1/2}$$

そしてこの関係は，水平面上即ち，$\theta=0$ の場合，次の様に書き換えられる。

$$\frac{2}{(-K)^{1/2}}\sin\left[\frac{1}{2}(-K)^{1/2}D_{ij}\right]$$
$$=\left[\frac{\rho_i^2+\rho_j^2-2\rho_i\rho_j\cos(\varphi_i-\varphi_j)}{\left(1+\frac{K}{4}\rho_i^2\right)\left(1+\frac{K}{4}\rho_j^2\right)}\right]^{1/2}$$

また

$$\begin{cases}\vartheta=\theta\\ \varphi=\phi\\ \rho=2e^{-\sigma\tau}\end{cases}$$

の関係から，3 点実験においては，次の様な関係が成立している。

$$Y=AX-B$$

$$\text{尚}\quad\begin{cases}X=4\sin^2\frac{1}{2}\phi_1\\ Y=4\sin^2\frac{1}{2}\phi_2\end{cases}$$

$$A=\frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{1+\frac{K}{4}\rho_1^2}{1+\frac{K}{4}\rho_0^2},\qquad B=\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1/2}-\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{1/2}\right]^2$$

つまり与えられた値 X に対して実測値 Y をプロットした場合直線が当てはまれば理論が成立することを示し，逆にこの直線の勾配，切片から σ, K が算出しされ，その符号に従って，いかなる幾何学が成立するかを明らかにしてくれるのである。更に 4 点実験は，K の値を正確に求めるために計画されたものであり，その関係は，$Y=AX$ が成立している。

$$\text{尚}\quad\begin{cases}X=2\sin\frac{1}{2}(\phi_1-\phi_0)\\ Y=2\sin\frac{1}{2}(\phi_2-\phi_3)\end{cases}$$

3 点実験と同じような手順をとって値の算出が行なわれる。

以上これらの実験的，観察的，事実から明らかなように，我々は，視空間内の点に対して，ある順序づけがなしうることを示している。即ち，点，線，面に対する視空間関係が示される。例えば，ある点は他の点より高い所にあるとか，低いとか，或いは右にあるとか左にあるとかいう方向性の知覚，また任意の点の間の距離知覚とかその大小関係，直線性の知覚，或いは平面の知覚等々が示されている。

しかしながら，単に経験的事実を数えあげるのみではきりがないであろう。これらの現象間に存在する法則を引き出して法則化を試みる必要がある。適切な形式化された数学体系においては，公理の形に，帰納的要素は書き表わされる。数学のモデルとしての魅力は，演繹法が用いられる点に集約されるであろう。心理現象を数学の言葉で表わすことの魅力も，正にこの点にあるといえる。

そこで，Luneburg 理論に関しても，出来るだけ公理の形に表わしてみよう。現象間の関係が公理的体系として，いかに書き表わされるか，この点を以下考察していきたい。

Luneburg 理論の公理的体系

(I) 両眼視空間には，次の条件を満たす，精神物理学的距離関数 (psychometric distance function, metric function) が存在する。距離の順序関係，大小関係，直線性から帰納されるものである。

(i) $D(P_1, P_1)=0$

$P_1\neq P_2\Rightarrow D(P_1, P_2)>0$

任意の点 P_1 のそれ自身への距離は 0 である。また異なる点の距離は，正の値をもつ。

(ii) $D(P_1, P_2)=D(P_2, P_1)$

任意の 2 点間の距離は，測る向きにかかわらず等しい。

(iii) $D(P_1, P_2)+D(P_2, P_3)\geq D(P_1, P_3)$

距離 (P_1, P_2) と (P_2, P_3) の和は，(P_1, P_3) より大きいか等しい。等号が成り立つのは，3 点 P_1, P_2, P_3 が一直線をなす場合，その場合に限る。

(iv) $D(P_1, P_2)<D(P_3, P_4)\Rightarrow 0[(P_1, P_2)(P_3, P_4)]$

距離関数の値が上の様な関係にある場合に限って，P_1, P_2 間の距離は，P_3, P_4 間の距離より短かくみえる。$0[(P_1, P_2)(P_3, P_4)]$ は，距離の順序関係を表わす。

(v) $D(P_1, P_2)+D(P_2, P_3)=D(P_1, P_3)\Rightarrow L(P_1, P_2, P_3)$

P_1 から P_3 への距離関数の距離が，P_2 を通る距離の和に等しいならば，3 点 P_1, P_2, P_3 は，一直線をなしているとみえる。$L(P_1, P_2, P_3)$ は，一直線性関係を表わしている。

この距離関数の具体的な形は，すでに前述した通りである。

(II) 視空間は凸 (convex) である。

これは，P_1, P_3 を異なる任意の 2 点とすると，P_1, P_3 を結ぶ直線上に，次の条件を満たす任意の点 P_2 が少くとも 1 点存在することを意味する。

$$D(P_1, P_2)+D(P_2, P_3)=D(P_1, P_3)$$

(III) 視空間は完備 (finitely compact) である。

$D(P_1, P_\nu)$ が収束する様な任意の無限点列に対して $D(P_{n_\nu}, P)\to 0$ となる様な視空間の点 P と部分点列 P_{n_ν} が存在する ($\nu=2, 3, 4, \cdots$)。即ち，視空間は有限で連続であることを示している。一般に，距離空間の点列 $P_1, P_2, \cdots$ において，点の間の相互の距離がさきへいけばいくらでも小さくなる時，正確にいえば，任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対して自然数 $n_0(\varepsilon)$ を適当にとれば $m, n\geq n_0(\varepsilon)$ なる任意の m, n に対して $D(P_m, P_n)<\varepsilon$ となる時，点列 $P_1, P_2, \cdots$ は，コーシー点列であるという。逆にこの空間におけるコーシー点列が収束するなら，距離空間は完備であるという[13]。

(IV) (I)〜(III) を満たす空間は，距離空間 (metric) といわれる。即ち，視空間は計量可能空間である。

原理的には，視空間関係を最もよく記述する metric が何であるかは，経験的に決定されうるであろう。しかし更に，次の様な公理を導入することによって，視空間の metric はより簡単化される。

(V) 視空間は局部的には，ユークリッド幾何学空間である。従って，狭い範囲内では，ユークリッド幾何学の関係が成立する。

任意の点を P_0 とすると，ユークリッド空間における $D_0(P_1, P_2)$ に対して，

$$\lim_{\substack{P_1\to P_0\\ P_2\to P_0}} \frac{D(P_1, P_2)}{D_0(P_1, P_2)}=1$$

となる。

但し，これは物理空間のユークリッド的特性とは何の関連のないことである点は重要である。これはただ十分狭い視覚布置は，ユークリッドの枠組で十分記述しうるということを意味するにすぎない。地球上の狭い部分をとれば，実用的には，ユークリッド幾何学で十分まにあうというのと同様である。

(VI) 視空間の幾何学は，リーマン幾何学である。これは (V) とは同等の内容をもつもので，微分幾何学的にみたものに相当する。

(VII) 視空間における任意の一直線上にない 3 点は，一つの視覚平面を構成する。平面は，少なくとも一直線上にない 3 点を含む，凸なる部分空間である。いいかえれば，平面(2 次元)は，直線(1 次元)以上のものであり，空間 (3 次元) 以下のものであり，かつ，もし平面が 2 点を含むなら，この 2 点を結ぶ直線上のすべての点は，この平面に含まれる。この様な特性をもつ幾何学は，デザルク幾何学 (Desarguesian geometry) と呼ばれるものである。

リーマン幾何学のうち，以上の公理を満たす幾何学，即ち，等質 (homogeneous) で，定曲率 (constant gaussian curvature) をもつ幾何学は，次の三種類だけである。曲率 K の符号に従って三つの幾何学が区別される。

曲率 $0(K=0)$ の空間は，ユークリッド幾何学 (Euclidean geometry)。

曲率正 $(K>0)$ の空間は，楕円幾何学 (elliptic geometry)。

曲率負 $(K<0)$ の空間は，双曲線幾何学 (hyperbolic geometry) 或いは Lovachevsky-Bolyai 幾何学と呼ばれるものである。

尚，等質空間とは，空間の任意の位置と方向に，与えられた布置と同等な布置を構成しうる空間であることを示している。

かくして，視空間がいかなる幾何学で記述されるかという問題は，かなり限定されてきた。即ち，三つの可能性のうちいずれかである。適切な計画のもとにおける実験によって，このうちのどれであるかを決定することが出来る。この様な実験としては，すでに述べた，horopter, alley 実験，3 点 4 点実験が，それである。

今後の問題点

以上 Luneburg による，視空間がいかなる構造をもつ理論であるかを，その幾何学的性格を，幾何学という数学モデルから考察し，かつ理論構成のもとになった実験と，それらの結果から導びかれる法則を，公理論的に調べてみた。この分野における，理論的，実験的研究の発展，展開に当って，これまでになしとげてきた成果をふりかえり考察してみることは益なきことではないといえよう。

これまでに行なわれている実験的事実によれば，大局的にみて，ほぼほとんどの例で，Luneburg 理論を支持する結果を得ている。その細部に関しては，各種の実験から問題がなくはない。一例をあげれば，σ, K の値の安定性について，条件のちがいによる σ, K の値の一定の傾向をみせた変動[21][22]，理論そのものの実験によるくいちがい，即ち，物理空間と視空間の両座標系に対してなされた仮定への問題等がある。更に，理論自体に関しても，mapping function として，もし適切なものが考えられるのであれば，双曲線幾何学でなく，我々の日常経験に照らし合わせても，ユークリッド幾何学で，視空間の構造を記述しうる可能性があれば，はなはだ便利であろう。これはモデルとしてある幾何学の適，不適ば

かりでなく，より便利であるかないかの問題でもある。この様なことから，知覚距離をもとにした多次元解析の適用による分析を行なった[23]。これによると刺激布置の視覚による再現性は非常に精度が高いことが判明した。この結果からみると，ユークリッド幾何学による記述も不可能ではないとも考えられる。しかし，そのためには，従来の実験的事実である parallel alley と distance alley のくいちがい等も説明しうる新たな mapping function を考え，その適切さ，妥当性を証明しなければならない。単なる布置の再現性がみられたのみでは，ユークリッド幾何学での記述の可能性を示唆したのにとどまってしまうといえるからである。この点について，現在も実験的検討が続けられている。

要　　約

以上，Luneburg による視空間に関する理論の大すじをたどってみた。Luneburg は，この問題の解決に多くの有意義な示唆を与えているが，彼が取扱わなかったと思われる事柄や，仮説に今後の問題解決の鍵が残されているのではないであろうか。Blank の理論的，実験的考察の一部は，この点に向けられているといえよう。

ところで，Luneburg の主張することは，物理的測定を通して得られた空間関係，即ち，物理空間と，両眼視にもとづく視空間関係とは明らかに一致しないということである。それ故，視空間は未知の事柄として扱わなければならず，かつ空間を記述する問題が生記する。視空間関係は，単純化され，数学モデルを用い探究される。視空間の幾何学的関係の説明にとって適切な幾何学体系は，距離関数空間であった。また各種の実験にもとづき，この関数空間は，三つの可能性のうちのいずれかであるかが決定される。即ち，視空間は，局部的にユークリッド幾何学的で，定曲率を持つ，等質空間であるリーマン幾何学のうちの一つである。換言すれば，曲率 K の符号に従って，ユークリッド幾何学，楕円幾何学，双曲線幾何学のいずれかが成立する空間である。実験結果の示すところに従えば，視空間は，双曲線幾何学の構造をもつ空間であることが示されている。

文　　献

1) Blank, A.A., The Luneburg theory of binocular visual space, J. Opt. Soc. Amer., 1953, 43, 717.
2) Blank, A. A., Hardy, L. H., Rand, G., Rittler, M. C., The geometry of binocular space perception, New York; Knapp Memo. Labo. 1953.
3) Blank, A. A., The geometry of vision, Brit. J. Physiol. Optics 1957, 14, 154.
4) Blank, A. A., Axiomatics of binocular vision, J. Opt. Soc. Amer., 1958, 48. 328.
5) Blank, A. A., Analysis of experiments in binocular space perception, J. Opt. Soc. Amer. 1958, 48, 911.
6) Blank, A. A., The Luneburg theory of binocular space perception. in Psychology, A Study of Science, 1958.
7) Blank, A. A., Curvature of binocular visual space. An experiment, J. Opt. Soc. Amer. 1961, 51, 335.
8) Boring, E. G., Sensation and perception in the history of experimental psychology. Appleton-Century-Crofts 1942.
9) Foley, J. M., Desarguesian property in visual space, J. Opt. Soc. Amer., 1964, 54. 684.
10) Guilford, J. P., Psychometric methods, 1954. 秋重義治監訳，精神測定法，培風館
11) Hardy, L. H., Investigation of visual space. The Blumenfeld alleys. Arch. of ophthal., 1951.
12) 日野寛三訳，いろいろな幾何学，ロバチェフスキーの幾何学，東京図書.
13) 弥永昌吉，数学のまなび方，ダイヤモンド社.
14) Indow, T., Inoue, E., Matsushima, K., An experimental study of the Luneburg theory of binocular space perception. (1) The 3 and 4 point experiments, (2) The alley experiments, Jap. Psychol. Res. 1962, 4, 6.
15) 印東太郎，心理学における空間概念，科学基礎論研究 1963, 6, 1.
16) Luneburg, R. K., Mathematical analysis of binocular vision, Princeton Univ. Press. 1947.
17) Luneburg, R. K., Metric methods in binocular visual perception. In studies and essays, Courant anniversary volume, 1948.
18) Luneburg, R. K., The metric of binocular visual space, J. Opt. Soc. Amer., 1950, 40, 627.
19) Ogle, K. N., Resarches in binocular vision, W. B. Sanders Co. 1950.
20) Shipley, T., Convergence function in binocular visual space. I. a note on theory, II. experimental report, J. Opt. Soc. Amer., 1957, 47, 795,
21) Zajaczkowska, A., Experimental test of Luneburg's theory. Horopter and alley experiments. J, Opt. Soc. Amer., 1956, 46, 514.
22) Zajaczkowska, A., Experimental determination of Luneburg's constants σ and K. quart. J. exp. Psychol. 1956, 56, 66.
23) 西川泰夫，両眼視空間の多次元的解析（学部卒業論文）